III. Technik

In diesem Kapitel bringen wir einige allgemeine, für viele Konstruktionen grundlegende Techniken, die später benötigt werden bzw. teilweise schon in Kapitel I benutzt wurden. Außerdem wird ein Beispiel von Mumford gebracht, das zeigt, daß das Hilbertschema im allgemeinen nicht reduziert ist.
Die Literaturangaben beziehen sich auf das Literaturverzeichnis in Teil I dieser Arbeit.

1. Basiswechsel und Folgerungen

Unter einer *algebraischen Familie* verstehen wir einen flachen algebraischen Morphismus $V \to T$. Dabei spielt T die Rolle eines Parameterraumes, und die geometrischen Fasern $V_t = V \times_T \operatorname{Spec}(\bar{k})$ (wobei t: $\operatorname{Spec}(\bar{k}) \to T$ ein geometrischer Punkt ist) sind die Elemente der Familie.
Ist $\mathscr{F}$ eine $\mathcal{O}_V$-Modulgarbe, so bezeichnen wir mit $\mathscr{F}_t$ die $\mathcal{O}_{V_t}$-Modulgarbe $\mathscr{F} \otimes_T \bar{k} = (1 \times t)^* \mathscr{F}$; allgemeiner sei für jeden Morphismus $h: S \to T$ mit $\mathscr{F}_S$ die Garbe $F \otimes_T \mathcal{O}_S = (1 \times h)^* \mathscr{F}$ auf $V_S = V \times_T S$ bezeichnet, mit p_S die Projektion $V_S \to S$. Es interessiert das Verhalten der Kohomologie $H^*(V_t, \mathscr{F}_t)$ bei variablem t; die diesbezüglichen Resultate stammen von Grothendieck (vgl. [2], Kap. III, § 7), für den analytischen Fall von Grauert.
Eine leichter zugängliche Darstellung findet man bei Mumford [5], Lecture 7, und [6], § 5. Generell werde $\mathscr{F}$ als T-flache kohärente Garbe auf V vorausgesetzt, ferner sei $V \to T$ eigentlich und T Noethersch. Dann sind die folgenden Resultate (1) bis (4) die grundlegenden Fakten über Basiswechsel:

(1) $R^q p_* \mathscr{F}$ ist eine kohärente Garbe auf T; für jedes T-Schema $S \to T$ gibt es einen kanonischen Morphismus („Basiswechsel")

$$(R^q p_* \mathscr{F})_S \to R^q (p_S)_* (\mathscr{F}_S)$$

(induziert kozyklenweise durch die Abbildungen $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}_S(U_S)$ für offene $U \subset V$ oder auf Grund der Theorie der δ-Funktoren).
Insbesondere erhält man für $t \in T$ Morphismen

$$(R^q p_* \mathscr{F}) \otimes k(t) \to H^q(V_t, \mathscr{F}_t).$$

(2) Für gegebenes $q \in \mathbf{Z}$ gilt: Die Menge T_q aller $t \in T$, so daß

$$R^q p_* \mathscr{F} \otimes k(t) \to H^q(V_t, \mathscr{F}_t)$$

surjektiv ist, ist offen. Für jeden beliebigen Morphismus g: $S \to T$ mit $g(S) \subseteq T_q$ ist dann

$$(R^q p_* \mathscr{F})_S \to R^q (p_S)_* (\mathscr{F}_S)$$

ein Isomorphismus.

(3) Auf dem offenen Unterschema $T_q \cap T_{q-1}$ (d. h., wenn

$$R^j p_* \mathscr{F} \otimes k(t) \to H^j(V_t, \mathscr{F}_t)$$

surjektiv für $j = q - 1$ und q ist) ist $R^q p_* \mathscr{F}$ lokal frei, und $T_q \cap T_{q-1}$ ist als Teilmenge von T_q dadurch charakterisiert.

Die Aussagen (2) und (3) erhält man, indem man zeigt, daß man den Komplex $C^*(U, \mathscr{F})$ der alternierenden Čechschen Koketten bezüglich einer affinen Zariski-offenen Überdeckung $\{U \to V\}$ (wobei wir o. B. d. A. $T = \operatorname{Spec}(A)$ als affin annehmen können) durch einen endlichen projektiven Komplex $K^\bullet = (K^0 \to K^1 \to \cdots \to K^n)$ ersetzen kann, so daß für jedes affine T-Schema $S = \operatorname{Spec}(B) \to T$

$$H^*(V_S, \mathscr{F}_S) = H^p(K^\bullet \otimes_A B)$$

gilt (vgl. Mumford [6], § 5). Hieraus folgt weiterhin unmittelbar

(4) a) Die Funktion $t \mapsto h^q(\mathscr{F}_t) = \dim H^q(V_t, \mathscr{F}_t)$ ist halbstetig in dem Sinne, daß $\{t \mid h^q(\mathscr{F}_t) \leqq r$ für alle $r \in \mathbf{Z}\}$ in T offen ist.

b) Die Funktion $t \mapsto \chi(\mathscr{F}_t) = \sum_{q \geqq 0} (-1)^q h^q(\mathscr{F}_t)$ ist stetig auf T.

(5) Das offene Unterschema $T'_q = \{t \mid h^{q+1}(\mathscr{F}_t) = 0\}$ ist in T_q enthalten, und es ist

$$T'_q \subseteq T - \bigcup_{j>q} \operatorname{supp} R^j p_* \mathscr{F}.$$

Beweis. Es ist $T'_q \subseteq T_{q+1}$, und daher ist auf T'_q nach (2) und dem Lemma von Nakayama $R^{q+1}p_*\mathscr{F} = 0$, also lokal frei. Nach (3) ist $T_{q+1} \cap T_q$ die Teilmenge von T_{q+1}, auf der $R^{q+1}p_*\mathscr{F}$ lokal frei ist. Also ist $T'_q \subseteq T_{q+1} \cap T_q \subseteq T_q$. Für $n \gg 0$ ist $H^{n+1}(V_t, \mathscr{F}_t) = 0$ für alle t, also $T = T'_n \subseteq T_n$ (und somit $H^n(V_t, \mathscr{F}_t) = 0$), also $T = T'_{n-1} \subseteq T_{n-1}$ usw.

(6) Ist T reduziert und irreduzibel, so ist die Funktion $t \mapsto h^q(\mathscr{F}_t)$ genau dann konstant, wenn $T = T_q$ und $R^q p_* \mathscr{F}$ lokal frei ist. In diesem Fall ist $T_{q-1} = T$.

Beweis. Es sei $t \mapsto h^q(\mathscr{F}_t)$ konstant; aus $T = T_q$ folgt dann (nach (2) und dem Lemma von Nakayama) leicht, daß $R^q p_* \mathscr{F}$ lokal frei vom Rang $h^q(\mathscr{F}_t)$ ist.

Wir wollen daher zeigen, daß $T = T_q$ gilt. Offensichtlich ist T_q nicht leer, da der allgemeine Punkt von T darin enthalten ist. Wir können durch Lokalisierung annehmen, daß T Spektrum eines lokalen Ringes A ist und $T_q \subseteq T$ das punktierte Spektrum $\operatorname{Spec}(A) - \{\mathfrak{m}_A\}$ enthält. Der lokale Ring A wird durch einen diskreten Bewertungsring B dominiert. Ist k (bzw. k') der Restklassenkörper von A (bzw. B), u ein Primelement von B, so ist folgendes Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} [H^q(V, \mathscr{F}) \otimes_A k] \otimes_k k' & \longrightarrow & H^q(V, \mathscr{F}/\mathfrak{m}_A \mathscr{F}) \otimes_k k' \\ \downarrow & & \downarrow \wr \\ H^q(V_B, \mathscr{F}_B) \otimes_B k' & \longrightarrow & H^q(V_B, \mathscr{F}_B/u\mathscr{F}_B) \end{array}$$

Um zu zeigen, daß $T_q = T$, d. h. $\mathfrak{m}_A \in T_q$, ist, genügt es offensichtlich, daß der untere Pfeil surjektiv ist. Aus der exakten Folge

$$0 \to \mathscr{F}_B \to \mathscr{F}_B \to \mathscr{F}_B/u\mathscr{F}_B \to 0 \qquad (*)$$

erhalten wir

$$H^q(V_B, \mathscr{F}_B) \otimes_B k' \subseteq H^q(V_B, \mathscr{F}_B/u\mathscr{F}_B),$$

und weil $h^q(\mathscr{F}_t)$ konstant ist, muß somit

$$H^q(V_B, \mathscr{F}_B) \otimes_B k' \cong H^q(V_B, \mathscr{F}_B/u\mathscr{F}_B)$$

sein, woraus $T = T_q$ folgt. Insbesondere ist dann $H^q(V_B, \mathscr{F}_B)$ frei, und aus $(*)$ folgt

$$H^{q-1}(V_B, \mathscr{F}_B) \otimes_B k' \cong H^{q-1}(V_B, \mathscr{F}_B/u\mathscr{F}_B)$$

und analog wie oben $T = T_{q-1}$, q. e. d.

(7) („See-saw-Theorem"; vgl. Mumford [6], § 10.) Ist $V \xrightarrow{p} S$ eigentlich und flach, $\mathscr{L}$ eine umkehrbare Garbe auf V, so gibt es ein abgeschlossenes Unterschema $Z \subset T$, das durch folgende Eigenschaften eindeutig charakterisiert ist:

a) $\mathscr{L}_Z$ ist von der Form $p_Z^*\mathscr{M}$, $\mathscr{M}$ eine umkehrbare Garbe auf Z.

b) Ist $S \to T$ derart, daß $\mathscr{L}_S$ von der Form $p_S^*\mathscr{N}$ ist, $\mathscr{N}$ eine umkehrbare Garbe auf S, so zerlegt sich $S \to T$ in $S \to Z \supset T$.

Die Z zugrunde liegende Punktmenge besteht also aus allen Punkten $t \in T$, in denen $\mathscr{L}_t$ trivial ist.

2. Dualität für Kohomologie quasikohärenter Garben

Im folgenden sei k ein fester Grundkörper, $\mathbf{P}^n$ der n-dimensionale projektive Raum über k und

$$\omega_{\mathbf{P}^n} = \Omega^1_{\mathbf{P}^n/k} \cong \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}.$$

Ist X ein beliebiges projektives Schema, sind $r > q$ natürliche Zahlen und ist ω eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe, so liefert die Yonedainterpretation von Ext eine bilineare Abbildung

$$H^q(X, \mathscr{F}) \otimes \mathscr{E}xt^{r-q}_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{F}, \omega) \xrightarrow{Y} H^r(X, \omega). \qquad (*)$$

Für $X = \mathbf{P}^r$, $\omega = \omega_{\mathbf{P}^r}$, ist das nach Resultaten von J.-P. Serre[1]) eine vollständige Paarung (und $H^r(\mathbf{P}^r, \omega_{\mathbf{P}^r}) \cong k$).

