Beiträge zur Algebra und Geometrie
7 (1978), 91–144

Modulprobleme in der algebraischen Geometrie III[1])

HEINZ-JÖRG FITZNER, WERNER KLEINERT, HERBERT KURKE, GERHARD PFISTER, MARKO ROCZEN und THOMAS ZINK

Inhalt

[1]) Die Teile I und II wurden veröffentlicht in den Heften *4* (1975), 93–150, bzw. *5* (1976), 75–130.

III. Technik

In diesem Kapitel bringen wir einige allgemeine, für viele Konstruktionen grundlegende Techniken, die später benötigt werden bzw. teilweise schon in Kapitel I benutzt wurden. Außerdem wird ein Beispiel von MUMFORD gebracht, das zeigt, daß das Hilbertschema im allgemeinen nicht reduziert ist.
Die Literaturangaben beziehen sich auf das Literaturverzeichnis in Teil I dieser Arbeit.

1. Basiswechsel und Folgerungen

Unter einer *algebraischen Familie* verstehen wir einen flachen algebraischen Morphismus $V \to T$. Dabei spielt T die Rolle eines Parameterraumes, und die geometrischen Fasern $V_t = V \times_T \operatorname{Spec}(k)$ (wobei t: $\operatorname{Spec}(\bar{k}) \to T$ ein geometrischer Punkt ist) sind die Elemente der Familie.
Ist $\mathscr{F}$ eine $\mathcal{O}_V$-Modulgarbe, so bezeichnen wir mit $\mathscr{F}_t$ die $\mathcal{O}_{V_t}$-Modulgarbe $\mathscr{F} \otimes_T \bar{k} = (1 \times t)^* \mathscr{F}$; allgemeiner sei für jeden Morphismus $h: S \to T$ mit $\mathscr{F}_S$ die Garbe $F \otimes_T \mathcal{O}_S = (1 \times h)^* \mathscr{F}$ auf $V_S = V \times_T S$ bzeichnet, mit p_S die Projektion $V_S \to S$. Es interessiert das Verhalten der Kohomologie $H^*(V_t, \mathscr{F}_t)$ bei variablem t; die diesbezüglichen Resultate stammen von GROTHENDIECK (vgl. [2], Kap. III, § 7), für den analytischen Fall von GRAUERT.
Eine leichter zugängliche Darstellung findet man bei MUMFORD [5], Lecture 7, und [6], § 5. Generell werde $\mathscr{F}$ als T-flache kohärente Garbe auf V vorausgesetzt, ferner sei $V \to T$ eigentlich und T Noethersch. Dann sind die folgenden Resultate (1) bis (4) die grundlegenden Fakten über Basiswechsel:

(1) $R^q p_* \mathscr{F}$ ist eine kohärente Garbe auf T; für jedes T-Schema $S \to T$ gibt es einen kanonischen Morphismus („Basiswechsel")

$$(R^q p_* \mathscr{F})_S \to R^q (p_S)_* (\mathscr{F}_S)$$

(induziert kozyklenweise durch die Abbildungen $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}_S(U_S)$ für offene $U \subset V$ oder auf Grund der Theorie der δ-Funktoren).
Insbesondere erhält man für $t \in T$ Morphismen

$$(R^q p_* \mathscr{F}) \otimes k(t) \to H^q(V_t, \mathscr{F}_t).$$

(2) Für gegebenes $q \in \mathbf{Z}$ gilt: Die Menge T_q aller $t \in T$, so daß

$$R^q p_* \mathscr{F} \otimes k(t) \to H^q(V_t, \mathscr{F}_t)$$

surjektiv ist, ist offen. Für jeden beliebigen Morphismus g: $S \to T$ mit $g(S) \subseteq T_q$ ist dann

$$(R^q p_* \mathscr{F})_S \to R^q (p_S)_* (\mathscr{F}_S)$$

ein Isomorphismus.

(3) Auf dem offenen Unterschema $T_q \cap T_{q-1}$ (d. h., wenn

$$R^j p_* \mathcal{F} \otimes k(t) \to H^j(V_t, \mathcal{F}_t)$$

surjektiv für $j = q - 1$ und q ist) ist $R^q p_* \mathcal{F}$ lokal frei, und $T_q \cap T_{q-1}$ ist als Teilmenge von T_q dadurch charakterisiert.

Die Aussagen (2) und (3) erhält man, indem man zeigt, daß man den Komplex $C^*(U, \mathcal{F})$ der alternierenden Čechschen Koketten bezüglich einer affinen Zariski-offenen Überdeckung $\{U \to V\}$ (wobei wir o. B. d. A. $T = \operatorname{Spec}(A)$ als affin annehmen können) durch einen endlichen projektiven Komplex $K^\bullet = (K^0 \to K^1 \to \cdots \to K^n)$ ersetzen kann, so daß für jedes affine T-Schema $S = \operatorname{Spec}(B) \to T$

$$H^*(V_S, \mathcal{F}_S) = H^p(K^\bullet \otimes_A B)$$

gilt (vgl. Mumford [6], § 5). Hieraus folgt weiterhin unmittelbar

(4) a) Die Funktion $t \mapsto h^q(\mathcal{F}_t) = \dim H^q(V_t, \mathcal{F}_t)$ ist halbstetig in dem Sinne, daß $\{t \mid h^q(\mathcal{F}_t) \leqq r$ für alle $r \in \mathbf{Z}\}$ in T offen ist.
b) Die Funktion $t \mapsto \chi(\mathcal{F}_t) = \sum_{q \geqq 0} (-1)^q h^q(\mathcal{F}_t)$ ist stetig auf T.

(5) Das offene Unterschema $T'_q = \{t \mid h^{q+1}(\mathcal{F}_t) = 0\}$ ist in T_q enthalten, und es ist

$$T'_q \subseteq T - \bigcup_{j>q} \operatorname{supp} R^j p_* \mathcal{F}.$$

Beweis. Es ist $T'_q \subseteq T_{q+1}$, und daher ist auf T'_q nach (2) und dem Lemma von Nakayama $R^{q+1}p_*\mathcal{F} = 0$, also lokal frei. Nach (3) ist $T_{q+1} \cap T_q$ die Teilmenge von T_{q+1}, auf der $R^{q+1}p_*\mathcal{F}$ lokal frei ist. Also ist $T'_q \subseteq T_{q+1} \cap T_q \subseteq T_q$. Für $n \gg 0$ ist $H^{n+1}(V_t, \mathcal{F}_t) = 0$ für alle t, also $T = T'_n \subseteq T_n$ (und somit $H^n(V_t, \mathcal{F}_t) = 0$), also $T = T'_{n-1} \subseteq T_{n-1}$ usw.

(6) Ist T reduziert und irreduzibel, so ist die Funktion $t \mapsto h^q(\mathcal{F}_t)$ genau dann konstant, wenn $T = T_q$ und $R^q p_* \mathcal{F}$ lokal frei ist. In diesem Fall ist $T_{q-1} = T$.

Beweis. Es sei $t \mapsto h^q(\mathcal{F}_t)$ konstant; aus $T = T_q$ folgt dann (nach (2) und dem Lemma von Nakayama) leicht, daß $R^q p_* \mathcal{F}$ lokal frei vom Rang $h^q(\mathcal{F}_t)$ ist.
Wir wollen daher zeigen, daß $T = T_q$ gilt. Offensichtlich ist T_q nicht leer, da der allgemeine Punkt von T darin enthalten ist. Wir können durch Lokalisierung annehmen, daß T Spektrum eines lokalen Ringes A ist und $T_q \subseteq T$ das punktierte Spektrum $\operatorname{Spec}(A) - \{\mathfrak{m}_A\}$ enthält. Der lokale Ring A wird durch einen diskreten Bewertungsring B dominiert. Ist k (bzw. k') der Restklassenkörper von A (bzw. B), u ein Primelement von B, so ist folgendes Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccc}
[H^q(V, \mathcal{F}) \otimes_A k] \otimes_k k' & \longrightarrow & H^q(V, \mathcal{F}/\mathfrak{m}_A \mathcal{F}) \otimes_k k' \\
\downarrow & & \downarrow \wr \\
H^q(V_B, \mathcal{F}_B) \otimes_B k' & \longrightarrow & H^q(V_B, \mathcal{F}_B/u\mathcal{F}_B)
\end{array}$$

Um zu zeigen, daß $T_q = T$, d. h. $\mathfrak{m}_A \in T_q$, ist, genügt es offensichtlich, daß der untere Pfeil surjektiv ist. Aus der exakten Folge

$$0 \to \mathcal{F}_B \to \mathcal{F}_B \to \mathcal{F}_B/u\mathcal{F}_B \to 0 \tag{*}$$

erhalten wir

$$H^q(V_B, \mathcal{F}_B) \otimes_B k' \subseteq H^q(V_B, \mathcal{F}_B/u\mathcal{F}_B),$$

und weil $h^q(\mathscr{F}_t)$ konstant ist, muß somit

$$H^q(V_B, \mathscr{F}_B) \otimes_B k' \cong H^q(V_B, \mathscr{F}_B/u\mathscr{F}_B)$$

sein, woraus $T = T_q$ folgt. Insbesondere ist dann $H^q(V_B, \mathscr{F}_B)$ frei, und aus $(*)$ folgt

$$H^{q-1}(V_B, \mathscr{F}_B) \otimes_B k' \cong H^{q-1}(V_B, \mathscr{F}_B/u\mathscr{F}_B)$$

und analog wie oben $T = T_{q-1}$, q. e. d.

(7) („See-saw-Theorem"; vgl. MUMFORD [6], § 10.) Ist $V \xrightarrow{p} S$ eigentlich und flach, $\mathscr{L}$ eine umkehrbare Garbe auf V, so gibt es ein abgeschlossenes Unterschema $Z \subset T$, das durch folgende Eigenschaften eindeutig charakterisiert ist:

a) $\mathscr{L}_Z$ ist von der Form $p_Z^*\mathscr{M}$, $\mathscr{M}$ eine umkehrbare Garbe auf Z.

b) Ist $S \to T$ derart, daß $\mathscr{L}_S$ von der Form $p_S^*\mathscr{N}$ ist, $\mathscr{N}$ eine umkehrbare Garbe auf S, so zerlegt sich $S \to T$ in $S \to Z \supset T$.

Die Z zugrunde liegende Punktmenge besteht also aus allen Punkten $t \in T$, in denen $\mathscr{L}_t$ trivial ist.

2. Dualität für Kohomologie quasikohärenter Garben

Im folgenden sei k ein fester Grundkörper, $\mathbf{P}^n$ der n-dimensionale projektive Raum über k und

$$\omega_{\mathbf{P}^n} = \Omega^1_{\mathbf{P}^n/k} \cong \mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}.$$

Ist X ein beliebiges projektives Schema, sind $r > q$ natürliche Zahlen und ist ω eine $\mathscr{O}_X$-Modulgarbe, so liefert die Yonedainterpretation von Ext eine bilineare Abbildung

$$H^q(X, \mathscr{F}) \otimes \mathscr{E}xt^{r-q}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \omega) \xrightarrow{Y} H^r(X, \omega). \tag{$*$}$$

Für $X = \mathbf{P}^r$, $\omega = \omega_{\mathbf{P}^r}$, ist das nach Resultaten von J.-P. SERRE[1]) eine vollständige Paarung (und $H^r(\mathbf{P}^r, \omega_{\mathbf{P}^r}) \cong k$).
Für ein r-dimensionales abgeschlossenes Cohen-Macaulaysches Unterschema $X \subset \mathbf{P}^n$ sei

$$\omega_X := \mathscr{E}xt^{n-r}_{\mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}}(\mathscr{O}_X, \omega_{\mathbf{P}^n});$$

dann gibt es einen kanonischen Morphismus

$$H^r(X, \omega_X) \xrightarrow{i} H^n(\mathbf{P}^n, \omega_{\mathbf{P}^n}),$$

der sich aus der Spektralfolge

$$E_2^{ij} := H^i(\mathbf{P}^n, \mathscr{E}xt^j(\mathscr{O}_X, \omega_{\mathbf{P}^n})) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{i+j}_{\mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}}(\mathscr{O}_X, \omega_{\mathbf{P}^n})$$

und der durch

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}}(\mathscr{O}_X, \omega_{\mathbf{P}^n}) \otimes H^0(\mathbf{P}^n, \mathscr{O}_X) \xrightarrow{Y} H^n(\mathbf{P}^n, \omega_{\mathbf{P}^n})$$

---

[1]) J.-P. SERRE, Faisceaux algébriques cohérents. Ann. Math. *61* (1955), 197–278.

induzierten Abbildung $e \mapsto Y(e \otimes 1)$ von

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}}(\mathcal{O}_X, \omega_{\mathbf{P}^n}) \to H^n(\mathbf{P}^n, \omega_{\mathbf{P}^n})$$

ergibt, da $E_2^{ij} = 0$ für $j < n - r$, also

$$E_2^{r,n-r} \twoheadrightarrow E_\infty^{r,n-r} \subseteq \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}}(\mathcal{O}_X, \omega_{\mathbf{P}^n})$$

gilt. Das liefert nach (*) mit $\omega = \omega_X$ eine Paarung $i \circ Y$:

$$H^q(X, \mathcal{F}) \otimes \mathrm{Ext}^{r-q}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \omega_X) \to H^n(\mathbf{P}^n, \omega_{\mathbf{P}^n}), \tag{**}$$

und es gilt folgender

Satz (Grothendieck [3]). *Ist $X \in \mathbf{P}^n$ rein r-dimensional und Cohen-Macaulaysch, so ist für alle $q \in \mathbf{Z}$ die Paarung (**) nicht ausgeartet.*

Beweis. Es gilt

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}\big(\mathcal{F}, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}}(\mathcal{O}_X, -)\big) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}}(\mathcal{F}, -)$$

auf der Kategorie der $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}$-Moduln. Die zu diesen Funktoren gehörige Spektralfolge ist

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_X}\big(\mathcal{F}, \mathcal{E}xt^j_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}}(\mathcal{O}_X, -)\big) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{i+j}_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}}(\mathcal{F}, -).$$

Ist $\mathcal{O}_X$ Cohen-Macaulaysch, so ist $dh_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}}(\mathcal{O}_X) = n - r$, also

$$\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}}(\mathcal{O}_X, \omega_{\mathbf{P}^n}) = 0$$

für $j \neq n - r$, also

$$\mathrm{Ext}^{r-q}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \omega_X) = \mathrm{Ext}^{r-q+n-r}_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}}(\mathcal{F}, \omega_{\mathbf{P}^n}) = \mathrm{Ext}^{n-q}_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}}(\mathcal{F}, \omega_{\mathbf{P}^n}),$$

und die Behauptung ist damit auf den Serreschen Dualitätssatz für $\mathbf{P}^n$ reduziert, q. e. d.

3. Verschwindungssätze

Zur Konstruktion des Hilbertschemas ist es günstig, nach einer Idee aus Mumford [5], Lecture 14, zunächst einige Verschwindungssätze zu verallgemeinern.
Es sei k ein Körper, $\mathbf{P}^n = \mathrm{Proj}\, \mathbf{Z}\,[T_0, \ldots, T_n]$, $\mathbf{P}^n_k = \mathbf{P}^n \times \mathrm{Spec}\,(k)$ und S ein über k algebraisches Schema.

Definition. Eine kohärente Garbe $\mathcal{F}$ auf $\mathbf{P}^n_k$ heißt *m-regulär*, falls

$$H^i\big(\mathbf{P}_k, \mathcal{F}(m - i)\big) = (0)$$

für alle $i > 0$ gilt. Eine Familie $\mathcal{F}$ von kohärenten Garben auf $\mathbf{P}^n_k$ über S (d. h. eine kohärente Garbe $\mathcal{F}$ auf $\mathbf{P}^n_k \times_k S = \mathbf{P}^n \times S$ heißt *m-regulär*, falls $\mathcal{F}_\xi = (1 \times \xi)^* \mathcal{F}$ für jeden geometrischen Punkt $\xi \in S(\bar{k})$ m-regulär ist.

Satz 1. *Es sei $\mathscr{F}$ eine kohärente m-reguläre Garbe auf $\mathbf{P}^n \times S$ und p die Projektion von $\mathbf{P}^n \times S$ auf den zweiten Faktor. Dann gilt:*

a) $R^i p_* \mathscr{F}(k - i) = 0$ *für* $k \geqq m$, $i > 0$
(folglich ist $\mathscr{F}$ auch k-regulär für $k \geqq m$).

b) $\sum\limits_{\nu=0}^{n} T_\nu p_* \mathscr{F}(m) = p_* \mathscr{F}(m + 1)$
(folglich ist $\bigoplus\limits_{k \geq m} p_* \mathscr{F}(k)$ durch $p_* \mathscr{F}(m)$ über $\mathbf{Z}[T_0, \ldots, T_n]$ erzeugt).

Beweis. Basiswechsel führt dazu, daß folgendes zu beweisen ist. Es sei $S = \operatorname{Spec}(k)$ und $\mathscr{F}$ kohärente m-reguläre Garbe auf $\mathbf{P}_k^n = \operatorname{Proj} k[T_0, \ldots, T_n]$. Dann gilt

a') $H^i(\mathscr{F}(k - i))$ für $k \geqq m$, $i > 0$.

b') $\sum\limits_{\nu=0}^{n} T_\nu H^0(\mathscr{F}(m)) = H^0(\mathscr{F}(m + 1))$.

Wir werden den Beweis durch Induktion über n führen.
Für $n = 0$ sind a') und b') offensichtlich. Wir nehmen daher an, daß a') und b') für $n - 1$ erfüllt sind.
Es sei h Linearform aus $k[T_0, \ldots, T_n]$, so daß $h \notin \mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(\mathscr{F})$ gilt. H sei die entsprechende Hyperebene in $\mathbf{P}_k^n$. Dann ist $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^n}(1) \cong \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^n}(H)$, und die Folge

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^n}(-1) \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^n} \to \mathcal{O}_H \to 0$$

ist exakt. Da H durch h definiert und $H \cap \operatorname{Ass}(\mathscr{F}) = \emptyset$ ist, ist der Morphismus $\mathscr{F} \xrightarrow{\otimes h} \mathscr{F}(1) = \mathscr{F} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^n}(1)$ bzw. $\mathscr{F}(k - 1) \xrightarrow{\otimes h} \mathscr{F}(k)$ injektiv. Daher erhalten wir durch Tensorierung der obigen Sequenz mit $\mathscr{F}(k)$ die exakte Sequenz

$$0 \to \mathscr{F}(k - 1) \to \mathscr{F}(k) \to \mathcal{O}_H \otimes \mathscr{F}(k) = \mathscr{F}_H(k) \to 0. \tag{1}$$

Daraus gewinnen wir die exakten Folgen

$$H^i(\mathscr{F}(k)) \to H^i(\mathscr{F}_H(k)) \to H^{i+1}(\mathscr{F}(k - 1)).$$

Wir können daraus schließen, daß auch $\mathscr{F}_H$ m-regulär ist. Wegen $H \cong \mathbf{P}_k^{n-1}$ trifft für $\mathscr{F}_H$ die Induktionsvoraussetzung zu. Daher ist in der Sequenz

$$H^{i+1}(\mathscr{F}(m - i - 1)) \to H^{i+1}(\mathscr{F}(m - i)) \to H^{i+1}(\mathscr{F}_H(m - i)),$$

die wir aus (1) gewinnen, neben der ersten Gruppe auch die letzte Gruppe gleich Null. Damit ist $\mathscr{F}$ als $(m + 1)$-regulär nachgewiesen. Damit ergibt eine iterative Anwendung der eben benutzten Methode die Richtigkeit von a').
Wegen der Induktionsvoraussetzung b') für $\mathscr{F}_H$ ist im folgenden kommutativen Diagramm τ surjektiv:

$$\begin{tikzcd}
\sum\limits_{\nu=0}^{n} T_\nu H^0(\mathscr{F}(m)) \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[d, "\mu"] & & \sum\limits_{\nu=0}^{n} T_\nu H^0(\mathscr{F}_H(m)) \arrow[d, "\tau"] \\
H^0(\mathscr{F}(m)) \arrow[r, "\otimes h"] & H^0(\mathscr{F}(m + 1)) \arrow[r, "\nu"] & H^0(\mathscr{F}_H(m + 1))
\end{tikzcd}$$

Wegen $H^1(\mathscr{F}(m - 1)) = 0$ ist aber auch σ surjektiv. Daher ist

$$\nu(\operatorname{Im}(\mu)) = H^0(\mathscr{F}_H(m + 1)),$$

bzw. $H^0(\mathcal{F}(m+1))$ wird von $hH^0(\mathcal{F}(m))$ und von $\operatorname{Im}(\mu)$ erzeugt. Es ist aber $hH^0(\mathcal{F}(m)) \subseteq \operatorname{Im}(\mu)$. Damit ist also

$$\sum_{\nu=0}^{n} T_\nu H^0(\mathcal{F}(m)) = H^0(\mathcal{F}(m+1))$$

gezeigt, q. e. d.

Bemerkung. Es sei $0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to 0$ eine exakte Folge von kohärenten flachen Garben über $\mathbf{P}^n \times S$ und $\mathcal{G}$ m-regulär. Dann ergibt sich unmittelbar aus der abgeleiteten Kohomologiesequenz, daß $\mathcal{E}$ genau dann m-regulär ist, wenn $\mathcal{F}$ m-regulär ist.

Satz 2. *Es seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{E}$ kohärente S-flache Garben auf $\mathbf{P}^n \times S$ und $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$. Weiterhin seien $a_0, \ldots, a_n$ durch das Hilbertpolynom*

$$\chi(\mathcal{F}(m)) = \sum a_j \binom{m+j}{j}$$

von $\mathcal{F}$ bestimmt. Es existiert ein Polynom $F(t_0, \ldots, t_n) \in \mathbf{Q}[t_0, \ldots, t_n]$, unabhängig von $\mathcal{F}$, so daß $\mathcal{F}$ m-regulär für $m \geqq F(a_0, \ldots, a_n)$ ist.