Für ein r-dimensionales abgeschlossenes Cohen-Macaulaysches Unterschema $X \subset \mathbf{P}^n$ sei

$$\omega_X := \mathscr{E}xt^{n-r}_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}}(\mathcal{O}_X, \omega_{\mathbf{P}^n});$$

dann gibt es einen kanonischen Morphismus

$$H^r(X, \omega_X) \xrightarrow{i} H^n(\mathbf{P}^n, \omega_{\mathbf{P}^n}),$$

der sich aus der Spektralfolge

$$E_2^{ij} := H^i\big(\mathbf{P}^n, \mathscr{E}xt^j(\mathcal{O}_X, \omega_{\mathbf{P}^n})\big) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{i+j}_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}}(\mathcal{O}_X, \omega_{\mathbf{P}^n})$$

und der durch

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}}(\mathcal{O}_X, \omega_{\mathbf{P}^n}) \otimes H^0(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{Y} H^n(\mathbf{P}^n, \omega_{\mathbf{P}^n})$$

---

[1]) J.-P. Serre, Faisceaux algébriques cohérents. Ann. Math. *61* (1955), 197–278.

induzierten Abbildung $e \mapsto Y(e \otimes 1)$ von

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}}(\mathcal{O}_X, \omega_{\mathbf{P}^n}) \to H^n(\mathbf{P}^n, \omega_{\mathbf{P}^n})$$

ergibt, da $E_2^{ij} = 0$ für $j < n - r$, also

$$E_2^{r,n-r} \twoheadrightarrow E_\infty^{r,n-r} \subseteq \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}}(\mathcal{O}_X, \omega_{\mathbf{P}^n})$$

gilt. Das liefert nach (*) mit $\omega = \omega_X$ eine Paarung $i \circ Y$:

$$H^q(X, \mathcal{F}) \otimes \mathrm{Ext}^{r-q}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \omega_X) \to H^n(\mathbf{P}^n, \omega_{\mathbf{P}^n}), \tag{**}$$

und es gilt folgender

Satz (Grothendieck [3]). *Ist $X \in \mathbf{P}^n$ rein r-dimensional und Cohen-Macaulaysch, so ist für alle $q \in \mathbf{Z}$ die Paarung (**) nicht ausgeartet.*

Beweis. Es gilt

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}\big(\mathcal{F}, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}}(\mathcal{O}_X, -)\big) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}}(\mathcal{F}, -)$$

auf der Kategorie der $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}$-Moduln. Die zu diesen Funktoren gehörige Spektralfolge ist

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_X}\big(\mathcal{F}, \mathcal{E}xt^j_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}}(\mathcal{O}_X, -)\big) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{i+j}_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}}(\mathcal{F}, -).$$

Ist $\mathcal{O}_X$ Cohen-Macaulaysch, so ist $dh_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}}(\mathcal{O}_X) = n - r$, also

$$\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}}(\mathcal{O}_X, \omega_{\mathbf{P}^n}) = 0$$

für $j \neq n - r$, also

$$\mathrm{Ext}^{r-q}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \omega_X) = \mathrm{Ext}^{r-q+n-r}_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}}(\mathcal{F}, \omega_{\mathbf{P}^n}) = \mathrm{Ext}^{n-q}_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}}(\mathcal{F}, \omega_{\mathbf{P}^n}),$$

und die Behauptung ist damit auf den Serreschen Dualitätssatz für $\mathbf{P}^n$ reduziert, q. e. d.

3. Verschwindungssätze

Zur Konstruktion des Hilbertschemas ist es günstig, nach einer Idee aus Mumford [5], Lecture 14, zunächst einige Verschwindungssätze zu verallgemeinern.
Es sei k ein Körper, $\mathbf{P}^n = \mathrm{Proj}\, \mathbf{Z}\, [T_0, \ldots, T_n]$, $\mathbf{P}^n_k = \mathbf{P}^n \times \mathrm{Spec}\,(k)$ und S ein über k algebraisches Schema.

Definition. Eine kohärente Garbe $\mathcal{F}$ auf $\mathbf{P}^n_k$ heißt *m-regulär*, falls

$$H^i\big(\mathbf{P}_k, \mathcal{F}(m - i)\big) = (0)$$

für alle $i > 0$ gilt. Eine Familie $\mathcal{F}$ von kohärenten Garben auf $\mathbf{P}^n_k$ über S (d. h. eine kohärente Garbe $\mathcal{F}$ auf $\mathbf{P}^n_k \times_k S = \mathbf{P}^n \times S$ heißt *m-regulär*, falls $\mathcal{F}_\xi = (1 \times \xi)^* \mathcal{F}$ für jeden geometrischen Punkt $\xi \in S(\bar{k})$ m-regulär ist.

Satz 1. *Es sei $\mathscr{F}$ eine kohärente m-reguläre Garbe auf $\mathbf{P}^n \times S$ und p die Projektion von $\mathbf{P}^n \times S$ auf den zweiten Faktor. Dann gilt:*

a) $R^i p_* \mathscr{F}(k - i) = 0$ *für* $k \geqq m,\ i > 0$
(folglich ist $\mathscr{F}$ auch k-regulär für $k \geqq m$).

b) $\sum\limits_{\nu=0}^{n} T_\nu p_* \mathscr{F}(m) = p_* \mathscr{F}(m + 1)$
(folglich ist $\bigoplus\limits_{k\geq m} p_* \mathscr{F}(k)$ durch $p_* \mathscr{F}(m)$ über $\mathbf{Z}[T_0, \ldots, T_n]$ erzeugt).

Beweis. Basiswechsel führt dazu, daß folgendes zu beweisen ist. Es sei $S = \operatorname{Spec}(k)$ und $\mathscr{F}$ kohärente m-reguläre Garbe auf $\mathbf{P}_k^n = \operatorname{Proj} k[T_0, \ldots, T_n]$. Dann gilt

a') $H^i(\mathscr{F}(k - i))$ für $k \geqq m,\ i > 0$.

b') $\sum\limits_{\nu=0}^{n} T_\nu H^0(\mathscr{F}(m)) = H^0(\mathscr{F}(m + 1))$.

Wir werden den Beweis durch Induktion über n führen.
Für $n = 0$ sind a') und b') offensichtlich. Wir nehmen daher an, daß a') und b') für $n - 1$ erfüllt sind.
Es sei h Linearform aus $k[T_0, \ldots, T_n]$, so daß $h \notin \mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(\mathscr{F})$ gilt. H sei die entsprechende Hyperebene in $\mathbf{P}_k^n$. Dann ist $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^n}(1) \cong \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^n}(H)$, und die Folge

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^n}(-1) \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^n} \to \mathcal{O}_H \to 0$$

ist exakt. Da H durch h definiert und $H \cap \operatorname{Ass}(\mathscr{F}) = \emptyset$ ist, ist der Morphismus $\mathscr{F} \xrightarrow{\otimes h} \mathscr{F}(1) = \mathscr{F} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^n}(1)$ bzw. $\mathscr{F}(k - 1) \xrightarrow{\otimes h} \mathscr{F}(k)$ injektiv. Daher erhalten wir durch Tensorierung der obigen Sequenz mit $\mathscr{F}(k)$ die exakte Sequenz

$$0 \to \mathscr{F}(k - 1) \to \mathscr{F}(k) \to \mathcal{O}_H \otimes \mathscr{F}(k) = \mathscr{F}_H(k) \to 0. \tag{1}$$

Daraus gewinnen wir die exakten Folgen

$$H^i(\mathscr{F}(k)) \to H^i(\mathscr{F}_H(k)) \to H^{i+1}(\mathscr{F}(k - 1)).$$

Wir können daraus schließen, daß auch $\mathscr{F}_H$ m-regulär ist. Wegen $H \cong \mathbf{P}_k^{n-1}$ trifft für $\mathscr{F}_H$ die Induktionsvoraussetzung zu. Daher ist in der Sequenz

$$H^{i+1}(\mathscr{F}(m - i - 1)) \to H^{i+1}(\mathscr{F}(m - i)) \to H^{i+1}(\mathscr{F}_H(m - i)),$$

die wir aus (1) gewinnen, neben der ersten Gruppe auch die letzte Gruppe gleich Null. Damit ist $\mathscr{F}$ als $(m + 1)$-regulär nachgewiesen. Damit ergibt eine iterative Anwendung der eben benutzten Methode die Richtigkeit von a').
Wegen der Induktionsvoraussetzung b') für $\mathscr{F}_H$ ist im folgenden kommutativen Diagramm τ surjektiv:

$$\begin{tikzcd}
\sum\limits_{\nu=0}^{n} T_\nu H^0(\mathscr{F}(m)) \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[d, "\mu"] & & \sum\limits_{\nu=0}^{n} T_\nu H^0(\mathscr{F}_H(m)) \arrow[d, "\tau"] \\
H^0(\mathscr{F}(m)) \arrow[r, "\otimes h"] & H^0(\mathscr{F}(m + 1)) \arrow[r, "\nu"] & H^0(\mathscr{F}_H(m + 1))
\end{tikzcd}$$

Wegen $H^1(\mathscr{F}(m - 1)) = 0$ ist aber auch σ surjektiv. Daher ist

$$\nu(\operatorname{Im}(\mu)) = H^0(\mathscr{F}_H(m + 1)),$$

bzw. $H^0(\mathscr{F}(m+1))$ wird von $hH^0(\mathscr{F}(m))$ und von $\mathrm{Im}(\mu)$ erzeugt. Es ist aber $hH^0(\mathscr{F}(m)) \subseteq \mathrm{Im}(\mu)$. Damit ist also

$$\sum_{\nu=0}^{n} T_\nu H^0(\mathscr{F}(m)) = H^0(\mathscr{F}(m+1))$$

gezeigt, q. e. d.

Bemerkung. Es sei $0 \to \mathscr{G} \to \mathscr{E} \to \mathscr{F} \to 0$ eine exakte Folge von kohärenten flachen Garben über $\mathbf{P}^n \times S$ und $\mathscr{G}$ m-regulär. Dann ergibt sich unmittelbar aus der abgeleiteten Kohomologiesequenz, daß $\mathscr{E}$ genau dann m-regulär ist, wenn $\mathscr{F}$ m-regulär ist.

Satz 2. *Es seien $\mathscr{F}$ und $\mathscr{E}$ kohärente S-flache Garben auf $\mathbf{P}^n \times S$ und $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{E}$. Weiterhin seien $a_0, \ldots, a_n$ durch das Hilbertpolynom*

$$\chi(\mathscr{F}(m)) = \sum a_j \binom{m+j}{j}$$

von $\mathscr{F}$ bestimmt. Es existiert ein Polynom $F(t_0, \ldots, t_n) \in \mathbf{Q}[t_0, \ldots, t_n]$, unabhängig von $\mathscr{F}$, so daß $\mathscr{F}$ m-regulär für $m \geqq F(a_0, \ldots, a_n)$ ist.

Beweis. Basiswechsel führt wieder dazu, daß der Satz für $S = \mathrm{Spec}\,(k)$ zu beweisen ist. Der Beweis wird durch vollständige Induktion geführt. Da für $n = 0$ alles offensichtlich ist, können wir annehmen, daß Satz 2 für $n - 1$ richtig ist.
Um die Reduktion von n auf $n - 1$ durchführen zu können, suchen wir wieder eine geeignete Hyperebene H $(\cong \mathbf{P}_k^{n-1})$ in $\mathbf{P}_k^n$. Da für eine kohärente Garbe $\mathscr{M}$ die Menge $\mathrm{Ass}\,\mathscr{M}$ endlich ist, ist also auch $\mathrm{Ass}\,(\mathscr{E}) \cup \mathrm{Ass}\,(\mathscr{E}/\mathscr{F})$ endlich, und daher gibt es eine Hyperebene H mit $H \cap \mathrm{Ass}\,(\mathscr{E}) \cup (\mathrm{Ass}\,(\mathscr{E}/\mathscr{F})) = \emptyset$. Es sei $\mathscr{F}_H := \mathscr{F} \otimes \mathcal{O}_H$, $\mathscr{E}_H := \mathscr{E} \otimes \mathcal{O}_H$ und H durch die Linearform $h \in k\,[T_0, \ldots, T_n]$ definiert.
Aus

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^n}(-1) \xrightarrow{\otimes h} \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^n} \to \mathcal{O}_H \to 0 \tag{1}$$

folgt $\mathrm{Tor}_1^{\mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^n}}(\mathcal{O}_H, \mathscr{E}/\mathscr{F}) = 0$, da wegen der obigen Wahl von H bzw. h gerade erreicht wird, daß h kein Nullteiler in $\mathscr{F}$ bzw. $\mathscr{E}/\mathscr{F}$ ist. Damit folgt aus

$$0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{E} \to \mathscr{E}/\mathscr{F} \to 0$$

durch Tensorierung mit $\mathcal{O}_H$, daß $\mathscr{F}_H$ kohärente Untergarbe von $\mathscr{E}_H$ ist. Aus (1) ergeben sich wieder wie beim Beweis von Satz 1 für jedes m die exakten Folgen

$$0 \to \mathscr{F}(m) \to \mathscr{F}(m+1) \to \mathscr{F}_H(m+1) \to 0. \tag{2}$$

Damit ist

$$\chi(\mathscr{F}_H(m+1)) = \chi(\mathscr{F}(m+1)) - \chi(\mathscr{F}(m))$$
$$= \sum_{i=0}^{n} a_i \left[\binom{m+i+1}{i} - \binom{m+i}{i}\right] = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} \binom{m+i}{i},$$

und nach Induktionsvoraussetzung existiert ein Polynom G, unabhängig von $\mathscr{F}_H$, so daß die kohärente Untergarbe $\mathscr{F}_H$ von $\mathscr{E}_H$ $G(a_1, \ldots, a_n)$-regulär ist. Wir setzen $m_1 = G(a_1, \ldots, a_n)$. Dann ergibt sich aus (2) für $m \geqq m_1 - 2$

$$0 \to H^0(\mathscr{F}(m)) \to H^0(\mathscr{F}(m+1)) \xrightarrow{l_{m+1}} H^0(\mathscr{F}_H(m+1))$$
$$\to H^1(\mathscr{F}(m)) \to H^1(\mathscr{F}(m+1)) \to 0 \tag{3}$$

bzw. für $i \geqq 2$ und $m \geqq m_1 - 1$

$$0 \to H^i\bigl(\mathscr{F}(m)\bigr) \to H^i\bigl(\mathscr{F}(m+1)\bigr) \to 0. \tag{4}$$

Aus (4) folgt $H^i\bigl(\mathscr{F}(m-i)\bigr) = 0$ für $i \geqq 2$, da ja nach einem Theorem von SERRE $H^i\bigl(\mathscr{F}(m)\bigr) = 0$ für $m \gg 0$ und $i \geqq 1$ ist. Das bedeutet, daß bezüglich $H^2, H^3, \ldots$ die Garbe $\mathscr{F}$ m_1-regulär ist. Daher haben wir jetzt H^1 zu untersuchen. Da es nach (3) einen surjektiven Morphismus $H^1\bigl(\mathscr{F}(m)\bigr) \to H^1\bigl(\mathscr{F}(m+1)\bigr)$ gibt, ist

$$\dim H^1\bigl(\mathscr{F}(m)\bigr) \geqq \dim H^1\bigl(\mathscr{F}(m+1)\bigr). \tag{5}$$

Es sei $m_2 := m_1 + \dim H^1\bigl(\mathscr{F}(m_1 - 1)\bigr)$, und wir behaupten, daß $\mathscr{F}$ m_2-regulär ist. Da nach dem Obigen $H^i\bigl(\mathscr{F}(m_2 - i)\bigr) = 0$ ist für $i \geqq 2$, ist noch $H^1\bigl(\mathscr{F}(m_2 - 1)\bigr) = 0$ zu zeigen. Das folgt aber aus dem folgenden Sachverhalt: In (5) kann das Gleichheitszeichen genau dann gelten, wenn $\dim H^1\bigl(\mathscr{F}(m)\bigr) = 0$ ist.

Beweis. Da $H^1\bigl(\mathscr{F}(m)\bigr) = 0$ ist für $m \gg 0$, genügt es zu zeigen, daß aus $\dim H^1\bigl(\mathscr{F}(m)\bigr) = \dim H^1\bigl(\mathscr{F}(m+1)\bigr)$

$$\dim H^1\bigl(\mathscr{F}(m+1)\bigr) = \dim H^1\bigl(\mathscr{F}(m+2)\bigr)$$

folgt. Aus (3) folgt aber, daß $\dim H^1\bigl(\mathscr{F}(m)\bigr) = \dim H^1\bigl(\mathscr{F}(m+1)\bigr)$ für $m > m_1 - 2$ genau dann gilt, wenn l_{m+1} surjektiv ist. Damit ist also zu zeigen, daß l_{m+2} surjektiv ist, falls l_{m+1} surjektiv ist.
Dazu betrachten wir das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
H^0\bigl(\mathscr{F}(m+1)\bigr) \otimes H^0\bigl(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^n}(1)\bigr) \arrow[r] \arrow[d, "p"] & H^0\bigl(\mathscr{F}(m+2)\bigr) \arrow[d, "l_{m+2}"] \\
H^0\bigl(\mathscr{F}_H(m+1)\bigr) \otimes H^0\bigl(\mathcal{O}_H(1)\bigr) \arrow[r, "q"] & H^0\bigl(\mathscr{F}_H(m+2)\bigr)
\end{tikzcd}$$

q ist surjektiv infolge der Induktionsvoraussetzung für $\mathscr{F}_H$ (und Satz 1), und p ist surjektiv, da l_{m+1} surjektiv vorausgesetzt wurde. Daher ist $q \circ p$ surjektiv und deshalb auch l_{m+2}.
Damit haben wir gezeigt, daß $\mathscr{F}$ $\bigl(m_1 + \dim H^1(\mathscr{F}(m_1 - 1))\bigr)$-regulär ist. Wegen $m_1 = G(a_1, \ldots, a_n)$ genügt es jetzt zum vollständigen Beweis von Satz 2, $H^1\bigl(\mathscr{F}(m_1 - 1)\bigr)$ durch den Wert eines entsprechenden Polynoms H an der Stelle $(a_0, \ldots, a_n, m_1)$ abzuschätzen:

$$\begin{aligned}
\dim H^1\bigl(\mathscr{F}(m_1 - 1)\bigr) &= \dim H^0\bigl(\mathscr{F}(m_1 - 1)\bigr) - \chi\bigl(\mathscr{F}(m_1 - 1)\bigr) \\
&\leqq \dim H^0\bigl(\mathscr{E}(m_1 - 1)\bigr) - \chi\bigl(\mathscr{F}(m_1 - 1)\bigr) \\
&\leqq H(a_0, \ldots, a_n, m_1) = H\bigl(a_0, \ldots, a_n, G(a_1, \ldots, a_n)\bigr).
\end{aligned}$$

Damit hat also das Polynom

$$F(t_0, \ldots, t_n) = G(t_1, \ldots, t_n) + H\bigl(t_0, \ldots, t_n, G(t_1, \ldots, t_n)\bigr)$$

die im Satz geforderten Eigenschaften.

Zum Abschluß dieses Abschnitts erwähnen wir den Verschwindungssatz von KODAIRA:

Satz. *Es sei X eine singularitätenfreie algebraische Mannigfaltigkeit über dem Körper der komplexen Zahlen $\mathbf{C}$ und $\mathscr{L}^{-1}$ ein amples Linienbündel. Dann gilt $H^q(X, \Omega^p \otimes \mathscr{L}) = (0)$ für $p + q < \dim X$ (dabei ist Ω^p die Garbe der p-Differentialformen auf X).*

Beweis. Wir führen den Beweis mit vollständiger Induktion über die Dimension von X. Ist X eine Kurve, so ist der Satz klar (es kommt dabei ja nur darauf an zu zeigen, daß $H^0(X, \mathscr{L}) = (0)$ ist. Wir nehmen zunächst einmal an, daß $\mathscr{L}^{-1}$ „very ample" ist. Dann existiert ein effektiver und nichtsingulärer Divisor D mit $\mathcal{O}_X(D) = \mathscr{L}^{-1}$. Nach dem Satz von BERTINI können wir annehmen, daß D irreduzibel ist. Für $\mathscr{L}' := \mathscr{L} \otimes \mathcal{O}_D$ gilt dann $H^p(D, \Omega^p \otimes \mathscr{L}') = (0)$ für $p + q < \dim X - 1$ (Induktionsvoraussetzung). Wir betrachten nun die exakten Sequenzen

$$0 \to \mathscr{L} \otimes \Omega^q_X \to \Omega^q_X \to \Omega^q_X \otimes \mathcal{O}_D \to 0, \tag{1}$$

$$0 \to \mathscr{L}' \to \Omega_X \otimes \mathcal{O}_D \to \Omega_D \to 0. \tag{2}$$

Aus der zweiten erhalten wir

$$0 \to \Omega^{q-1}_D \otimes \mathscr{L}' \to \Omega^q_X \otimes \mathcal{O}_D \to \Omega^q_D \to 0. \tag{3}$$

Aus (1) und (3) erhalten wir die exakte Kohomologiesequenz

$$\begin{tikzcd}
 & & H^p(D, \Omega^q_D) \\
H^p(X, \mathscr{L} \otimes \Omega^q_X) \arrow[r] & H^p(X, \Omega^q_X) \arrow[ur, "g_p"] \arrow[r, "h_p"] & H^p(D, \Omega^q_X \otimes \mathcal{O}_D) \arrow[u, "a_p"'] \\
 & & H^p(D, \Omega^{q-1}_D \otimes \mathscr{L}') \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

dabei ist g_p die durch die Einschränkung induzierte kanonische Abbildung. Nach Induktionsvoraussetzung ist a_p Isomorphismus für $p + q < \dim X - 1$ und injektiv für $p + q = \dim X - 1$. Aus der exakten Sequenz folgt die Behauptung, wenn wir nachweisen können, daß g_p auch Isomorphismus für $p + q = \dim X - 1$ und injektiv für $p + q = \dim X - 1$ ist.
Während bisher der Beweis rein algebraisch verlief, benutzen wir nun transzendente Hilfsmittel.

(1) Satz von LEFSCHETZ über Hyperebenenschnitte: *Es seien X, D wie zuvor; dann ist die kanonische Abbildung*

$$H^i(X, \mathbf{C}) \to H^i(D, \mathbf{C})$$

ein Isomorphismus für $i < n - 1$ und injektiv für $i = n - 1$.