Beweis. Basiswechsel führt wieder dazu, daß der Satz für $S = \operatorname{Spec}(k)$ zu beweisen ist. Der Beweis wird durch vollständige Induktion geführt. Da für $n = 0$ alles offensichtlich ist, können wir annehmen, daß Satz 2 für $n - 1$ richtig ist.
Um die Reduktion von n auf $n - 1$ durchführen zu können, suchen wir wieder eine geeignete Hyperebene H $(\cong \mathbf{P}_k^{n-1})$ in $\mathbf{P}_k^n$. Da für eine kohärente Garbe $\mathcal{M}$ die Menge $\operatorname{Ass} \mathcal{M}$ endlich ist, ist also auch $\operatorname{Ass}(\mathcal{E}) \cup \operatorname{Ass}(\mathcal{E}/\mathcal{F})$ endlich, und daher gibt es eine Hyperebene H mit $H \cap \operatorname{Ass}(\mathcal{E}) \cup (\operatorname{Ass}(\mathcal{E}/\mathcal{F})) = \emptyset$. Es sei $\mathcal{F}_H := \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_H$, $\mathcal{E}_H := \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_H$ und H durch die Linearform $h \in k[T_0, \ldots, T_n]$ definiert.
Aus

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^n}(-1) \xrightarrow{\otimes h} \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^n} \to \mathcal{O}_H \to 0 \tag{1}$$

folgt $\operatorname{Tor}_1^{\mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^n}}(\mathcal{O}_H, \mathcal{E}/\mathcal{F}) = 0$, da wegen der obigen Wahl von H bzw. h gerade erreicht wird, daß h kein Nullteiler in $\mathcal{F}$ bzw. $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ ist. Damit folgt aus

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}/\mathcal{F} \to 0$$

durch Tensorierung mit $\mathcal{O}_H$, daß $\mathcal{F}_H$ kohärente Untergarbe von $\mathcal{E}_H$ ist. Aus (1) ergeben sich wieder wie beim Beweis von Satz 1 für jedes m die exakten Folgen

$$0 \to \mathcal{F}(m) \to \mathcal{F}(m+1) \to \mathcal{F}_H(m+1) \to 0. \tag{2}$$

Damit ist

$$\chi(\mathcal{F}_H(m+1)) = \chi(\mathcal{F}(m+1)) - \chi(\mathcal{F}(m))$$
$$= \sum_{i=0}^{n} a_i \left[\binom{m+i+1}{i} - \binom{m+i}{i}\right] = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} \binom{m+i}{i},$$

und nach Induktionsvoraussetzung existiert ein Polynom G, unabhängig von $\mathcal{F}_H$, so daß die kohärente Untergarbe $\mathcal{F}_H$ von $\mathcal{E}_H$ $G(a_1, \ldots, a_n)$-regulär ist. Wir setzen $m_1 = G(a_1, \ldots, a_n)$. Dann ergibt sich aus (2) für $m \geqq m_1 - 2$

$$0 \to H^0(\mathcal{F}(m)) \to H^0(\mathcal{F}(m+1)) \xrightarrow{l_{m+1}} H^0(\mathcal{F}_H(m+1))$$
$$\to H^1(\mathcal{F}(m)) \to H^1(\mathcal{F}(m+1)) \to 0 \tag{3}$$

bzw. für $i \geqq 2$ und $m \geqq m_1 - 1$

$$0 \to H^i(\mathscr{F}(m)) \to H^i(\mathscr{F}(m+1)) \to 0. \tag{4}$$

Aus (4) folgt $H^i(\mathscr{F}(m-i)) = 0$ für $i \geqq 2$, da ja nach einem Theorem von SERRE $H^i(\mathscr{F}(m)) = 0$ für $m \gg 0$ und $i \geqq 1$ ist. Das bedeutet, daß bezüglich $H^2, H^3, \ldots$ die Garbe $\mathscr{F}$ m_1-regulär ist. Daher haben wir jetzt H^1 zu untersuchen. Da es nach (3) einen surjektiven Morphismus $H^1(\mathscr{F}(m)) \to H^1(\mathscr{F}(m+1))$ gibt, ist

$$\dim H^1(\mathscr{F}(m)) \geqq \dim H^1(\mathscr{F}(m+1)). \tag{5}$$

Es sei $m_2 := m_1 + \dim H^1(\mathscr{F}(m_1 - 1))$, und wir behaupten, daß $\mathscr{F}$ m_2-regulär ist. Da nach dem Obigen $H^i(\mathscr{F}(m_2 - i)) = 0$ ist für $i \geqq 2$, ist noch $H^1(\mathscr{F}(m_2 - 1)) = 0$ zu zeigen. Das folgt aber aus dem folgenden Sachverhalt: In (5) kann das Gleichheitszeichen genau dann gelten, wenn $\dim H^1(\mathscr{F}(m)) = 0$ ist.

Beweis. Da $H^1(\mathscr{F}(m)) = 0$ ist für $m \gg 0$, genügt es zu zeigen, daß aus $\dim H^1(\mathscr{F}(m)) = \dim H^1(\mathscr{F}(m+1))$

$$\dim H^1(\mathscr{F}(m+1)) = \dim H^1(\mathscr{F}(m+2))$$

folgt. Aus (3) folgt aber, daß $\dim H^1(\mathscr{F}(m)) = \dim H^1(\mathscr{F}(m+1))$ für $m > m_1 - 2$ genau dann gilt, wenn l_{m+1} surjektiv ist. Damit ist also zu zeigen, daß l_{m+2} surjektiv ist, falls l_{m+1} surjektiv ist.

Dazu betrachten wir das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} H^0(\mathscr{F}(m+1)) \otimes H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^n}(1)) & \longrightarrow & H^0(\mathscr{F}(m+2)) \\ \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle l_{m+2}} \\ H^0(\mathscr{F}_H(m+1)) \otimes H^0(\mathcal{O}_H(1)) & \xrightarrow{q} & H^0(\mathscr{F}_H(m+2)) \end{array}$$

q ist surjektiv infolge der Induktionsvoraussetzung für $\mathscr{F}_H$ (und Satz 1), und p ist surjektiv, da l_{m+1} surjektiv vorausgesetzt wurde. Daher ist $q \circ p$ surjektiv und deshalb auch l_{m+2}.

Damit haben wir gezeigt, daß $\mathscr{F}$ $(m_1 + \dim H^1(\mathscr{F}(m_1 - 1)))$-regulär ist. Wegen $m_1 = G(a_1, \ldots, a_n)$ genügt es jetzt zum vollständigen Beweis von Satz 2, $H^1(\mathscr{F}(m_1 - 1))$ durch den Wert eines entsprechenden Polynoms H an der Stelle $(a_0, \ldots, a_n, m_1)$ abzuschätzen:

$$\begin{aligned} \dim H^1(\mathscr{F}(m_1 - 1)) &= \dim H^0(\mathscr{F}(m_1 - 1)) - \chi(\mathscr{F}(m_1 - 1)) \\ &\leqq \dim H^0(\mathscr{E}(m_1 - 1)) - \chi(\mathscr{F}(m_1 - 1)) \\ &\leqq H(a_0, \ldots, a_n, m_1) = H(a_0, \ldots, a_n, G(a_1, \ldots, a_n)). \end{aligned}$$

Damit hat also das Polynom

$$F(t_0, \ldots, t_n) = G(t_1, \ldots, t_n) + H(t_0, \ldots, t_n, G(t_1, \ldots, t_n))$$

die im Satz geforderten Eigenschaften.

Zum Abschluß dieses Abschnitts erwähnen wir den Verschwindungssatz von KODAIRA:

Satz. *Es sei X eine singularitätenfreie algebraische Mannigfaltigkeit über dem Körper der komplexen Zahlen $\mathbf{C}$ und $\mathscr{L}^{-1}$ ein amples Linienbündel. Dann gilt $H^q(X, \Omega^p \otimes \mathscr{L}) = (0)$ für $p + q < \dim X$ (dabei ist Ω^p die Garbe der p-Differentialformen auf X).*

Beweis. Wir führen den Beweis mit vollständiger Induktion über die Dimension von X. Ist X eine Kurve, so ist der Satz klar (es kommt dabei ja nur darauf an zu zeigen, daß $H^0(X, \mathscr{L}) = (0)$ ist. Wir nehmen zunächst einmal an, daß $\mathscr{L}^{-1}$ „very ample" ist. Dann existiert ein effektiver und nichtsingulärer Divisor D mit $\mathcal{O}_X(D) = \mathscr{L}^{-1}$. Nach dem Satz von BERTINI können wir annehmen, daß D irreduzibel ist. Für $\mathscr{L}' := \mathscr{L} \otimes \mathcal{O}_D$ gilt dann $H^p(D, \Omega^p \otimes \mathscr{L}') = (0)$ für $p + q < \dim X - 1$ (Induktionsvoraussetzung). Wir betrachten nun die exakten Sequenzen

$$0 \to \mathscr{L} \otimes \Omega_X^q \to \Omega_X^q \to \Omega_X^q \otimes \mathcal{O}_D \to 0, \tag{1}$$

$$0 \to \mathscr{L}' \to \Omega_X \otimes \mathcal{O}_D \to \Omega_D \to 0. \tag{2}$$

Aus der zweiten erhalten wir

$$0 \to \Omega_D^{q-1} \otimes \mathscr{L}' \to \Omega_X^q \otimes \mathcal{O}_D \to \Omega_D^q \to 0. \tag{3}$$

Aus (1) und (3) erhalten wir die exakte Kohomologiesequenz

$$\begin{tikzcd}
 & & H^p(D, \Omega_D^q) \\
H^p(X, \mathscr{L} \otimes \Omega_X^q) \arrow[r] & H^p(X, \Omega_X^q) \arrow[ur, "g_p"] \arrow[r, "h_p"] & H^p(D, \Omega_X^q \otimes \mathcal{O}_D) \arrow[u, "a_p"'] \\
 & & H^p(D, \Omega_D^{q-1} \otimes \mathscr{L}') \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

dabei ist g_p die durch die Einschränkung induzierte kanonische Abbildung. Nach Induktionsvoraussetzung ist a_p Isomorphismus für $p + q < \dim X - 1$ und injektiv für $p + q = \dim X - 1$. Aus der exakten Sequenz folgt die Behauptung, wenn wir nachweisen können, daß g_p auch Isomorphismus für $p + q = \dim X - 1$ und injektiv für $p + q = \dim X - 1$ ist.
Während bisher der Beweis rein algebraisch verlief, benutzen wir nun transzendente Hilfsmittel.

(1) Satz von LEFSCHETZ über Hyperebenenschnitte: *Es seien X, D wie zuvor; dann ist die kanonische Abbildung*

$$H^i(X, \mathbf{C}) \to H^i(D, \mathbf{C})$$

ein Isomorphismus für $i < n - 1$ und injektiv für $i = n - 1$.

(2) Hodge-Zerlegung:

$$H^i(X, \mathbf{C}) \cong \bigoplus_{p+q=i} H^p(X, \Omega_X^q).$$

(1) und (2) liefern nun genau die Bedingungen für g_p.

Es bleibt nun noch zu zeigen, daß wir uns stets an den Fall einer „very amplen" Garbe beschränken können. Es sei nun n eine natürliche Zahl, so daß $\mathscr{L}^{-n}$ „very ample" ist. Dann existiert eine n-fach zyklische Überlagerung $X' \xrightarrow{r} X$, so daß $r^*\mathscr{L}^{-1}$ „very ample" ist. Dann ist

$$H^p(X', \Omega_{X'}^q \otimes r^*\mathscr{L}) \cong H^p(X, r_*\Omega_{X'}^q \otimes \mathscr{L}),$$

weil r ein endlicher Morphismus ist. Nun hat die kanonische Abbildung $\Omega^q_X \to r_* \Omega^q_{X'}$ einen Schnitt, nämlich $\frac{1}{n} \cdot$ Spur. Somit ist $H^p(X, \Omega^q_X \otimes \mathscr{L})$ in $H^p(X, r_* \Omega^q_{X'} \otimes \mathscr{L})$ enthalten, q. e. d.

Der Satz läßt sich nicht für den Fall eines Grundkörpers der Charakteristik $p \neq 0$ verallgemeinern. So hat beispielsweise MUMFORD[1]) ein Beispiel dafür angegeben, in dem mit unseren Bezeichnungen $H^1(X, \mathscr{L})$ von Null verschieden ist (X ist eine Fläche). Das liegt daran, daß der Frobeniusendomorphismus auf $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ nicht injektiv zu sein braucht. Es wäre interessant, Bedingungen dafür zu finden, daß der Satz über Körpern mit der Charakteristik p gilt. So kann man sich überlegen, daß für den Fall einer Fläche vom allgemeinen Typ genau dann $H^0(X, \Theta) = H^0(X, \Omega_X \otimes \omega_X^{-1}) = 0$ ist, wenn die Abbildung $H^0(X, \Omega_X) \to H^0(D, \Omega_D)$ injektiv ist (dabei sei $\omega_X = \mathcal{O}_X(D)$ der kanonische Divisor auf X, den wir hier als „very ample" voraussetzen). Es bleibt jedoch offen, für welche Flächen diese Bedingung nicht erfüllt ist.

4. Hilbertschema

Wir wollen das vor uns stehende Problem an Hand des affinen Falls erklären.

Es sei $S = \operatorname{Spec} A$, $\operatorname{Proj} A[T_0, \ldots, T_n] = \mathbf{P}^n \times S$ der projektive Raum über S und $P(t) \in \mathbf{Z}[t]$, so daß $P(m) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \binom{m+\nu}{\nu}$ für $m \in \mathbf{Z}$ ist, wobei die $a_\nu \in \mathbf{Z}$ sind und $a_n > 0$ ist.

Wir betrachten den Funktor $Q^P = Q$ aus der Kategorie der S-Schemata in die Kategorie der Mengen (N sei eine feste natürliche Zahl):

$$S' \mapsto \{\mathscr{G} \subseteq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n \times S'} \mid \mathscr{F} = \mathcal{O}^{N+1}_{\mathbf{P}^n \times S'}/\mathscr{G} \text{ ist } S'\text{-flach und besitzt das Hilbertpolynom } P\}.$$

Dabei soll also $\chi(\mathscr{F}_\xi(r)) = P(r)$ für die betrachteten Quotientengarben für alle $r \geqq 0$ und für alle geometrischen Punkte ξ von S' gelten. Da $\mathscr{F}$ S'-flach ist, ist $\chi(\mathscr{F}_\xi(r))$ auch tatsächlich unabhängig von dem betrachteten geometrischen Punkt ξ.

Wir fragen nun, ob der Funktor Q darstellbar ist, d. h, wir suchen ein S-Schema $H^P = H$ und eine universelle Untergarbe $\mathscr{N} \subseteq \mathcal{O}^{N+1}_{\mathbf{P}^n \times H}$; $\mathcal{O}^{N+1}_{\mathbf{P}^n \times H}/\mathscr{N}$ ist flach über H, so daß der Morphismus

$$\operatorname{Hom}_S(T, H) \to Q(T),$$
$$\varphi\colon T \to H \mapsto \varphi^*(\mathscr{N}) = \mathscr{N} \otimes_{\mathcal{O}_H} \mathcal{O}_T$$

bijektiv und funktoriell in den S-Schemata T ist. Die Idee für die Konstruktion eines den Funktor Q darstellenden Schemas ist die folgende. Es sei $\mathscr{G} \in Q(S)$. Dann ist $\mathscr{G}$ Untergarbe von $\mathcal{O}^{N+1}_{\mathbf{P}^n \times S} = A[T_0, \ldots, T_n]^{N+1\sim}$ und hat daher die Form $\mathscr{G} = I^\sim$, wobei I homogener Untermodul in $A[T_0, \ldots, T_n]^{N+1} = H$ ist. Wir bezeichnen mit $I(r)$ bzw. $H(r)$ die Formen vom Grad r aus I bzw. H. Dann ist $H(r)/T(r)$ für hinreichend großes r frei vom Rang $P(r)$. Wesentlich ist nun, daß man ein numerisches Polynom F konstruieren kann, so daß $H/I^\sim$ m-regulär ist, $m = F(a_0, \ldots, a_n)$, wobei $a_0, \ldots, a_n$ die Koeffizienten des Hilbertpolynoms sind. Daraus folgt, daß für alle homogenen Untermoduln I, für die $I^\sim \in Q(S)$ gilt, der Modul $H(r)/I(r)$ frei vom Rang $P(r)$ für $r \geqq m$ ist. Dadurch können wir, indem wir dem Paar $(I(m) \subset H(m))$ die Plückerkoordinaten zuordnen, $\mathscr{G} \in Q(S)$ auf einen Punkt der Graßmannschen

[1]) D. MUMFORD, Pathologies III. Amer. J. Math. *89* (1967), 94—104. Die Fläche ist allerdings nicht singularitätenfrei.

Mannigfaltigkeit Grass $(P(m), H(m))$ abbilden und haben damit eine injektive Abbildung $\varphi_S: Q(S) \to \text{Grass}\,(P(m), H(m)) := G(S)$ erhalten (G bezeichnet hierbei das Graßmannschema). G ist ein projektives Schema, und um die Darstellbarkeit von Q nachzuweisen, genügt es zu zeigen, daß durch die φ_S eine abgeschlossene Einbettung φ von Q in G induziert wird.

Es sei p ein Punkt von G. Dann entspricht p einer Inklusion $I(m) \subseteq H(m)$, wobei $\dim\,(H(m)/I(m)) = P(m)$ gilt. Mit I_* werde das von $I(m)$ in H erzeugte homogene Ideal bezeichnet. Dann besteht also das Problem darin, algebraische Bedingungen dafür anzugeben, daß

1. $(H/I_*)^\sim$ flach über A ist und
2. $(H/I_*)^\sim$ das Hilbertpolynom P besitzt.

Satz. *Der Funktor Q ist durch ein projektives Schema, das wieder mit Q bezeichnet werden soll, und eine Q-flache Quotientengarbe $\mathscr{F}_Q = \mathcal{O}^{N+1}_{\mathbf{P}^n \times Q}/\mathscr{G}_Q$ mit dem Hilbertpolynom P darstellbar.*

Beweis. Es sei $\mathscr{G} \in Q(S)$. Wir betrachten die Sequenz

$$0 \to \mathscr{G} \to \mathcal{O}^{N+1}_{\mathbf{P}^n \times S} \to \mathcal{O}^{N+1}_{\mathbf{P}^n \times S}/\mathscr{G} \to 0 \tag{0}$$

und wollen die Quotientengarbe mit $\mathscr{F}$ bezeichnen. Wegen Satz 2 aus Abschnitt 3 wissen wir, daß für $m \gg 0$ die Garbe $\mathcal{O}^{N+1}_{\mathbf{P}^n \times S}$ und die betrachteten $\mathscr{G} \in Q(S)$ m-regulär sind. Daraus folgt zusammen mit den Korollaren 1, 2, 4 zum Satz 1 aus Abschnitt 1, daß die Sequenz

$$0 \to p_*\mathscr{G}(m) \to p_*\big(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n \times S}(m)\big)^{N+1} \to p_*\mathscr{F}(m) \to 0 \tag{1}$$

exakt ist.

Wir bezeichnen mit $\mathscr{H}_S(m)$ den $\mathcal{O}_S$-Modul der Formen vom Grad m in $\mathcal{O}_S[T_0, \ldots, T_n]$. Es ist $p_*\big(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n \times S}(m)\big) = \mathscr{H}_S(m)$ und $\mathscr{H}_S(m)^{N+1} \cong \mathcal{O}_S^{q+1}$ mit $q + 1 = (N + 1)\binom{n+m}{m}$ ist. Damit erhalten wir aus (1) die exakte Sequenz

$$0 \to p_*\mathscr{G}(m) \to \mathcal{O}_S^{q+1} \to p_*\mathscr{F}(m) \to 0. \tag{2}$$

Es sei $p + 1 := P(m)$ und Grass (q, p) der Graßmannfunktor:

$$\text{Grass}\,(q, p)\,(S) = \{\mathscr{N} \subset \mathcal{O}_S^{q+1} \mid \mathscr{N} \text{ kohärent, } \mathcal{O}_S^{q+1}/\mathscr{N} \text{ lokal frei vom Rang } p + 1\}.$$

Wegen $m \gg 0$ ist $rk\big(p_*(\mathscr{F}(m)\big) = \chi\big(\mathscr{F}(m)\big) = P(m) = p + 1$, d. h., es ist $p_*\mathscr{G}(m) \in \text{Grass}\,(q, p)\,(S)$. Andererseits ist $\mathscr{G}$ nach Satz 1 aus Abschnitt 3 durch $p_*\mathscr{G}(m)$ und damit auch $\mathscr{F}$ eindeutig bestimmt. (Es sei etwa S affin: $S = \text{Spec}\,A$. Dann ist

$$\bigoplus_{k \geq 0} H^0\big(\mathcal{O}^{N+1}_{\mathbf{P}^n \times S}(k)\big) = A[T_0, \ldots, T_n]^{N+1}.$$

Bezeichnet man mit G_0 den graduierten Untermodul, der über $A[T_0, \ldots, T_n]$ durch $H^0\big(\mathscr{G}(m)\big)$ erzeugt wird, so ist $\mathscr{G} = (G_0)^\sim$.) Damit haben wir eine Einlagerung $Q(S) \subseteq \text{Grass}\,(q, p)\,(S)$ definiert. Aus den Sätzen über Basiswechsel folgt, daß diese Einlagerung auch funktoriell ist: $Q \subseteq \text{Grass}\,(q, p)$.

Wir wollen noch einmal an die Plückerkoordinaten erinnern. Der Graßmannfunktor wird dargestellt durch eine projektive Mannigfaltigkeit

$$G(q, p) \subseteq \mathbf{P}^{\binom{q+1}{p+1}-1}.$$

Dabei wird $G(q, p)$ durch homogene Koordinaten $p_{i_0 \dots i_p}$, $0 \leqq i_0 < \dots < i_p \leqq q$, beschrieben, wobei folgendes festgelegt werde: Die übrigen Koordinaten $p_{i_0 \dots i_p}$ (d. h. solche, für die nicht $0 \leqq i_0 < \dots < i_p \leqq q$ erfüllt ist) seien dadurch bestimmt, daß $p_{i_0 \dots i_p}$ alternierend von den Indizes abhängen soll. Es gelten die Plückerrelationen

$$\sum_{\nu=0}^{p} (-1)^\nu p_{i_0 \dots i_{p-1} j_\nu} p_{j_1 \dots \check{j}_\nu \dots j_{p+1}} = 0$$

für alle Folgen $0 \leqq i_0 < \dots < i_{p-1} \leqq q$, $0 \leqq j_0 < \dots < j_{p+1} \leqq q$, durch die Grass (q, p) definiert wird als abgeschlossenes Unterschema eines projektiven Raumes.
Die Bijektion

$$\text{Grass}\,(q, p)\,(S) \overset{\omega}{\simeq} \text{Hom}\,\big(S, G(q, p)\big)$$

ist lokal folgendermaßen definiert:
Es sei $\mathcal{N} \in \text{Grass}\,(q, p)\,(S)$. Dann ist $\mathcal{N}$ lokal (über S) durch $p + 1$ lineare Formen

$$g_i = \sum_{j=0}^{q} u_{ij} T_j, \qquad u_{ij} \text{ Funktionen auf } S, \quad i = 0, \dots, p,$$

gegeben:

$$\mathcal{N} = \{(t_0, \dots, t_q) \in \mathcal{O}_S^{q+1} \mid g_i(t_0, \dots, t_q) = 0, i = 0, \dots, p\}.$$