(2) Hodge-Zerlegung:

$$H^i(X, \mathbf{C}) \cong \bigoplus_{p+q=i} H^p(X, \Omega^q_X).$$

(1) und (2) liefern nun genau die Bedingungen für g_p.

Es bleibt nun noch zu zeigen, daß wir uns stets an den Fall einer „very amplen" Garbe beschränken können. Es sei nun n eine natürliche Zahl, so daß $\mathscr{L}^{-n}$ „very ample" ist. Dann existiert eine n-fach zyklische Überlagerung $X' \xrightarrow{r} X$, so daß $r^*\mathscr{L}^{-1}$ „very ample" ist. Dann ist

$$H^p(X', \Omega^q_{X'} \otimes r^*\mathscr{L}) \cong H^p(X, r_*\Omega^q_{X'} \otimes \mathscr{L}),$$

weil r ein endlicher Morphismus ist. Nun hat die kanonische Abbildung $\Omega^q_X \to r_*\Omega^q_{X'}$ einen Schnitt, nämlich $\frac{1}{n}\cdot$ Spur. Somit ist $H^p(X, \Omega^q_X \otimes \mathscr{L})$ in $H^p(X, r_*\Omega^q_{X'} \otimes \mathscr{L})$ enthalten, q. e. d.

Der Satz läßt sich nicht für den Fall eines Grundkörpers der Charakteristik $p \neq 0$ verallgemeinern. So hat beispielsweise Mumford[1]) ein Beispiel dafür angegeben, in dem mit unseren Bezeichnungen $H^1(X, \mathscr{L})$ von Null verschieden ist (X ist eine Fläche). Das liegt daran, daß der Frobeniusendomorphismus auf $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ nicht injektiv zu sein braucht. Es wäre interessant, Bedingungen dafür zu finden, daß der Satz über Körpern mit der Charakteristik p gilt. So kann man sich überlegen, daß für den Fall einer Fläche vom allgemeinen Typ genau dann $H^0(X, \Theta) = H^0(X, \Omega_X \otimes \omega_X^{-1}) = 0$ ist, wenn die Abbildung $H^0(X, \Omega_X) \to H^0(D, \Omega_D)$ injektiv ist (dabei sei $\omega_X = \mathcal{O}_X(D)$ der kanonische Divisor auf X, den wir hier als „very ample" voraussetzen). Es bleibt jedoch offen, für welche Flächen diese Bedingung nicht erfüllt ist.

4. Hilbertschema

Wir wollen das vor uns stehende Problem an Hand des affinen Falls erklären.

Es sei $S = \operatorname{Spec} A$, $\operatorname{Proj} A[T_0, \ldots, T_n] = \mathbf{P}^n \times S$ der projektive Raum über S und $P(t) \in \mathbf{Z}[t]$, so daß $P(m) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \binom{m+\nu}{\nu}$ für $m \in \mathbf{Z}$ ist, wobei die $a_\nu \in \mathbf{Z}$ sind und $a_n > 0$ ist.

Wir betrachten den Funktor $Q^P = Q$ aus der Kategorie der S-Schemata in die Kategorie der Mengen (N sei eine feste natürliche Zahl):

$$S' \mapsto \{\mathscr{G} \subseteq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n\times S'} \mid \mathscr{F} = \mathcal{O}^{N+1}_{\mathbf{P}^n\times S'}/\mathscr{G} \text{ ist } S'\text{-flach und besitzt das Hilbertpolynom } P\}.$$

Dabei soll also $\chi(\mathscr{F}_\xi(r)) = P(r)$ für die betrachteten Quotientengarben für alle $r \geqq 0$ und für alle geometrischen Punkte ξ von S' gelten. Da $\mathscr{F}$ S'-flach ist, ist $\chi(\mathscr{F}_\xi(r))$ auch tatsächlich unabhängig von dem betrachteten geometrischen Punkt ξ.

Wir fragen nun, ob der Funktor Q darstellbar ist, d. h, wir suchen ein S-Schema $H^P = H$ und eine universelle Untergarbe $\mathscr{N} \subseteq \mathcal{O}^{N+1}_{\mathbf{P}^n\times H}$; $\mathcal{O}^{N+1}_{\mathbf{P}^n\times H}/\mathscr{N}$ ist flach über H, so daß der Morphismus

$$\operatorname{Hom}_S(T, H) \to Q(T),$$
$$\varphi\colon T \to H \mapsto \varphi^*(\mathscr{N}) = \mathscr{N} \otimes_{\mathcal{O}_H} \mathcal{O}_T$$

bijektiv und funktoriell in den S-Schemata T ist. Die Idee für die Konstruktion eines den Funktor Q darstellenden Schemas ist die folgende. Es sei $\mathscr{G} \in Q(S)$. Dann ist $\mathscr{G}$ Untergarbe von $\mathcal{O}^{N+1}_{\mathbf{P}^n\times S} = A[T_0, \ldots, T_n]^{N+1\sim}$ und hat daher die Form $\mathscr{G} = I^\sim$, wobei I homogener Untermodul in $A[T_0, \ldots, T_n]^{N+1} = H$ ist. Wir bezeichnen mit $I(r)$ bzw. $H(r)$ die Formen vom Grad r aus I bzw. H. Dann ist $H(r)/T(r)$ für hinreichend großes r frei vom Rang $P(r)$. Wesentlich ist nun, daß man ein numerisches Polynom F konstruieren kann, so daß $H/I^\sim$ m-regulär ist, $m = F(a_0, \ldots, a_n)$, wobei $a_0, \ldots, a_n$ die Koeffizienten des Hilbertpolynoms sind. Daraus folgt, daß für alle homogenen Untermoduln I, für die $I^\sim \in Q(S)$ gilt, der Modul $H(r)/I(r)$ frei vom Rang $P(r)$ für $r \geqq m$ ist. Dadurch können wir, indem wir dem Paar $(I(m) \subset H(m))$ die Plückerkoordinaten zuordnen, $\mathscr{G} \in Q(S)$ auf einen Punkt der Graßmannschen

[1]) D. Mumford, Pathologies III. Amer. J. Math. *89* (1967), 94—104. Die Fläche ist allerdings nicht singularitätenfrei.

Mannigfaltigkeit Grass $(P(m), H(m))$ abbilden und haben damit eine injektive Abbildung $\varphi_S\colon Q(S) \to \text{Grass}\,(P(m), H(m)) := G(S)$ erhalten (G bezeichnet hierbei das Graßmannschema). G ist ein projektives Schema, und um die Darstellbarkeit von Q nachzuweisen, genügt es zu zeigen, daß durch die φ_S eine abgeschlossene Einbettung φ von Q in G induziert wird.

Es sei p ein Punkt von G. Dann entspricht p einer Inklusion $I(m) \subseteq H(m)$, wobei $\dim\,(H(m)/I(m)) = P(m)$ gilt. Mit I_* werde das von $I(m)$ in H erzeugte homogene Ideal bezeichnet. Dann besteht also das Problem darin, algebraische Bedingungen dafür anzugeben, daß

1. $(H/I_*)^\sim$ flach über A ist und
2. $(H/I_*)^\sim$ das Hilbertpolynom P besitzt.

Satz. *Der Funktor Q ist durch ein projektives Schema, das wieder mit Q bezeichnet werden soll, und eine Q-flache Quotientengarbe $\mathscr{F}_Q = \mathcal{O}^{N+1}_{\mathbf{P}^n\times Q}/\mathscr{G}_Q$ mit dem Hilbertpolynom P darstellbar.*

Beweis. Es sei $\mathscr{G} \in Q(S)$. Wir betrachten die Sequenz

$$0 \to \mathscr{G} \to \mathcal{O}^{N+1}_{\mathbf{P}^n\times S} \to \mathcal{O}^{N+1}_{\mathbf{P}^n\times S}/\mathscr{G} \to 0 \tag{0}$$

und wollen die Quotientengarbe mit $\mathscr{F}$ bezeichnen. Wegen Satz 2 aus Abschnitt 3 wissen wir, daß für $m \gg 0$ die Garbe $\mathcal{O}^{N+1}_{\mathbf{P}^n\times S}$ und die betrachteten $\mathscr{G} \in Q(S)$ m-regulär sind. Daraus folgt zusammen mit den Korollaren 1, 2, 4 zum Satz 1 aus Abschnitt 1, daß die Sequenz

$$0 \to p_*\mathscr{G}(m) \to p_*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n\times S}(m))^{N+1} \to p_*\mathscr{F}(m) \to 0 \tag{1}$$

exakt ist.

Wir bezeichnen mit $\mathscr{H}_S(m)$ den $\mathcal{O}_S$-Modul der Formen vom Grad m in $\mathcal{O}_S[T_0, \ldots, T_n]$. Es ist $p_*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n\times S}(m)) = \mathscr{H}_S(m)$ und $\mathscr{H}_S(m)^{N+1} \cong \mathcal{O}^{q+1}_S$ mit $q + 1 = (N+1)\binom{n+m}{m}$ ist. Damit erhalten wir aus (1) die exakte Sequenz

$$0 \to p_*\mathscr{G}(m) \to \mathcal{O}^{q+1}_S \to p_*\mathscr{F}(m) \to 0. \tag{2}$$

Es sei $p + 1 := P(m)$ und Grass (q, p) der Graßmannfunktor:

$$\text{Grass}\,(q, p)\,(S) = \{\mathscr{N} \subset \mathcal{O}^{q+1}_S \mid \mathscr{N} \text{ kohärent, } \mathcal{O}^{q+1}_S/\mathscr{N} \text{ lokal frei vom Rang } p + 1\}.$$

Wegen $m \gg 0$ ist $rk(p_*(\mathscr{F}(m)) = \chi(\mathscr{F}(m)) = P(m) = p + 1$, d. h., es ist $p_*\mathscr{G}(m) \in \text{Grass}\,(q, p)\,(S)$. Andererseits ist $\mathscr{G}$ nach Satz 1 aus Abschnitt 3 durch $p_*\mathscr{G}(m)$ und damit auch $\mathscr{F}$ eindeutig bestimmt. (Es sei etwa S affin: $S = \text{Spec}\,A$. Dann ist

$$\bigoplus_{k\geq 0} H^0(\mathcal{O}^{N+1}_{\mathbf{P}^n\times S}(k)) = A[T_0, \ldots, T_n]^{N+1}.$$

Bezeichnet man mit G_0 den graduierten Untermodul, der über $A[T_0, \ldots, T_n]$ durch $H^0(\mathscr{G}(m))$ erzeugt wird, so ist $\mathscr{G} = (G_0)^\sim$.) Damit haben wir eine Einlagerung $Q(S) \subseteq \text{Grass}\,(q, p)\,(S)$ definiert. Aus den Sätzen über Basiswechsel folgt, daß diese Einlagerung auch funktoriell ist: $Q \subseteq \text{Grass}\,(q, p)$.