Dann ist lokal $\omega(\mathcal{N}) = p \colon S \to G(q, p)$ definiert durch die Plückerkoordinaten

$$p_{i_0 \dots i_p} = \begin{vmatrix} u_{0i_0} & u_{0i_1} & \dots & u_{0i_p} \\ u_{1i_0} & u_{1i_1} & \dots & u_{1i_p} \\ & & \dots & \\ u_{pi_0} & u_{pi_1} & \dots & u_{pi_p} \end{vmatrix}.$$

Diese Definition ist unabhängig von der Auswahl der $p + 1$ linearen Formen g_i, die $\mathcal{N}$ definieren, da bei einer anderen Wahl dieser $p + 1$ linearen Formen die gewonnenen Plückerkoordinaten sich nur um einen gemeinsamen umkehrbaren Faktor unterscheiden.
Zum Beweis des Satzes genügt es also zu zeigen, daß die Injektion $Q \hookrightarrow \text{Grass}\,(q, p)$ eine abgeschlossene Einbettung ist. Der Vorbereitung dieses Beweises dienen die folgenden Betrachtungen.
Es sei α ein Morphismus: $S \to G$. Da $G(q, p) := G$ den Funktor Grass (q, p) darstellt und $Q \hookrightarrow \text{Grass}\,(q, p)$, hat es Sinn, zu fragen, wann $\alpha \in Q(S)$ gilt. Dazu entspreche bei der Isomorphie $\text{Grass}\,(q, p)\,(G) \simeq \text{Hom}\,(G, G)$ der Identität auf der rechten Seite die universelle Garbe $\mathcal{N} \subset \mathcal{O}_G^{q+1}$. Wegen $\mathcal{N} \in \text{Grass}\,(p, q)\,(G)$ ist $\mathcal{O}_G^{q+1}/\mathcal{N}$ lokal frei vom Rang $p + 1$ (es war $m \gg 0$). Die Antwort auf die obige Frage gibt nun

Lemma 1. *$\alpha \colon S \to G$ ist ein Element von $Q(S)$ genau dann, wenn $\mathcal{H}_S(m + l)^{N+1}/\mathcal{H}_S(l)\,\alpha^*(\mathcal{N})$ lokal frei vom Rang $m + l$ für alle $l \geqq 0$* ist.

Beweis. Ist $\alpha \in Q(S)$, so ist nach Satz 1 aus Abschnitt 3 die obige Bedingung erfüllt. Wir haben noch zu zeigen, daß, wenn $\mathcal{G}$ die durch α induzierte Untergarbe bezeichnet, die Quotientengarbe $\mathcal{F} = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n \times S}^{N+1}/\mathcal{G}$ das Hilbertpolynom P besitzt und S-flach ist. $\mathcal{G}$ wird durch α folgendermaßen induziert: Es sei $\mathcal{I}_*$ der Untermodul von $\mathcal{O}_S[T_0, \dots, T_n]^{N+1}$ der durch $\alpha^*(\mathcal{N})$ erzeugt wird. Es ist dann $\mathcal{G} = \tilde{\mathcal{I}_*}$. Da der homogene Teil vom Grad $m + l$ von $\mathcal{O}_S[T_0, \dots, T_n]$ gerade

$$\mathcal{H}_S(m + l)^{N+1}/\mathcal{H}_S(l)\,\alpha^*(\mathcal{N}) =: \mathcal{F}_l$$

ist, hat $\mathcal{O}^{N+1}_{\mathbf{P}^n\times S}/\mathcal{G}$ das Hilbertpolynom P, und da $\mathcal{F}_l$ lokal frei ist, ist $\mathcal{F}$ S-flach, d. h., es ist $\alpha \in Q(S)$.

Bemerkung. Ist $N = 0$, $S = \operatorname{Spec} A$, so ist $\alpha^*\mathcal{N}$ ein Untermodul von $A[T_0, \ldots, T_n]$, bestehend aus Formen vom Grad m. Diese Formen definieren ein abgeschlossenes Unterschema X von $\mathbf{P}^n \times S$. Die obige α entsprechende Quotientengarbe $\mathcal{F}$ von $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n\times S}$ ist dann gerade $\mathcal{O}_X$.

Lemma 2. *Es sei B ein Noethersches Schema, $\mathcal{H}_* = \mathcal{O}_B[T_0, \ldots, T_n]$, $\mathcal{M}_*$ ein $\mathcal{H}_*$-Modul, der von endlichem Typ und quasikohärent als $\mathcal{O}_B$-Modul ist. Außerdem sei $m \in \mathbf{Z}$ und $P \in \mathbf{Q}[t]$.*
Dann existiert ein lokal abgeschlossenes Schema $Z \subseteq B$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\mathcal{M}_{m+l} \otimes_{\mathcal{O}_B} \mathcal{O}_Z$ *ist für alle $l \geqq 0$ über $\mathcal{O}_Z$ lokal frei vom Rang $P(m + l)$.*

(ii) *Ist $\alpha: S \to B$ ein Morphismus, so daß $\alpha^*\mathcal{M}_{m+l}$ lokal frei vom Rang $P(m + 1)$ über $\mathcal{O}_S$ für alle $l \geqq 0$ ist, so läßt sich α über Z faktorisieren.*

Lemma 2 folgt aus den Behauptungen:

(I) $U = \{t \in B \mid rk_{k(t)}\mathcal{M}_{n,t} \otimes_{\mathcal{O}_{B(t)}} k(t) \subseteq P(n),\ n \geqq m\}$
ist eine offene Teilmenge von B.

(II) Zu jedem kohärenten Modul $\mathcal{M}$ vom Rang $\leqq r$ über einem Noetherschen Schema U existiert ein abgeschlossenes Unterschema Z von U mit den beiden folgenden Eigenschaften
a) $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_U} \mathcal{O}_Z$ ist lokal frei vom Rang r.
b) Ist $\alpha: S \to U$ ein Morphismus, so daß $\alpha^*\mathcal{M}$ lokal frei vom Rang r ist, so läßt sich α über Z faktorisieren.

Wir nehmen an, daß (I) und (II) richtig sind, und betrachten die Garben $\mathcal{M}_{n+l}$ über der durch (I) definierten offenen Teilmenge U von B, die also wieder ein Noethersches Schema ist. Setzt man in (II) $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{n+l}$ und $r = P(m + 1)$, so gewinnt man abgeschlossene Unterschemata Z_l von U mit den Eigenschaften a) und b). Da U Noethersch ist, muß die absteigende Kette der $Z(l) := Z_0 \cap Z_1 \cap \cdots \cap Z_l$ stationär werden. Dann besitzt $Z(l) = Z(l + 1) = \cdots =: Z$ die im Lemma 2 geforderten Eigenschaften.

Beweis von (I): B ist Vereinigung von endlich vielen disjunkten reduzierten Unterschemata B_i derart, daß $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_B} \mathcal{O}_{B_i}$ flach über S ist. Da S nur endlich viele Zusammenhangskomponenten besitzt, kann man sich auf die Situation beschränken, daß $\mathcal{M}$ bzw. $\mathcal{M}_n$ flach über S ist, wobei S zusammenhängend ist. In diesem Fall ist aber bekannt (siehe Verschwindungssätze), daß ein n_0 existiert, so daß für $n \geqq n_0$

$$rk_{k(t)}\big(\mathcal{M}_{n,t} \otimes_{\mathcal{O}_{B,t}} k(t)\big) = \chi(n, \mathcal{M}_*^{\sim}) = HP(n, \mathcal{M}_*^{\sim}) := R(n)$$

ist ($HP(n, \mathcal{F})$ soll das Hilbertpolynom für eine Garbe $\mathcal{F}$ bezeichnen). U_l sei die offene Menge

$$U_l = \{t \in B \mid rk_{k(t)}\big(\mathcal{M}_{m+v,t} \otimes_{\mathcal{O}_{B,t}} k(t)\big) \leqq P(v) \text{ für } m \leqq v \leqq l\}.$$

Dann ist $U = \bigcap_{l\geqq 0} U_l$ und folglich genügt es zu zeigen, daß die absteigende Folge der U_l nach endlich vielen Schritten abbricht. Gibt es aber ein $n_1 \geqq n_0$, so daß $R(n_1) > P(n_1)$ ist, so ist $U_{n_1} = \emptyset$, und die Folge U_l ist damit stationär. Ist aber $R(n) \leqq P(n)$ für alle $n \geqq n_0$, so ist $U_{n_0} = U_{n_0+1} = \cdots$.

Beweis von (II): Da $\mathcal{M}$ kohärent ist, hat man lokal eine Darstellung $\mathcal{O}_U^q \to \mathcal{O}_U^r \to \mathcal{M} \to 0$. Ist $\alpha: S \to U$ ein Morphismus, so daß $\alpha^*\mathcal{M}$ lokal frei ist, so ist in der exakten Folge $\mathcal{O}_U^q \otimes \mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_U^r \otimes \mathcal{O}_S \to \mathcal{M} \otimes \mathcal{O}_S \to 0$ der erste Homomorphismus Null, da der zweite Homomorphismus ein Isomorphismus ist. Das besagt aber, daß das geforderte abgeschlossene Unterschema Z von U durch das Ideal definiert wird, welches durch die Koeffizienten erzeugt wird, die den Homomorphismus $\mathcal{O}_U^q \to \mathcal{O}_U^r$ induzieren.

Mit Lemma 1 und Lemma 2 ist bewiesen, daß der Funktor Q darstellbar ist und daß das darstellende Objekt, welches wieder mit Q bezeichnet wird, ein lokal abgeschlossenes Unterschema der Graßmannmannigfaltigkeit G ist.

Daß aber Q auch ein abgeschlossenes Unterschema von G ist, folgt aus

Lemma 3. *Es sei C ein eindimensionales reguläres Schema (d. h. eine Kurve), C_0 ($\neq \emptyset$) ein offenes Unterschema, $a: C_0 \to Q$, $b: C \to G$ Morphismen, so daß das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} C_0 \arrow[r, "a"] \arrow[d, hook] & Q \arrow[d, hook] \\ C \arrow[r, "b"] & G \end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Dann existiert ein Morphismus $c: C \to Q$, so daß das resultierende Diagramm

$$\begin{tikzcd} C_0 \arrow[r, "a"] \arrow[d, hook] & Q \arrow[d, hook] \\ C \arrow[r, "b"'] \arrow[ur, "c"] & G \end{tikzcd}$$

kommutativ ist.

Beweis. Durch Lokalisierung gelangt man zu der Situation, daß $C = \operatorname{Spec}(R)$, $C_0 = \operatorname{Spec}(R_f)$ ist, wobei R eindimensionaler Ring und $f \in R$ ist. Setzt man $H = R[T_0, \ldots, T_n]$, so ist b (b ist Punkt von G mit Wert in C) derart durch einen Untermodul $M \subset H(m)^{N+1}$ definiert, daß $H(m)^{N+1}/M$ R-frei ist. Wegen a) gilt für alle $l \geqq 0$, daß

$$\left[H(l) \otimes_R \left(H(m)^{N+1}/M\right)\right]_f = H(m+l)_f^{N+1}/H(l)\, M_f$$

und frei vom Rang $P(m+l)$ ist. Wegen der Flachheit des Quotientenmoduls gilt das dann auch für ganz Spec (R), und daher gibt es wegen der Universaleigenschaft von Q einen Morphismus c mit den gewünschten Eigenschaften, q. e. d.