Wir wollen noch einmal an die Plückerkoordinaten erinnern. Der Graßmannfunktor wird dargestellt durch eine projektive Mannigfaltigkeit

$$G(q, p) \subseteq \mathbf{P}^{\binom{q+1}{p+1}-1}.$$

Dabei wird $G(q, p)$ durch homogene Koordinaten $p_{i_0\ldots i_p}$, $0 \leqq i_0 < \cdots < i_p \leqq q$, beschrieben, wobei folgendes festgelegt werde: Die übrigen Koordinaten $p_{i_0\ldots i_p}$ (d. h. solche, für die nicht $0 \leqq i_0 < \cdots < i_p \leqq q$ erfüllt ist) seien dadurch bestimmt, daß $p_{i_0\ldots i_p}$ alternierend von den Indizes abhängen soll. Es gelten die Plückerrelationen

$$\sum_{\nu=0}^{p} (-1)^\nu p_{i_0\ldots i_{p-1}j_\nu} p_{j_1\ldots \check{j}_\nu \ldots j_{p+1}} = 0$$

für alle Folgen $0 \leqq i_0 < \cdots < i_{p-1} \leqq q$, $0 \leqq j_0 < \cdots < j_{p+1} \leqq q$, durch die Grass (q, p) definiert wird als abgeschlossenes Unterschema eines projektiven Raumes.
Die Bijektion

$$\text{Grass}\,(q, p)\,(S) \xrightarrow[\sim]{\omega} \text{Hom}\,\big(S, G(q, p)\big)$$

ist lokal folgendermaßen definiert:
Es sei $\mathcal{N} \in \text{Grass}\,(q, p)\,(S)$. Dann ist $\mathcal{N}$ lokal (über S) durch $p + 1$ lineare Formen

$$g_i = \sum_{j=0}^{q} u_{ij} T_j, \qquad u_{ij} \text{ Funktionen auf } S, \quad i = 0, \ldots, p,$$

gegeben:

$$\mathcal{N} = \{(t_0, \ldots, t_q) \in \mathcal{O}_S^{q+1} \mid g_i(t_0, \ldots, t_q) = 0, i = 0, \ldots, p\}.$$

Dann ist lokal $\omega(\mathcal{N}) = p : S \to G(q, p)$ definiert durch die Plückerkoordinaten

$$p_{i_0\ldots i_p} = \begin{vmatrix} u_{0i_0} & u_{0i_1} & \ldots & u_{0i_p} \\ u_{1i_0} & u_{1i_1} & \ldots & u_{1i_p} \\ & & \ldots & \\ u_{pi_0} & u_{pi_1} & \ldots & u_{pi_p} \end{vmatrix}.$$

Diese Definition ist unabhängig von der Auswahl der $p + 1$ linearen Formen g_i, die $\mathcal{N}$ definieren, da bei einer anderen Wahl dieser $p + 1$ linearen Formen die gewonnenen Plückerkoordinaten sich nur um einen gemeinsamen umkehrbaren Faktor unterscheiden.
Zum Beweis des Satzes genügt es also zu zeigen, daß die Injektion $Q \hookrightarrow \text{Grass}\,(q, p)$ eine abgeschlossene Einbettung ist. Der Vorbereitung dieses Beweises dienen die folgenden Betrachtungen.
Es sei α ein Morphismus: $S \to G$. Da $G(q, p) := G$ den Funktor Grass (q, p) darstellt und $Q \hookrightarrow \text{Grass}\,(q, p)$, hat es Sinn, zu fragen, wann $\alpha \in Q(S)$ gilt. Dazu entspreche bei der Isomorphie Grass $(q, p)\,(G) \simeq \text{Hom}\,(G, G)$ der Identität auf der rechten Seite die universelle Garbe $\mathcal{N} \subset \mathcal{O}_G^{q+1}$. Wegen $\mathcal{N} \in \text{Grass}\,(p, q)\,(G)$ ist $\mathcal{O}_G^{q+1}/\mathcal{N}$ lokal frei vom Rang $p + 1$ (es war $m \gg 0$). Die Antwort auf die obige Frage gibt nun

Lemma 1. *$\alpha : S \to G$ ist ein Element von $Q(S)$ genau dann, wenn $\mathcal{H}_S(m + l)^{N+1}/\mathcal{H}_S(l)\, \alpha^*(\mathcal{N})$ lokal frei vom Rang $m + l$ für alle $l \geqq 0$* ist.

Beweis. Ist $\alpha \in Q(S)$, so ist nach Satz 1 aus Abschnitt 3 die obige Bedingung erfüllt. Wir haben noch zu zeigen, daß, wenn $\mathcal{G}$ die durch α induzierte Untergarbe bezeichnet, die Quotientengarbe $\mathcal{F} = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n \times S}^{N+1}/\mathcal{G}$ das Hilbertpolynom P besitzt und S-flach ist. $\mathcal{G}$ wird durch α folgendermaßen induziert: Es sei $\mathcal{I}_*$ der Untermodul von $\mathcal{O}_S[T_0, \ldots, T_n]^{N+1}$ der durch $\alpha^*(\mathcal{N})$ erzeugt wird. Es ist dann $\mathcal{G} = \tilde{\mathcal{I}_*}$. Da der homogene Teil vom Grad $m + l$ von $\mathcal{O}_S[T_0, \ldots, T_n]$ gerade

$$\mathcal{H}_S(m + l)^{N+1}/\mathcal{H}_S(l)\, \alpha^*(\mathcal{N}) =: \mathcal{F}_l$$

ist, hat $\mathcal{O}^{N+1}_{\mathbf{P}^n \times S}/\mathcal{G}$ das Hilbertpolynom P, und da $\mathcal{F}_l$ lokal frei ist, ist $\mathcal{F}$ S-flach, d. h., es ist $\alpha \in Q(S)$.

Bemerkung. Ist $N = 0$, $S = \operatorname{Spec} A$, so ist $\alpha^*\mathcal{N}$ ein Untermodul von $A[T_0, \ldots, T_n]$, bestehend aus Formen vom Grad m. Diese Formen definieren ein abgeschlossenes Unterschema X von $\mathbf{P}^n \times S$. Die obige α entsprechende Quotientengarbe $\mathcal{F}$ von $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n \times S}$ ist dann gerade $\mathcal{O}_X$.

Lemma 2. *Es sei B ein Noethersches Schema, $\mathcal{H}_* = \mathcal{O}_B[T_0, \ldots, T_n]$, $\mathcal{M}_*$ ein $\mathcal{H}_*$-Modul, der von endlichem Typ und quasikohärent als $\mathcal{O}_B$-Modul ist. Außerdem sei $m \in \mathbf{Z}$ und $P \in \mathbf{Q}[t]$.*
Dann existiert ein lokal abgeschlossenes Schema $Z \subseteq B$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\mathcal{M}_{m+l} \otimes_{\mathcal{O}_B} \mathcal{O}_Z$ *ist für alle $l \geqq 0$ über $\mathcal{O}_Z$ lokal frei vom Rang $P(m+l)$.*

(ii) *Ist $\alpha: S \to B$ ein Morphismus, so daß $\alpha^*\mathcal{M}_{m+l}$ lokal frei vom Rang $P(m+1)$ über $\mathcal{O}_S$ für alle $l \geqq 0$ ist, so läßt sich α über Z faktorisieren.*

Lemma 2 folgt aus den Behauptungen:

(I) $U = \{t \in B \mid rk_{k(t)}\mathcal{M}_{n,t} \otimes_{\mathcal{O}_{B(t)}} k(t) \subseteq P(n),\ n \geqq m\}$ ist eine offene Teilmenge von B.

(II) Zu jedem kohärenten Modul $\mathcal{M}$ vom Rang $\leqq r$ über einem Noetherschen Schema U existiert ein abgeschlossenes Unterschema Z von U mit den beiden folgenden Eigenschaften
a) $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_U} \mathcal{O}_Z$ ist lokal frei vom Rang r.
b) Ist $\alpha: S \to U$ ein Morphismus, so daß $\alpha^*\mathcal{M}$ lokal frei vom Rang r ist, so läßt sich α über Z faktorisieren.

Wir nehmen an, daß (I) und (II) richtig sind, und betrachten die Garben $\mathcal{M}_{n+l}$ über der durch (I) definierten offenen Teilmenge U von B, die also wieder ein Noethersches Schema ist. Setzt man in (II) $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{n+l}$ und $r = P(m+1)$, so gewinnt man abgeschlossene Unterschemata Z_l von U mit den Eigenschaften a) und b). Da U Noethersch ist, muß die absteigende Kette der $Z(l) := Z_0 \cap Z_1 \cap \cdots \cap Z_l$ stationär werden. Dann besitzt $Z(l) = Z(l+1) = \cdots =: Z$ die im Lemma 2 geforderten Eigenschaften.

Beweis von (I): B ist Vereinigung von endlich vielen disjunkten reduzierten Unterschemata B_i derart, daß $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_B} \mathcal{O}_{B_i}$ flach über S ist. Da S nur endlich viele Zusammenhangskomponenten besitzt, kann man sich auf die Situation beschränken, daß $\mathcal{M}$ bzw. $\mathcal{M}_n$ flach über S ist, wobei S zusammenhängend ist. In diesem Fall ist aber bekannt (siehe Verschwindungssätze), daß ein n_0 existiert, so daß für $n \geqq n_0$

$$rk_{k(t)}(\mathcal{M}_{n,t} \otimes_{\mathcal{O}_{B,t}} k(t)) = \chi(n, \mathcal{M}_*^{\sim}) = HP(n, \mathcal{M}_*^{\sim}) := R(n)$$

ist ($HP(n, \mathcal{F})$ soll das Hilbertpolynom für eine Garbe $\mathcal{F}$ bezeichnen). U_l sei die offene Menge

$$U_l = \{t \in B \mid rk_{k(t)}(\mathcal{M}_{m+v,t} \otimes_{\mathcal{O}_{B,t}} k(t)) \leqq P(v) \text{ für } m \leqq v \leqq l\}.$$

Dann ist $U = \bigcap_{l \geqq 0} U_l$ und folglich genügt es zu zeigen, daß die absteigende Folge der U_l nach endlich vielen Schritten abbricht. Gibt es aber ein $n_1 \geqq n_0$, so daß $R(n_1) > P(n_1)$ ist, so ist $U_{n_1} = \emptyset$, und die Folge U_l ist damit stationär. Ist aber $R(n) \leqq P(n)$ für alle $n \geqq n_0$, so ist $U_{n_0} = U_{n_0+1} = \cdots$.

Beweis von (II): Da $\mathcal{M}$ kohärent ist, hat man lokal eine Darstellung $\mathcal{O}_U^q \to \mathcal{O}_U^r \to \mathcal{M} \to 0$. Ist $\alpha: S \to U$ ein Morphismus, so daß $\alpha^*\mathcal{M}$ lokal frei ist, so ist in der exakten Folge $\mathcal{O}_U^q \otimes \mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_U^r \otimes \mathcal{O}_S \to \mathcal{M} \otimes \mathcal{O}_S \to 0$ der erste Homomorphismus Null, da der zweite Homomorphismus ein Isomorphismus ist. Das besagt aber, daß das geforderte abgeschlossene Unterschema Z von U durch das Ideal definiert wird, welches durch die Koeffizienten erzeugt wird, die den Homomorphismus $\mathcal{O}_U^q \to \mathcal{O}_U^r$ induzieren.