Bemerkungen.

a) Schränkt man den Funktor $Q^P(N)$ auf die Kategorie der S-Schemata ein, d. h., es sei in der Kategorie der S-Schemata

$$Q_S^P(N)\,(T) = \{\mathscr{H} \subset \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n \times T}^{N+1} \mid \mathscr{F} = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n \times T}^{N+1}/\mathscr{H} \text{ ist } T\text{-flach, } HP(n, \mathscr{F}) = P(n)\},$$

so ist dieser Funktor ebenfalls darstellbar, und aus der Universalitätseigenschaft folgt, daß er durch $Q^P(N) \times S$ dargestellt wird.

b) Eine weitere Verallgemeinerung ergibt sich in der folgenden Weise. Wir betrachten wieder die Kategorie der S-Schemata. Dort sollen jetzt aber nicht mehr die Untermoduln von $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n \times T}^{N+1}$ für das Schema T/S zugrunde gelegt werden. Wir gehen vielmehr aus von einem Quotientenmodul $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n \times T}^{N+1}$, der zu einer Untergarbe $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n \times S}^{N+1}$ gehört. Mit $\mathcal{E}_T$ werde für ein S-Schema T die Garbe $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_T$ auf $\mathbf{P}^n \times T$ bezeichnet. Dann definieren wir einen Funktor $Q_S^p(\mathcal{E})$ durch

$$Q_S^p(\mathcal{E})\,(T) = \{\mathcal{H} \subseteq \mathcal{E}_T \mid \mathcal{F} = \mathcal{E}_T/\mathcal{H} \text{ ist } T\text{-flach, } HP(n, \mathcal{F}) = P(n)\}.$$

Behauptung. $Q_S^p(\mathcal{E})$ ist darstellbar durch ein abgeschlossenes Unterschema von $Q_S^p(N)$.

Beweis. Wir bezeichnen den Funktor $Q_S^p(N)$ mit Q_0 und den Funktor $Q_S^p(\mathcal{E})$ mit Q. Da sich jeder Quotient von $\mathcal{E}_T$ als Quotient von $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n \times T}^{N+1}$ darstellen läßt, gilt $Q \subseteq Q_0$. Wir haben zu zeigen, daß $Q \subseteq Q_0$ eine abgeschlossene Einlagerung ist. Dazu sei $\mathcal{H}$ die universelle Untergarbe von $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n \times Q}^{N+1}$ mit dem flachen Quotienten $\mathcal{F} := \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n \times Q}^{N+1}$ (der das Hilbertpolynom P besitzt), die dem Funktor Q zugeordnet ist. $\mathcal{E}_Q = \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_Q$ ist Quotient von $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n \times Q}^{N+1}$, und es sei $\mathcal{K} = \operatorname{Ker}\,(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n \times Q}^{N+1} \twoheadrightarrow \mathcal{E}_Q)$. Weiterhin sei $I = (\mathcal{K} + \mathcal{H})/\mathcal{H}$, und mit φ werde die Injektion $I \hookrightarrow \mathcal{F}$ bezeichnet. Da $\mathcal{F}$ die universelle Quotientengarbe bezüglich des Funktors Q ist, gilt für ein S-Schema T

$$Q(T) = \Big\{u \in Q_0(T) \mid \Big((1 \times u)^* I \xrightarrow{(1\times u)^*(\varphi)} (1 \times u)^* \mathcal{F}\Big) = 0\Big\}.$$

Hierbei bezeichnet 1 die identische Abbildung von $\mathbf{P}^n$. Wir haben weiter oben gesehen, daß für $m \gg 0$, wenn wir $q = (N+1)\binom{n+m}{n}$ setzen, eine Surjektion $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n \times Q}^q \twoheadrightarrow I(m)$ existiert und $\varphi(m)$ bzw. φ eindeutig durch

$$\psi\colon \mathcal{O}_Q^q \to p_* I(m) \to p_* \mathcal{F}(m)$$

bestimmt ist. Es ist also $(1 \times u)^*\,(\varphi) = 0$ genau dann, wenn $u^*(\psi) = 0$ ist, und wir können damit das Verschwinden von $(1 \times u)^*\,(\varphi)$ durch das Verschwinden von ψ ausdrücken. Da aber $p_*\mathcal{F}(m)$ wegen $m \gg 0$ lokal frei ist, wird das Verschwinden von $\mathcal{O}_Q^q \to p_*\mathcal{F}(m)$ lokal durch das Verschwinden der Koeffizienten einer Matrixdarstellung von ψ ausgedrückt. Die entsprechenden Gleichungen definieren damit Q als abgeschlossenes Unterschema von Q_0, q. e. d.

c) Man kann auch von einem projektiven Schema X über S ausgehen, eine kohärente Garbe $\mathcal{E}$ auf X fixieren, $\mathcal{E}_T$ durch $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_S} T$ definieren und damit wie in b) einen Funktor $Q_S^p(\mathcal{E})$ auf der Kategorie der S-Schemata erhalten.

Behauptung. $Q_S^p(\mathcal{E})$ ist durch ein projektives S-Schema darstellbar.

Beweis. Wir wählen eine solche Überdeckung $\{S_\alpha\}$ von S, so daß $X \mid S_\alpha \subseteq \mathbf{P}^n \times S$ ist. Die entsprechenden Funktoren $Q_{S_\alpha}^p(\mathcal{E} \mid S_\alpha)$ sind nach b) durch projektive Schemata $Q_{S_\alpha}^p(\mathcal{E} \mid S_\alpha)$ darstellbar (wir behalten die alte Bezeichnung bei). Infolge der Universaleigenschaft der $Q_{S_\alpha}^p(\mathcal{E} \mid S_\alpha)$ kann man sie zu einem projektiven S-Schema $Q_S^p(\mathcal{E})$ zusammenkleben, so daß $Q_S^p(\mathcal{E}) \mid S_\alpha = Q_{S_\alpha}^p(\mathcal{E} \mid S_\alpha)$ ist und $Q_S^p(\mathcal{E})$ den betrachteten Funktor darstellt, q. e. d.

Insbesondere ergibt sich also daraus: Es existiert eine universelle flache Quotientengarbe $\mathcal{F}$ von $\mathcal{E}_Q$ $\big(Q := Q_S^p(\mathcal{E})\big)$ mit dem Hilbertpolynom P, und für $n \gg 0$ ist

(i) $p_*\big(\mathcal{F}(n)\big)$ lokal frei auf Q vom Rang $q = P(n)$ (hierbei bezeichnet p die Projektion von $X \times_S Q$ auf den zweiten Faktor)

und

(ii) $\bigwedge^q \big(p_*(\mathcal{F}(n))\big) = \mathcal{L}$ „very ample" bezüglich S).

5. Ein Beispiel von Mumford

Wir werden jetzt nach einem Beispiel aus MUMFORD [2] zeigen, daß das Hilbertschema nicht reduziert zu sein braucht. Dazu werden wir zeigen, daß für gewisse Kurven γ im dreidimensionalen projektiven Raum keine algebraische Familie A mit reduziertem Parameterraum existiert, die diese Kurven enthält und für die die charakteristische Abbildung

$$T_a \xrightarrow{\varphi} H^0(N)$$

(a der Punkt aus A, der γ entspricht, T_a der Tangentenraum von a in A, N das Normalenbündel von γ in $\mathbf{P}^3$) surjektiv ist. Die charakteristische Abbildung werden wir gleich erklären. Für das Hilbertschema ist aber die obige Abbildung ein Isomorphismus. Damit kann das Hilbertschema nicht reduziert sein, denn anderenfalls wäre ja dadurch eine algebraische Familie gegeben, für die φ surjektiv ist.

Die charakteristische Abbildung

Es seien X, T Schemata, Z sei ein abgeschlossenes Unterschema von $X \times T$, i bezeichne die Einlagerung von Z in $X \times T$ und p bzw. q die Projektion von $X \times T$ auf T bzw. auf X. Ist $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{O}_{X\times T}$ die Idealgarbe, die Z definiert, so ist die Folge

$$\mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \xrightarrow{\nu} i^*\Omega^1_{X\times T} \to \Omega^1_Z \to 0$$

exakt. Es ist

$$i^*\Omega^1_{X\times T} = q^*\Omega^1_X \otimes p^*\Omega_T,$$

und daher erhalten wir, wenn wir ν mit der Projektion $i^*\Omega^1_{X\times T} \to p^*\Omega_T$ komponieren, eine $\mathcal{O}_Z$-lineare Abbildung

$$\mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \to p^*\Omega_T. \tag{1}$$

Ist $T \to \mathbf{A}^m$, $t \mapsto (t_1, \ldots, t_m)$ ein Etalmorphismus von T auf den m-dimensionalen affinen Raum (z. B. existiert ein solcher lokal, falls T glatt ist), so ist (1) gegeben durch

$$f \mapsto \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial t_i}\, dt_i.$$

Die Dualisierung von (1) ergibt

$$p^*\Theta_T \to \mathcal{N}_{Z/X\times T}$$

bzw. auf Grund der Adjunktion

$$\varphi_{Z/T}\colon \Theta_T \to p_*\mathcal{N}_{Z/X\times T}.$$

Setzen wir mit den obigen Bezeichnungen $\mathfrak{d}_i = \frac{\partial}{\partial t_i}$ so ist $\varphi_{Z/T}$ definiert durch

$$\varphi_{Z/T}(\mathfrak{d}_i) = \left(f \mapsto \frac{\partial}{\partial t_i}\,\middle|\, Z\right).$$

Für $t \in T$ liefert eine Tensorierung von $\varphi_{Z/T}$ mit $k(t)$ die Abbildung

$$\Theta_{T,t} \to p_*\mathcal{N}_{Z/X\times T} \otimes_{\mathcal{O}_T} k(t) \to H^0\big(Z_t, \mathcal{N}_{Z/X\times T} \otimes_{\mathcal{O}_T} k(t)\big). \tag{2}$$

Nehmen wir an, daß die Abbildung $Z \to T$ flach ist (was in den uns interessierenden Fällen auch der Fall sein wird), so ist $\mathscr{J} \otimes_{\mathcal{O}_T} k(t) = \mathscr{J}_t$ und in $\mathcal{O}_{X\times T} \otimes_{\mathcal{O}_T} k(t)$ enthalten als das Z_t definierende Ideal. Somit haben wir eine Abbildung

$$\begin{aligned}\mathscr{N}_{Z/X\times T} \otimes_{\mathcal{O}_T} k(t) &= \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_{X\times T}}(\mathscr{J}, \mathcal{O}_Z) \otimes_{\mathcal{O}_T} k(t) \\ &\to \mathscr{H}om\,(\mathscr{J} \otimes_{\mathcal{O}_T} k(t), \mathcal{O}_{Z_t}) = \mathscr{N}_{Z_t/X}.\end{aligned}$$

Aus (2) ergibt sich damit

$$\begin{aligned}\varphi_{Z/T,t}\colon \Theta_{T,t} &\to H^0(Z_t, \mathscr{N}_{Z_t/X}), \\ \mathfrak{d}_i &\mapsto \left(f \mapsto \frac{\partial f}{\partial t_i}(x, 0)\right).\end{aligned}$$

Wenn Z lokal vollständiger Durchschnitt ist, dann ist $\mathscr{J}/\mathscr{J}^2$ lokal frei, und wir haben

$$\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_{X\times T}}(\mathscr{J},\mathcal{O}_Z) \otimes_{\mathcal{O}_T} k(t) \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{J}_t, \mathcal{O}_{Z_t});$$

daher muß in diesem Fall, falls φ_t surjektiv ist, auch die Abbildung

$$p_*\mathscr{N}_{Z/X\times T} \otimes_{\mathcal{O}_T} k(t) \to H^0(Z_t, \mathscr{N}_{Z_t}) \tag{3}$$

surjektiv sein (siehe dazu die Folge (2)).
Mit Hilfe der Sätze über Basiswechsel erhält man aus (3):

a) $p_*\mathscr{N}_{Z/X\times T}$ ist in einer Umgebung von t mit Basiswechsel verträglich,

b) $\varphi_{Z/T}\colon \Theta_T \to p_*\mathscr{N}_{Z/X\times T}$ ist in einer Umgebung von t surjektiv.

Dabei bedeutet b) gerade: Ist Z lokal durch $u_1 = \cdots = u_{m-d} = 0$ definiert, wobei $u_1, \ldots, u_m$ reguläre Parameter sind, dann ist das Gleichungssystem

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial u_k}{\partial t_j}(x, 0)\, x_j = f_k, \qquad f_k \text{ beliebig}, \ k = 1, \ldots, m-d, \quad f_k = 0, \quad k > m-d,$$

stets lösbar.
Wir wollen uns jetzt noch speziell mit dem infinitesimalen Fall beschäftigen. Dazu sei $T' = \operatorname{Spec}(k[\varepsilon])$, $\varepsilon^2 = 0$. Es seien X, T, Z wie oben angegeben und α ein Morphismus von T' in T: $T' \xrightarrow{\alpha} T$. Wir setzen $Z' := Z \times_T T' \subseteq X \times T'$, und es sei p' die Projektion $p'\colon Z' \to T'$.
Dann folgt aus a), daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}\Theta_{T'} & \xrightarrow{\varphi_{Z'/T'}} & p'_*\mathscr{N}_{Z'/X\times T'} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \alpha^*\Theta_T & \xrightarrow{\alpha^*\varphi_{Z/T}} & \alpha^* p_*\mathscr{N}_{Z/X\times T}\end{array}$$

universell ist.
Ist $\operatorname{Spec}(k) \to \operatorname{Spec}(k[\varepsilon])$ der der Projektion $k[\varepsilon] \to k$ entsprechende Morphismus, so wird dadurch für jedes abgeschlossene Unterschema Z von $X \times I$ ein abgeschlossenes Unterschema Z_0 von X induziert.
Es sei Z flach über I. Wie wir oben gesehen haben, induziert Z einen Morphismus $\varphi_{Z/I}\colon \Theta_I \to p_*\mathscr{N}_{Z/X\times T}$. Es ist $\Theta_I = k$. Indem wir Z das Element $\varphi_{Z/I}(1) \in H^0(Z, \mathscr{N}_{Z/X\times I})$ zuordnen, ist ein Element aus $H^0(Z_0, \mathscr{N}_{Z_0/X})$ definiert, das wir mit $\varphi(Z/I)$ bezeichnen wollen. Wir haben also für ein fixiertes $Z_0 \subset X$ einen Morphismus

$$\varphi\colon \{Z \subset X \times I \mid Z \text{ flach über } I,\ Z \cap (X \times 0) = Z_0\} \to H^0(Z_0, \mathscr{N}_{Z_0/X})$$

erhalten.

Satz *φ ist ein Isomorphismus.*

Beweis. 1. Wir wollen zunächst einen Morphismus ψ in umgekehrter Richtung angeben. Dazu sei $s \in H^0(Z_0, \mathcal{N}_{Z_0/X}) = \operatorname{Hom}(\mathcal{J}_0, \mathcal{O}_{Z_0})$. Wir haben eine Idealgarbe $\mathcal{J}$ in $\mathcal{O}_{X \times T} = \mathcal{O}_X[\varepsilon]$ anzugeben, die ein $Z \subset X \times I$ mit den geforderten Eigenschaften definiert. Es sei $Z_0 \subset X$ durch die Idealgarbe $\mathcal{J}_0 \subset \mathcal{O}_X$ definiert. Dann setzen wir

$$\psi(s) = \mathcal{J} = \{f + \varepsilon g \mid f \in \mathcal{J}_0, s(f) = g \bmod \mathcal{J}_0\}.$$

a) Wie man unmittelbar sieht, ist $\mathcal{J}$ ein Ideal.

b) Außerdem ist das Bild der Abbildung $\mathcal{J}/\varepsilon\mathcal{J} \to \mathcal{O}_X[\varepsilon]/\varepsilon\mathcal{O}_X[\varepsilon]$ gleich $\mathcal{J}_0$, da f gerade alle Elemente aus $\mathcal{J}_0$ durchläuft.

c) Die obige Abbildung ist injektiv. Denn für $f + g\varepsilon \mapsto 0$ ist $f = 0$, also folgt $s(f) = 0 = g \bmod \mathcal{J}_0$, d. h. $g\varepsilon \in \varepsilon\mathcal{J}$.

Somit haben wir vermittels $\mathcal{J}$ ein I-flaches Unterschema Z von $X \times I$ mit $Z \cap (X \times 0) = Z_0$ definiert.

2. Wir zeigen jetzt, daß $\varphi\psi(s) = s$ gilt. Dazu sei $Z := \psi(s)$. Wir erinnern noch einmal daran, wie

$$\varphi(Z/I) \in H^0(Z_0, \mathcal{N}_{Z_0/X}) = \operatorname{Hom}(\mathcal{J}_0, \mathcal{O}_{Z_0})$$

definiert ist. Man geht aus von der Abbildung

$$\mathcal{J} \to i^*\Omega^1_{X \times I}, \qquad p^*\Omega^1_I = \mathcal{O}_Z d\varepsilon = \mathcal{O}_{Z_0} d\varepsilon,$$

$$f \mapsto \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\, d\varepsilon.$$

Wegen

$$\mathcal{H}om(\mathcal{O}_Z d\varepsilon, \mathcal{O}_Z) \cong \mathcal{O}_Z \varepsilon = \mathcal{O}_{Z_0}\varepsilon,$$

$$u \mapsto u(d\varepsilon)$$

ergibt sich aus der obigen Abbildung durch Dualisierung

$$\varphi_{Z/T}: \mathcal{O}_{Z_0}\varepsilon \to \mathcal{H}om(\mathcal{J}, \mathcal{O}_Z),$$

$$h\varepsilon \mapsto (f + g\varepsilon \mapsto hg).$$

φ war aber gerade bestimmt durch den Wert für $h = 1$, d. h., wir erhalten die Abbildung $(Z := \psi(s))$

$$f + g\varepsilon \mapsto g = s(f),$$

d. h., es ist $\varphi(Z/I) = s$.
Damit ist nachgewiesen, daß φ surjektiv ist.

3. Wir haben noch zu zeigen, daß φ injektiv ist. Es sei also $\varphi(Z/I) = \varphi(Z'/I)$, wobei Z durch $\mathcal{J}$ und Z' durch $\mathcal{J}'$ definiert werde. Da aber

$$S := \varphi(Z/I) = \varphi(Z'/I) = \big(f \mapsto s(f)\big) \in \operatorname{Hom}(\mathcal{J}_0, \mathcal{O}_{Z_0})$$

ist mit

$$s(f)\,(x_0) = \frac{\partial(f + \varepsilon g)}{\partial \varepsilon}(x_0, 0) = g(x_0),$$

ergibt sich

$$\mathscr{I} = \{f + \varepsilon g \mid f \in \mathscr{I}_0,\ \varphi(Z/I)\,(f) \equiv g \bmod \mathscr{I}\} = \mathscr{I}',$$

d. h. $Z = Z'$.

Insbesondere erhalten wir aus dem Satz, da ja

$$\begin{aligned}\{Z \subset X \times I \mid Z \text{ flach über } I,\ Z_0 = Z \cap (X \times 0)\} &= \mathrm{Hilb}_X(I) \times_{\mathrm{Hilb}(k)} Z_0 \\ &= \text{Tangentenraum des Hilbertschemas in } Z_0\end{aligned}$$

ist, daß $H^0(Z_0, \mathscr{N}_{Z_0/X})$ der Tangentenraum des Hilbertschemas von X in Z_0 ist.

Wir wollen uns jetzt mit dem eingangs erwähnten Beispiel beschäftigen. Es sei $C \subset \mathbf{P}^3 \times H$ die universelle Familie glatter Kurven in $\mathbf{P}^3$ mit dem Hilbertpolynom $Q_0(t) = 14t - 23$ (d. h. Kurven vom Geschlecht 24 und vom Grad 14 in $\mathbf{P}^3$). Wir werden zeigen:

(i) Es gibt ein nichtleeres offenes Unterschema $U \subseteq H$, so daß U_{red} glatt ist und $\dim U = 56$.

(ii) Es gibt Punkte $u \in U$, in denen der Tangentialraum $T_u(U)$ die Dimension 57 hat.

Hilfssatz 1. *Es sei $V_0 \subset \mathbf{P}^3$ eine glatte kubische Fläche, E eine Gerade auf V_0 und H ein Hyperebenenschnitt. Dann hat das lineare System $|4H + 2E|$ keine Basispunkte, die Kurven aus diesem System haben das Hilbertpolynom $Q_0(t)$ (in $\mathbf{P}^3$).*

Beweis. Die letzte Behauptung folgt nach der Adjunktionsformel und aus $\omega_{V_0} = \mathscr{O}_{V_0}(-H)$. Da $|4H| + 2E \subseteq |4H + 2E|$ ist, können höchstens auf E Basispunkte liegen. Die Folgen

$$0 \to \mathscr{O}_{V_0}(4H + E) \to \mathscr{O}_{V_0}(4H + 2E) \to \underbrace{\mathscr{O}_E \otimes \mathscr{O}_{V_0}(4H + 2E)}_{\cong \mathscr{O}_E(2)} \to 0,$$

$$0 \to \mathscr{O}_{V_0}(4H) \to \mathscr{O}_V(4H + E) \to \underbrace{\mathscr{O}_E \otimes \mathscr{O}_{V_0}(4H + E)}_{\cong \mathscr{O}_E(3)} \to 0$$

und

$$0 \to \mathscr{O}_{\mathbf{P}^3}(1) \to \mathscr{O}_{\mathbf{P}^3}(4) \to \mathscr{O}_V(4H) \to 0$$

sind exakt. Hieraus folgt

$$H^1\big(V_0, \mathscr{O}_{V_0}(4H)\big) = H^1\big(V_0, \mathscr{O}_{V_0}(4H + E)\big) = 0$$

und

$$E \cdot |4H + 2E| = |\mathscr{O}_E(2)|_E,$$

q. e. d.

Nach Bertinis Sätzen gibt es eine nichtleere offene Teilmenge in $|4H + 2E|$, die den glatten Kurven dieses linearen Systems entspricht.

Hilfssatz 2. *Ist V_0 wie oben und $C_0 \subset V_0$ eine glatte Kurve mit dem Hilbertpolynom $Q_0(t)$, so ist* $\dim |C_0| = 37$.