Mit Lemma 1 und Lemma 2 ist bewiesen, daß der Funktor Q darstellbar ist und daß das darstellende Objekt, welches wieder mit Q bezeichnet wird, ein lokal abgeschlossenes Unterschema der Graßmannmannigfaltigkeit G ist.

Daß aber Q auch ein abgeschlossenes Unterschema von G ist, folgt aus

Lemma 3. *Es sei C ein eindimensionales reguläres Schema (d. h. eine Kurve), C_0 ($\neq \emptyset$) ein offenes Unterschema, $a: C_0 \to Q$, $b: C \to G$ Morphismen, so daß das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} C_0 \arrow[r, "a"] \arrow[d, hook] & Q \arrow[d, hook] \\ C \arrow[r, "b"] & G \end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Dann existiert ein Morphismus $c: C \to Q$, so daß das resultierende Diagramm

$$\begin{tikzcd} C_0 \arrow[r, "a"] \arrow[d, hook] & Q \arrow[d, hook] \\ C \arrow[r, "b"'] \arrow[ur, "c"] & G \end{tikzcd}$$

kommutativ ist.

Beweis. Durch Lokalisierung gelangt man zu der Situation, daß $C = \operatorname{Spec}(R)$, $C_0 = \operatorname{Spec}(R_f)$ ist, wobei R eindimensionaler Ring und $f \in R$ ist. Setzt man $H = R[T_0, \ldots, T_n]$, so ist b (b ist Punkt von G mit Wert in C) derart durch einen Untermodul $M \subset H(m)^{N+1}$ definiert, daß $H(m)^{N+1}/M$ R-frei ist. Wegen a) gilt für alle $l \geqq 0$, daß

$$[H(l) \otimes_R (H(m)^{N+1}/M)]_f = H(m+l)_f^{N+1}/H(l)\, M_f$$

und frei vom Rang $P(m+l)$ ist. Wegen der Flachheit des Quotientenmoduls gilt das dann auch für ganz $\operatorname{Spec}(R)$, und daher gibt es wegen der Universaleigenschaft von Q einen Morphismus c mit den gewünschten Eigenschaften, q. e. d.

Bemerkungen.

a) Schränkt man den Funktor $Q^P(N)$ auf die Kategorie der S-Schemata ein, d. h., es sei in der Kategorie der S-Schemata

$$Q_S^P(N)\,(T) = \{\mathcal{H} \subset \mathcal{O}^{N+1}_{\mathbf{P}^n \times T} \mid \mathcal{F} = \mathcal{O}^{N+1}_{\mathbf{P}^n \times T}/\mathcal{H} \text{ ist } T\text{-flach},\ HP(n, \mathcal{F}) = P(n)\},$$

so ist dieser Funktor ebenfalls darstellbar, und aus der Universalitätseigenschaft folgt, daß er durch $Q^P(N) \times S$ dargestellt wird.

b) Eine weitere Verallgemeinerung ergibt sich in der folgenden Weise. Wir betrachten wieder die Kategorie der S-Schemata. Dort sollen jetzt aber nicht mehr die Untermoduln von $\mathcal{O}^{N+1}_{\mathbf{P}^n \times T}$ für das Schema T/S zugrunde gelegt werden. Wir gehen vielmehr aus von einem Quotientenmodul $\mathcal{E} = \mathcal{O}^{N+1}_{\mathbf{P}^n \times T}$, der zu einer Untergarbe $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}^{N+1}_{\mathbf{P}^n \times S}$ gehört. Mit $\mathcal{E}_T$ werde für ein S-Schema T die Garbe $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_T$ auf $\mathbf{P}^n \times T$ bezeichnet. Dann definieren wir einen Funktor $Q^p_S(\mathcal{E})$ durch

$$Q^p_S(\mathcal{E})\,(T) = \{\mathcal{H} \subseteq \mathcal{E}_T \mid \mathcal{F} = \mathcal{E}_T/\mathcal{H} \text{ ist } T\text{-flach, } HP(n, \mathcal{F}) = P(n)\}.$$

Behauptung. $Q^p_S(\mathcal{E})$ ist darstellbar durch ein abgeschlossenes Unterschema von $Q^p_S(N)$.

Beweis. Wir bezeichnen den Funktor $Q^p_S(N)$ mit Q_0 und den Funktor $Q^p_S(\mathcal{E})$ mit Q. Da sich jeder Quotient von $\mathcal{E}_T$ als Quotient von $\mathcal{O}^{N+1}_{\mathbf{P}^n \times T}$ darstellen läßt, gilt $Q \subseteq Q_0$. Wir haben zu zeigen, daß $Q \subseteq Q_0$ eine abgeschlossene Einlagerung ist. Dazu sei $\mathcal{H}$ die universelle Untergarbe von $\mathcal{O}^{N+1}_{\mathbf{P}^n \times Q}$ mit dem flachen Quotienten $\mathcal{F} := \mathcal{O}^{N+1}_{\mathbf{P}^n \times Q}$ (der das Hilbertpolynom P besitzt), die dem Funktor Q zugeordnet ist. $\mathcal{E}_Q = \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_Q$ ist Quotient von $\mathcal{O}^{N+1}_{\mathbf{P}^n \times Q}$, und es sei $\mathcal{K} = \operatorname{Ker}\,(\mathcal{O}^{N+1}_{\mathbf{P}^n \times Q} \twoheadrightarrow \mathcal{E}_Q)$. Weiterhin sei $I = (\mathcal{K} + \mathcal{H})/\mathcal{H}$, und mit φ werde die Injektion $I \hookrightarrow \mathcal{F}$ bezeichnet. Da $\mathcal{F}$ die universelle Quotientengarbe bezüglich des Funktors Q ist, gilt für ein S-Schema T

$$Q(T) = \left\{u \in Q_0(T) \mid \left((1 \times u)^* I \xrightarrow{(1\times u)^*(\varphi)} (1 \times u)^* \mathcal{F}\right) = 0\right\}.$$

Hierbei bezeichnet 1 die identische Abbildung von $\mathbf{P}^n$. Wir haben weiter oben gesehen, daß für $m \gg 0$, wenn wir $q = (N+1)\binom{n+m}{n}$ setzen, eine Surjektion $\mathcal{O}^q_{\mathbf{P}^n \times Q} \twoheadrightarrow I(m)$ existiert und $\varphi(m)$ bzw. φ eindeutig durch

$$\psi\colon \mathcal{O}^q_Q \to p_* I(m) \to p_* \mathcal{F}(m)$$

bestimmt ist. Es ist also $(1 \times u)^*\,(\varphi) = 0$ genau dann, wenn $u^*(\psi) = 0$ ist, und wir können damit das Verschwinden von $(1 \times u)^*\,(\varphi)$ durch das Verschwinden von ψ ausdrücken. Da aber $p_*\mathcal{F}(m)$ wegen $m \gg 0$ lokal frei ist, wird das Verschwinden von $\mathcal{O}^q_Q \to p_*\mathcal{F}(m)$ lokal durch das Verschwinden der Koeffizienten einer Matrixdarstellung von ψ ausgedrückt. Die entsprechenden Gleichungen definieren damit Q als abgeschlossenes Unterschema von Q_0, q. e. d.

c) Man kann auch von einem projektiven Schema X über S ausgehen, eine kohärente Garbe $\mathcal{E}$ auf X fixieren, $\mathcal{E}_T$ durch $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_S} T$ definieren und damit wie in b) einen Funktor $Q^p_S(\mathcal{E})$ auf der Kategorie der S-Schemata erhalten.

Behauptung. $Q^p_S(\mathcal{E})$ ist durch ein projektives S-Schema darstellbar.

Beweis. Wir wählen eine solche Überdeckung $\{S_\alpha\}$ von S, so daß $X \mid S_\alpha \subseteq \mathbf{P}^n \times S$ ist. Die entsprechenden Funktoren $Q^p_{S_\alpha}(\mathcal{E} \mid S_\alpha)$ sind nach b) durch projektive Schemata $Q^p_{S_\alpha}(\mathcal{E} \mid S_\alpha)$ darstellbar (wir behalten die alte Bezeichnung bei). Infolge der Universaleigenschaft der $Q^p_{S_\alpha}(\mathcal{E} \mid S_\alpha)$ kann man sie zu einem projektiven S-Schema $Q^p_S(\mathcal{E})$ zusammenkleben, so daß $Q^p_S(\mathcal{E}) \mid S_\alpha = Q^p_{S_\alpha}(\mathcal{E} \mid S_\alpha)$ ist und $Q^p_S(\mathcal{E})$ den betrachteten Funktor darstellt, q. e. d.

Insbesondere ergibt sich also daraus: Es existiert eine universelle flache Quotientengarbe $\mathcal{F}$ von $\mathcal{E}_Q$ $\left(Q := Q^p_S(\mathcal{E})\right)$ mit dem Hilbertpolynom P, und für $n \gg 0$ ist

(i) $p_*\left(\mathcal{F}(n)\right)$ lokal frei auf Q vom Rang $q = P(n)$ (hierbei bezeichnet p die Projektion von $X \times_S Q$ auf den zweiten Faktor)

und

(ii) $\overset{q}{\wedge}\left(p_*(\mathcal{F}(n)\right) = \mathcal{L}$ „very ample“ bezüglich S).

5. Ein Beispiel von Mumford

Wir werden jetzt nach einem Beispiel aus MUMFORD [2] zeigen, daß das Hilbertschema nicht reduziert zu sein braucht. Dazu werden wir zeigen, daß für gewisse Kurven γ im dreidimensionalen projektiven Raum keine algebraische Familie A mit reduziertem Parameterraum existiert, die diese Kurven enthält und für die die charakteristische Abbildung

$$T_a \xrightarrow{\varphi} H^0(N)$$

(a der Punkt aus A, der γ entspricht, T_a der Tangentenraum von a in A, N das Normalenbündel von γ in $\mathbf{P}^3$) surjektiv ist. Die charakteristische Abbildung werden wir gleich erklären. Für das Hilbertschema ist aber die obige Abbildung ein Isomorphismus. Damit kann das Hilbertschema nicht reduziert sein, denn anderenfalls wäre ja dadurch eine algebraische Familie gegeben, für die φ surjektiv ist.

Die charakteristische Abbildung

Es seien X, T Schemata, Z sei ein abgeschlossenes Unterschema von $X \times T$, i bezeichne die Einlagerung von Z in $X \times T$ und p bzw. q die Projektion von $X \times T$ auf T bzw. auf X. Ist $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{O}_{X \times T}$ die Idealgarbe, die Z definiert, so ist die Folge

$$\mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \xrightarrow{\nu} i^*\Omega^1_{X \times T} \to \Omega^1_Z \to 0$$

exakt. Es ist

$$i^*\Omega^1_{X \times T} = q^*\Omega^1_X \otimes p^*\Omega_T,$$

und daher erhalten wir, wenn wir ν mit der Projektion $i^*\Omega^1_{X \times T} \to p^*\Omega_T$ komponieren, eine $\mathcal{O}_Z$-lineare Abbildung

$$\mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \to p^*\Omega_T. \tag{1}$$

Ist $T \to \mathbf{A}^m$, $t \mapsto (t_1, \ldots, t_m)$ ein Etalmorphismus von T auf den m-dimensionalen affinen Raum (z. B. existiert ein solcher lokal, falls T glatt ist), so ist (1) gegeben durch

$$f \mapsto \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial t_i}\, dt_i.$$

Die Dualisierung von (1) ergibt

$$p^*\Theta_T \to \mathcal{N}_{Z/X \times T}$$

bzw. auf Grund der Adjunktion

$$\varphi_{Z/T}\colon \Theta_T \to p_*\mathcal{N}_{Z/X \times T}.$$

Setzen wir mit den obigen Bezeichnungen $\mathfrak{d}_i = \dfrac{\partial}{\partial t_i}$ so ist $\varphi_{Z/T}$ definiert durch

$$\varphi_{Z/T}(\mathfrak{d}_i) = \left(f \mapsto \frac{\partial}{\partial t_i} \middle| Z\right).$$

Für $t \in T$ liefert eine Tensorierung von $\varphi_{Z/T}$ mit $k(t)$ die Abbildung

$$\Theta_{T,t} \to p_*\mathcal{N}_{Z/X \times T} \otimes_{\mathcal{O}_T} k(t) \to H^0\big(Z_t, \mathcal{N}_{Z/X \times T} \otimes_{\mathcal{O}_T} k(t)\big). \tag{2}$$

Nehmen wir an, daß die Abbildung $Z \to T$ flach ist (was in den uns interessierenden Fällen auch der Fall sein wird), so ist $\mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_T} k(t) = \mathcal{J}_t$ und in $\mathcal{O}_{X\times T} \otimes_{\mathcal{O}_T} k(t)$ enthalten als das Z_t definierende Ideal. Somit haben wir eine Abbildung

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{Z/X\times T} \otimes_{\mathcal{O}_T} k(t) &= \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X\times T}}(\mathcal{J}, \mathcal{O}_Z) \otimes_{\mathcal{O}_T} k(t)\\ &\to \mathcal{H}om\,(\mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_T} k(t), \mathcal{O}_{Z_t}) = \mathcal{N}_{Z_t/X}.\end{aligned}$$

Aus (2) ergibt sich damit

$$\begin{aligned}\varphi_{Z/T,t}\colon \Theta_{T,t} &\to H^0(Z_t, \mathcal{N}_{Z_t/X}),\\ \mathfrak{d}_i &\mapsto \left(f \mapsto \frac{\partial f}{\partial t_i}(x, 0)\right).\end{aligned}$$

Wenn Z lokal vollständiger Durchschnitt ist, dann ist $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ lokal frei, und wir haben

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X\times T}}(\mathcal{J}, \mathcal{O}_Z) \otimes_{\mathcal{O}_T} k(t) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{J}_t, \mathcal{O}_{Z_t});$$

daher muß in diesem Fall, falls φ_t surjektiv ist, auch die Abbildung

$$p_*\mathcal{N}_{Z/X\times T} \otimes_{\mathcal{O}_T} k(t) \to H^0(Z_t, \mathcal{N}_{Z_t}) \tag{3}$$

surjektiv sein (siehe dazu die Folge (2)).

Mit Hilfe der Sätze über Basiswechsel erhält man aus (3):

a) $p_*\mathcal{N}_{Z/X\times T}$ ist in einer Umgebung von t mit Basiswechsel verträglich,

b) $\varphi_{Z/T}\colon \Theta_T \to p_*\mathcal{N}_{Z/X\times T}$ ist in einer Umgebung von t surjektiv.

Dabei bedeutet b) gerade: Ist Z lokal durch $u_1 = \cdots = u_{m-d} = 0$ definiert, wobei $u_1, \ldots, u_m$ reguläre Parameter sind, dann ist das Gleichungssystem

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial u_k}{\partial t_j}(x, 0)\, x_j = f_k, \qquad f_k \text{ beliebig}, \ k = 1, \ldots, m-d, \quad f_k = 0, \quad k > m-d,$$

stets lösbar.

Wir wollen uns jetzt noch speziell mit dem infinitesimalen Fall beschäftigen. Dazu sei $T' = \operatorname{Spec}(k[\varepsilon])$, $\varepsilon^2 = 0$. Es seien X, T, Z wie oben angegeben und α ein Morphismus von T' in T: $T' \xrightarrow{\alpha} T$. Wir setzen $Z' := Z \times_T T' \subseteq X \times T'$, und es sei p' die Projektion $p'\colon Z' \to T'$.

Dann folgt aus a), daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}\Theta_{T'} & \xrightarrow{\varphi_{Z'/T'}} & p'_*\mathcal{N}_{Z'/X\times T'}\\ \downarrow & & \downarrow\\ \alpha^*\Theta_T & \xrightarrow{\alpha^*\varphi_{Z/T}} & \alpha^*p_*\mathcal{N}_{Z/X\times T}\end{array}$$

universell ist.

Ist $\operatorname{Spec}(k) \to \operatorname{Spec}(k[\varepsilon])$ der der Projektion $k[\varepsilon] \to k$ entsprechende Morphismus, so wird dadurch für jedes abgeschlossene Unterschema Z von $X \times I$ ein abgeschlossenes Unterschema Z_0 von X induziert.

Es sei Z flach über I. Wie wir oben gesehen haben, induziert Z einen Morphismus $\varphi_{Z/I}\colon \Theta_I \to p_*\mathcal{N}_{Z/X\times T}$. Es ist $\Theta_I = k$. Indem wir Z das Element $\varphi_{Z/I}(1) \in H^0(Z, \mathcal{N}_{Z/X\times I})$ zuordnen, ist ein Element aus $H^0(Z_0, \mathcal{N}_{Z_0/X})$ definiert, das wir mit $\varphi(Z/I)$ bezeichnen wollen. Wir haben also für ein fixiertes $Z_0 \subset X$ einen Morphismus

$$\varphi\colon \{Z \subset X \times I \mid Z \text{ flach über } I,\ Z \cap (X \times 0) = Z_0\} \to H^0(Z_0, \mathcal{N}_{Z_0/X})$$

erhalten.

Satz *φ ist ein Isomorphismus.*

Beweis. 1. Wir wollen zunächst einen Morphismus ψ in umgekehrter Richtung angeben. Dazu sei $s \in H^0(Z_0, \mathcal{N}_{Z_0/X}) = \operatorname{Hom}(\mathcal{J}_0, \mathcal{O}_{Z_0})$. Wir haben eine Idealgarbe $\mathcal{J}$ in $\mathcal{O}_{X \times T} = \mathcal{O}_X[\varepsilon]$ anzugeben, die ein $Z \subset X \times I$ mit den geforderten Eigenschaften definiert. Es sei $Z_0 \subset X$ durch die Idealgarbe $\mathcal{J}_0 \subset \mathcal{O}_X$ definiert. Dann setzen wir

$$\psi(s) = \mathcal{J} = \{f + \varepsilon g \mid f \in \mathcal{J}_0, s(f) = g \bmod \mathcal{J}_0\}.$$

a) Wie man unmittelbar sieht, ist $\mathcal{J}$ ein Ideal.

b) Außerdem ist das Bild der Abbildung $\mathcal{J}/\varepsilon\mathcal{J} \to \mathcal{O}_X[\varepsilon]/\varepsilon\mathcal{O}_X[\varepsilon]$ gleich $\mathcal{J}_0$, da f gerade alle Elemente aus $\mathcal{J}_0$ durchläuft.

c) Die obige Abbildung ist injektiv. Denn für $f + g\varepsilon \mapsto 0$ ist $f = 0$, also folgt $s(f) = 0 = g \bmod \mathcal{J}_0$, d. h. $g\varepsilon \in \varepsilon\mathcal{J}$.

Somit haben wir vermittels $\mathcal{J}$ ein I-flaches Unterschema Z von $X \times I$ mit $Z \cap (X \times 0) = Z_0$ definiert.

2. Wir zeigen jetzt, daß $\varphi\psi(s) = s$ gilt. Dazu sei $Z := \psi(s)$. Wir erinnern noch einmal daran, wie

$$\varphi(Z/I) \in H^0(Z_0, \mathcal{N}_{Z_0/X}) = \operatorname{Hom}(\mathcal{J}_0, \mathcal{O}_{Z_0})$$

definiert ist. Man geht aus von der Abbildung

$$\mathcal{J} \to i^*\Omega^1_{X \times I}, \qquad p^*\Omega^1_I = \mathcal{O}_Z d\varepsilon = \mathcal{O}_{Z_0} d\varepsilon,$$
$$f \mapsto \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} d\varepsilon.$$

Wegen

$$\mathcal{H}om(\mathcal{O}_Z d\varepsilon, \mathcal{O}_Z) \cong \mathcal{O}_Z \varepsilon = \mathcal{O}_{Z_0}\varepsilon,$$
$$u \mapsto u(d\varepsilon)$$

ergibt sich aus der obigen Abbildung durch Dualisierung

$$\varphi_{Z/T} \colon \mathcal{O}_{Z_0}\varepsilon \to \mathcal{H}om(\mathcal{J}, \mathcal{O}_Z),$$
$$h\varepsilon \mapsto (f + g\varepsilon \mapsto hg).$$

φ war aber gerade bestimmt durch den Wert für $h = 1$, d. h., wir erhalten die Abbildung $(Z := \psi(s))$

$$f + g\varepsilon \mapsto g = s(f),$$

d. h., es ist $\varphi(Z/I) = s$.

Damit ist nachgewiesen, daß φ surjektiv ist.

3. Wir haben noch zu zeigen, daß φ injektiv ist. Es sei also $\varphi(Z/I) = \varphi(Z'/I)$, wobei Z durch $\mathcal{J}$ und Z' durch $\mathcal{J}'$ definiert werde. Da aber

$$S := \varphi(Z/I) = \varphi(Z'/I) = (f \mapsto s(f)) \in \operatorname{Hom}(\mathcal{J}_0, \mathcal{O}_{Z_0})$$

ist mit

$$s(f)\,(x_0) = \frac{\partial(f + \varepsilon g)}{\partial \varepsilon}(x_0, 0) = g(x_0),$$

ergibt sich

$$\mathcal{I} = \{f + \varepsilon g \mid f \in \mathcal{I}_0,\ \varphi(Z/I)\,(f) \equiv g \bmod \mathcal{I}\} = \mathcal{I}',$$

d. h. $Z = Z'$.

Insbesondere erhalten wir aus dem Satz, da ja

$$\begin{aligned}\{Z \subset X \times I \mid Z \text{ flach über } I,\ Z_0 = Z \cap (X \times 0)\} &= \mathrm{Hilb}_X(I) \times_{\mathrm{Hilb}(k)} Z_0 \\ &= \text{Tangentenraum des Hilbertschemas in } Z_0\end{aligned}$$

ist, daß $H^0(Z_0, \mathcal{N}_{Z_0/X})$ der Tangentenraum des Hilbertschemas von X in Z_0 ist.

Wir wollen uns jetzt mit dem eingangs erwähnten Beispiel beschäftigen. Es sei $C \subset \mathbf{P}^3 \times H$ die universelle Familie glatter Kurven in $\mathbf{P}^3$ mit dem Hilbertpolynom $Q_0(t) = 14t - 23$ (d. h. Kurven vom Geschlecht 24 und vom Grad 14 in $\mathbf{P}^3$). Wir werden zeigen:

(i) Es gibt ein nichtleeres offenes Unterschema $U \subseteq H$, so daß U_{red} glatt ist und $\dim U = 56$.

(ii) Es gibt Punkte $u \in U$, in denen der Tangentialraum $T_u(U)$ die Dimension 57 hat.

Hilfssatz 1. *Es sei $V_0 \subset \mathbf{P}^3$ eine glatte kubische Fläche, E eine Gerade auf V_0 und H ein Hyperebenenschnitt. Dann hat das lineare System $|4H + 2E|$ keine Basispunkte, die Kurven aus diesem System haben das Hilbertpolynom $Q_0(t)$ (in $\mathbf{P}^3$).*

Beweis. Die letzte Behauptung folgt nach der Adjunktionsformel und aus $\omega_{V_0} = \mathcal{O}_{V_0}(-H)$. Da $|4H| + 2E \subseteq |4H + 2E|$ ist, können höchstens auf E Basispunkte liegen. Die Folgen

$$0 \to \mathcal{O}_{V_0}(4H + E) \to \mathcal{O}_{V_0}(4H + 2E) \to \underbrace{\mathcal{O}_E \otimes \mathcal{O}_{V_0}(4H + 2E)}_{\cong \mathcal{O}_E(2)} \to 0,$$

$$0 \to \mathcal{O}_{V_0}(4H) \to \mathcal{O}_V(4H + E) \to \underbrace{\mathcal{O}_E \otimes \mathcal{O}_{V_0}(4H + E)}_{\cong \mathcal{O}_E(3)} \to 0$$

und

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(1) \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(4) \to \mathcal{O}_V(4H) \to 0$$

sind exakt. Hieraus folgt

$$H^1\big(V_0, \mathcal{O}_{V_0}(4H)\big) = H^1\big(V_0, \mathcal{O}_{V_0}(4H + E)\big) = 0$$

und

$$E \cdot |4H + 2E| = |\mathcal{O}_E(2)|_E,$$

q. e. d.

Nach Bertinis Sätzen gibt es eine nichtleere offene Teilmenge in $|4H + 2E|$, die den glatten Kurven dieses linearen Systems entspricht.

Hilfssatz 2. *Ist V_0 wie oben und $C_0 \subset V_0$ eine glatte Kurve mit dem Hilbertpolynom $Q_0(t)$, so ist* $\dim |C_0| = 37$.

Beweis. Nach Serres Dualitätssatz ist $\dim H^2\big(V_0, \mathcal{O}_{V_0}(C_0)\big) = 0$. Aus der Adjunktionsformel folgt

$$\deg \mathcal{O}_{C_0} \otimes \mathcal{O}_{V_0}(C_0) = (C_0^2) = 46 + (C_0 \cdot H) = 60,$$

also $H^1(C_0, \mathcal{O}_{C_0} \otimes \mathcal{O}_{V_0}(C_0)) = 0$, woraus wegen der exakten Folge

$$0 \to \mathcal{O}_{V_0} \to \mathcal{O}_{V_0}(C_0) \to \mathcal{O}_{C_0} \otimes \mathcal{O}_{V_0}(C_0) \to 0$$

das Verschwinden von $H^1(V_0, \mathcal{O}_{V_0}(C_0))$ folgt. Nach dem Satz von RIEMANN-ROCH ist

$$\dim |C_0| = (C \cdot (C + H))/2 = 37,$$

q. e. d.

Hilfssatz 3. *Eine Kurve $C_0 \subset \mathbf{P}^3$ mit dem Hilbertpolynom $Q_0(t)$ liegt auf höchstens einer kubischen Fläche.*

Beweis. Die Kurve kann nicht in einer Ebene oder Quadrik liegen, da sich glatte Kurven vom Geschlecht 24 nicht in $\mathbf{P}^3$ einbetten lassen. Also ist jede kubische Fläche, die C_0 enthält, irreduzibel; der Schnitt zweier solcher Flächen hätte den Grad 9, C_0 hat aber den Grad 14.

Hilfssatz 4. *Die Menge H' aller $t \in H$, so daß C_t auf einer kubischen Fläche liegt, ist abgeschlossen in H, ebenso die Menge $H'' \subseteq H'$ aller t, so daß C_t auf einer singulären kubischen Fläche liegt. Ist $U' = H' \setminus H''$, so ist* $\dim U' = 56$ *und U'_{red} glatt. Es gibt Komponenten von U', auf denen* $\dim T_u(H) > 56$ *gilt.*

Beweis. Die Idealgarben $I_t = \mathrm{Kern}\,(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3} \to \mathcal{O}_{C_t})$ sind die Fasern der H-flachen Idealgarbe $I = \mathrm{Kern}\,(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3 \times H} \to \mathcal{O}_C)$, und die Menge

$$H \setminus H' = \{t \in H; H^0(\mathbf{P}^3, I_t(3)) = 0\}$$

ist offen, also ist H' abgeschlossen. Es sei $L' = |\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(3)|$ und $V \subset \mathbf{P}^3 \times L'$ die universelle Familie aller Divisoren vom Grad 3 in $\mathbf{P}^3$, $T' \subseteq H' \times L'$ die Menge aller (t, l) mit $C_t \subseteq V_l$. Offensichtlich ist T' abgeschlossen in $H' \times L'$; wir betrachten T' als reduziertes Unterschema. Nach Hilfssatz 3 ist die Projektion $T' \to H'$ bijektiv und projektiv, also ist $T' \to H'$ ein Homöomorphismus. Es sei $L \subseteq L'$ die offene Teilmenge aller glatten kubischen Flächen, $T = T' \cap (L \times H')$; das Bild von T in H' ist eine offene Teilmenge U' und entspricht genau den Kurven C_t, die auf einer glatten kubischen Fläche liegen.

Die Fasern der Projektion $T \to L$ sind disjunkte Vereinigungen offener Teilmengen von linearen Systemen $|C_0|$ auf V_l, wobei C_0 eine glatte Kurve mit dem Hilbertpolynom $Q_0(t)$ ist und auf V_l liegt, da auf rationalen Flächen lineare und algebraische Äquivalenz übereinstimmen. Somit ist nach Hilfssatz 2

$$\dim U' = \dim T = \dim L + \dim |C_0| = \dim |\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(3)| + 37 = 56,$$

und T ist glatt (da L und $|C_0|$ glatt sind).

Wir berechnen schließlich $d = \dim T_u(H) = \dim H^0(C_u, N_{C_u|\mathbf{P}^3})$ (N = Normalenbündel).

Es sei V_0 eine glatte kubische Fläche, C_0 eine glatte Kurve auf V_0 mit dem Hilbertpolynom $Q_0(t)$, N das Normalenbündel von C_0 in $\mathbf{P}^3$ und N' das Normalenbündel in V_0, N'' das auf C_0 eingeschränkte Normalenbündel von V_0 in $\mathbf{P}^3$. Dann haben wir eine kanonische exakte Folge $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ und Isomorphismen

$$N' \cong \mathcal{O}_{V_0}(C_0) \otimes \mathcal{O}_{C_0} \quad \text{und} \quad N'' \cong \mathcal{O}_{V_0}(3H) \otimes \mathcal{O}_{C_0}.$$

Wie im Beweis von Hilfssatz 2 folgt $\deg N' = 60$, also $H^1(C_0, N') = 0$, $\dim H^0(C_0, N') = 37$ und $d = 37 + \dim H^0(C_0, N'') = 56 + \dim H^1(C_0, N'')$ (wegen $\deg N'' = (C_0 \cdot 3H) = 42$). Hieraus berechnet man leicht $d = 57$, wenn $C_0 \in |4H + 2E|$

ist. Wählt man zunächst V_0 und dann $C_0 \in |4H + 2E|$ jeweils als allgemeines Element, so sieht man, daß C_0 einem allgemeinen Punkt einer Komponente von U' entspricht (da V_0 von 19 und C_0 über dem Definitionskörper von (V_0, E) von 37 Parametern abhängt). Auf einer solchen Komponente ist also $\dim T_*(H) > 56$.
Da T glatt ist und homöomorph zu U', ist jede Zusammenhangskomponente von U' irreduzibel; aus $\dim H^0(\mathbf{P}^3, I_t(3)) = 1$ folgt daher, daß $p_*(I(3) \mid U'_{\mathrm{red}})$ lokal freie Untergarbe von $p_*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3 \times U'_{\mathrm{red}}}(3))$ ist und mit Basiswechsel verträglich, also eine flache Familie von kubischen Flächen in $\mathbf{P}^3 \times U'_{\mathrm{red}}$ definiert, die C/U'_{red} enthält. Dadurch wird ein zur Projektion $T \to U'_{\mathrm{red}}$ inverser Morphismus definiert, also ist U'_{red} glatt.

Hilfssatz 5. *Das Schema $H \setminus H''$ hat die Dimension* 56.

Beweis. Es genügt, die offene Menge der nicht auf einer kubischen Fläche liegenden Kurven zu untersuchen. Für eine solche Kurve C_0 ist jede sie enthaltende Fläche vom Grad 4 notwendig irreduzibel, und wegen $\dim |\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(4)| = 34$, $\dim |\mathcal{O}_{C_0} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(4)| = 32$ gibt es ein Büschel solcher Flächen vom Grad 4. Der Basisort dieses Büschels hat die Form $C_0 + Q$, Q eine Kurve vom Grad 2 (wegen $\deg C_0 = 14$, $\deg V \cdot V' = 16$). Nach Bertinis Satz kann ein allgemeines Element V des Büschels höchstens auf $C_0 + Q$ Singularitäten haben, und da für die Multiplizitäten eines Punktes p auf $V \cap V'$

$$m(p, V)\, m(p, V') \leqq m(p, C_0 + Q)$$

$$(\leqq 3 \text{ und } = 1 \text{ auf } C_0 \setminus Q,\ \leqq 2 \text{ auf } Q \setminus C_0)$$

gilt, hat V höchstens einen isolierten singulären Punkt p. Dieser ist ein Doppelpunkt und kann nur auftreten, wenn Q eine Doppelgerade ist. Es sei jetzt $V \subset \mathbf{P}^3 \times S$ die universelle Familie der Flächen vierten Grades und $T \subseteq (H \setminus H') \times S$ die abgeschlossene Menge aller (t, s) mit $C_t \subseteq V_s$; dann ist $\dim (H \setminus H') \leqq \dim T - 1$ (die Faser von $T \to (H \setminus H')$ in t ist das lineare System der Quartiken durch C_t, also von einer positiven Dimension). Da nicht jede Fläche vierten Grades einen Kegelschnitt Q enthält, ist das Bild der Projektion $T \to S$ von einer Dimension kleiner als $\dim S = \dim |\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(4)| = 34$, die Fasern bestehen aus linearen Systemen $|C_0|$ (da lineare Äquivalenz wieder gleich algebraischer Äquivalenz ist). Nach dem Satz von Riemann-Roch ist $\dim |C_0| = p_a(C_0) = 24$ (K 3-Flächen!), also $\dim (H \setminus H') < 57$, q. e. d.