Beweis. Nach Serres Dualitätssatz ist $\dim H^2\big(V_0, \mathscr{O}_{V_0}(C_0)\big) = 0$. Aus der Adjunktionsformel folgt

$$\deg \mathscr{O}_{C_0} \otimes \mathscr{O}_{V_0}(C_0) = (C_0^2) = 46 + (C_0 \cdot H) = 60,$$

also $H^1(C_0, \mathcal{O}_{C_0} \otimes \mathcal{O}_{V_0}(C_0)) = 0$, woraus wegen der exakten Folge

$$0 \to \mathcal{O}_{V_0} \to \mathcal{O}_{V_0}(C_0) \to \mathcal{O}_{C_0} \otimes \mathcal{O}_{V_0}(C_0) \to 0$$

das Verschwinden von $H^1(V_0, \mathcal{O}_{V_0}(C_0))$ folgt. Nach dem Satz von RIEMANN-ROCH ist

$$\dim |C_0| = (C \cdot (C + H))/2 = 37,$$

q. e. d.

Hilfssatz 3. *Eine Kurve $C_0 \subset \mathbf{P}^3$ mit dem Hilbertpolynom $Q_0(t)$ liegt auf höchstens einer kubischen Fläche.*

Beweis. Die Kurve kann nicht in einer Ebene oder Quadrik liegen, da sich glatte Kurven vom Geschlecht 24 nicht in $\mathbf{P}^2$ einbetten lassen. Also ist jede kubische Fläche, die C_0 enthält, irreduzibel; der Schnitt zweier solcher Flächen hätte den Grad 9, C_0 hat aber den Grad 14.

Hilfssatz 4. *Die Menge H' aller $t \in H$, so daß C_t auf einer kubischen Fläche liegt, ist abgeschlossen in H, ebenso die Menge $H'' \subseteq H'$ aller t, so daß C_t auf einer singulären kubischen Fläche liegt. Ist $U' = H' \setminus H''$, so ist* $\dim U' = 56$ *und U'_{red} glatt. Es gibt Komponenten von U', auf denen* $\dim T_u(H) > 56$ *gilt.*

Beweis. Die Idealgarben $I_t = \mathrm{Kern}\,(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3} \to \mathcal{O}_{C_t})$ sind die Fasern der H-flachen Idealgarbe $I = \mathrm{Kern}\,(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3 \times H} \to \mathcal{O}_C)$, und die Menge

$$H \setminus H' = \{t \in H;\, H^0(\mathbf{P}^3, I_t(3)) = 0\}$$

ist offen, also ist H' abgeschlossen. Es sei $L' = |\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(3)|$ und $V \subset \mathbf{P}^3 \times L'$ die universelle Familie aller Divisoren vom Grad 3 in $\mathbf{P}^3$, $T' \subseteq H' \times L'$ die Menge aller (t, l) mit $C_t \subseteq V_l$. Offensichtlich ist T' abgeschlossen in $H' \times L'$; wir betrachten T' als reduziertes Unterschema. Nach Hilfssatz 3 ist die Projektion $T' \to H'$ bijektiv und projektiv, also ist $T' \to H'$ ein Homöomorphismus. Es sei $L \subseteq L'$ die offene Teilmenge aller glatten kubischen Flächen, $T = T' \cap (L \times H')$; das Bild von T in H' ist eine offene Teilmenge U' und entspricht genau den Kurven C_t, die auf einer glatten kubischen Fläche liegen.
Die Fasern der Projektion $T \to L$ sind disjunkte Vereinigungen offener Teilmengen von linearen Systemen $|C_0|$ auf V_l, wobei C_0 eine glatte Kurve mit dem Hilbertpolynom $Q_0(t)$ ist und auf V_l liegt, da auf rationalen Flächen lineare und algebraische Äquivalenz übereinstimmen. Somit ist nach Hilfssatz 2

$$\dim U' = \dim T = \dim L + \dim |C_0| = \dim |\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(3)| + 37 = 56,$$

und T ist glatt (da L und $|C_0|$ glatt sind).
Wir berechnen schließlich $d = \dim T_u(H) = \dim H^0(C_u, N_{C_u|\mathbf{P}^3})$ (N = Normalenbündel).
Es sei V_0 eine glatte kubische Fläche, C_0 eine glatte Kurve auf V_0 mit dem Hilbertpolynom $Q_0(t)$, N das Normalenbündel von C_0 in $\mathbf{P}^3$ und N' das Normalenbündel in V_0, N'' das auf C_0 eingeschränkte Normalenbündel von V_0 in $\mathbf{P}^3$. Dann haben wir eine kanonische exakte Folge $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ und Isomorphismen

$$N' \cong \mathcal{O}_{V_0}(C_0) \otimes \mathcal{O}_{C_0} \quad \text{und} \quad N'' \cong \mathcal{O}_{V_0}(3H) \otimes \mathcal{O}_{C_0}.$$

Wie im Beweis von Hilfssatz 2 folgt $\deg N' = 60$, also $H^1(C_0, N') = 0$, $\dim H^0(C_0, N') = 37$ und $d = 37 + \dim H^0(C_0, N'') = 56 + \dim H^1(C_0, N'')$ (wegen $\deg N'' = (C_0 \cdot 3H) = 42$). Hieraus berechnet man leicht $d = 57$, wenn $C_0 \in |4H + 2E|$

ist. Wählt man zunächst V_0 und dann $C_0 \in |4H + 2E|$ jeweils als allgemeines Element, so sieht man, daß C_0 einem allgemeinen Punkt einer Komponente von U' entspricht (da V_0 von 19 und C_0 über dem Definitionskörper von (V_0, E) von 37 Parametern abhängt). Auf einer solchen Komponente ist also $\dim T_*(H) > 56$.
Da T glatt ist und homöomorph zu U', ist jede Zusammenhangskomponente von U' irreduzibel; aus $\dim H^0(\mathbf{P}^3, I_t(3)) = 1$ folgt daher, daß $p_*(I(3) \mid U'_{\mathrm{red}})$ lokal freie Untergarbe von $p_*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3 \times U'_{\mathrm{red}}}(3))$ ist und mit Basiswechsel verträglich, also eine flache Familie von kubischen Flächen in $\mathbf{P}^3 \times U'_{\mathrm{red}}$ definiert, die C/U'_{red} enthält. Dadurch wird ein zur Projektion $T \to U'_{\mathrm{red}}$ inverser Morphismus definiert, also ist U'_{red} glatt.

Hilfssatz 5. *Das Schema $H \setminus H''$ hat die Dimension* 56.

Beweis. Es genügt, die offene Menge der nicht auf einer kubischen Fläche liegenden Kurven zu untersuchen. Für eine solche Kurve C_0 ist jede sie enthaltende Fläche vom Grad 4 notwendig irreduzibel, und wegen $\dim |\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(4)| = 34$, $\dim |\mathcal{O}_{C_0} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(4)| = 32$ gibt es ein Büschel solcher Flächen vom Grad 4. Der Basisort dieses Büschels hat die Form $C_0 + Q$, Q eine Kurve vom Grad 2 (wegen $\deg C_0 = 14$, $\deg V \cdot V' = 16$). Nach Bertinis Satz kann ein allgemeines Element V des Büschels höchstens auf $C_0 + Q$ Singularitäten haben, und da für die Multiplizitäten eines Punktes p auf $V \cap V'$

$$m(p, V)\, m(p, V') \leqq m(p, C_0 + Q)$$
$$(\leqq 3 \text{ und } = 1 \text{ auf } C_0 \setminus Q,\ \leqq 2 \text{ auf } Q \setminus C_0)$$

gilt, hat V höchstens einen isolierten singulären Punkt p. Dieser ist ein Doppelpunkt und kann nur auftreten, wenn Q eine Doppelgerade ist. Es sei jetzt $V \subset \mathbf{P}^3 \times S$ die universelle Familie der Flächen vierten Grades und $T \subseteq (H \setminus H') \times S$ die abgeschlossene Menge aller (t, s) mit $C_t \subseteq V_s$; dann ist $\dim (H \setminus H') \leqq \dim T - 1$ (die Faser von $T \to (H \setminus H')$ in t ist das lineare System der Quartiken durch C_t, also von einer positiven Dimension). Da nicht jede Fläche vierten Grades einen Kegelschnitt Q enthält, ist das Bild der Projektion $T \to S$ von einer Dimension kleiner als $\dim S = \dim |\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(4)| = 34$, die Fasern bestehen aus linearen Systemen $|C_0|$ (da lineare Äquivalenz wieder gleich algebraischer Äquivalenz ist). Nach dem Satz von Riemann-Roch ist $\dim |C_0| = p_a(C_0) = 24$ (K3-Flächen!), also $\dim (H \setminus H') < 57$, q. e. d.

IV. Globale Moduln von Kurven

0. Einleitung

Klassisch versteht man unter den Moduln der algebraischen Kurven gewisse Parameter, deren Werte eineindeutig den Isomorphieklassen von Kurven vom Geschlecht g entsprechen.

Genauer und allgemeiner hat MUMFORD dieses Problem formuliert. Es sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Gesucht ist ein algebraisches Schema über k, dessen k-rationale Punkte $M(k)$ umkehrbar eindeutig Isomorphieklassen von Kurven vom Geschlecht g entsprechen. Damit die Frage vernünftig wird, muß man noch eine Forderung an die algebraische Struktur von M stellen. Es sei dazu S das Parameterschema einer Familie algebraischer Kurven. Man fordert, daß die Abbildung, die jedem Punkt $s \in S(k)$ den Punkt von $M(k)$ zuordnet, der zu der Klasse gehört, die dem Parameterwert s entspricht, algebraisch ist. Den resultierenden Morphismus $j: S \to M$ nennt man die *Invariante* der Familie von Kurven. Verlangt man noch, daß j universell ist (siehe 3.6.), so ist M durch diese Forderungen eindeutig bestimmt. Man nennt M auch den *groben Modulraum* der Kurven vom Geschlecht g.

Es sei C eine Kurve vom Geschlecht $g \geqq 2$ über einem algebraisch abgeschlossenen Grundkörper k, ω_C die Garbe der regulären Differentialformen auf C. Wir wollen beweisen, daß $\omega_C^{\otimes 3}$ „very ample" ist, d. h., die globalen Schnitte von $\omega_C^{\otimes 3}$ definieren eine abgeschlossene Einbettung $C \to \mathbf{P}(H^0(\omega_C^{\otimes 3}))$. Dazu müssen wir zeigen, daß $C \to \mathbf{P}(H^0(\omega_C^{\otimes 3}))$ a) definiert, b) injektiv und c) in den Tangentialräumen injektiv ist.

Bedingung a) bedeutet, daß für alle $x \in C$ ein $\eta \in H^0(\omega_C^{\otimes 3})$ existiert, so daß $\eta(x) \neq 0$ oder anders ausgedrückt $H^0(\omega_C^{\otimes 3}) \to H^0(k(x))$ surjektiv ist.

Bedingung b) bedeutet, daß für alle $x, y \in C$, $x \neq y$ ein $\eta \in H^0(\omega_C^{\otimes 3})$ existiert mit $\eta(x) = 0$ und $\eta(y) \neq 0$, oder $H^0(\omega_C^{\otimes 3}) \to H^0(k(x)) \oplus H^0(k(y))$ ist surjektiv.

Bedingung c) bedeutet, daß $H^0(\mathfrak{m}_x\omega_C^{\otimes 3}) \to H^0(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}_x^2 \otimes \omega_C^{\otimes 3})$ surjektiv ist, wobei $\mathfrak{m}_x$ die Idealgarbe der Funktionen bezeichnet, die in x verschwinden.

a), b) und c) kann man wie folgt zusammenfassen: Für zwei beliebige Punkte $x, y \in C$ ist

$$H^0(\omega_C^{\otimes 3}) \to H^0(\mathcal{O}_C/\mathfrak{m}_x\mathfrak{m}_y)$$

surjektiv. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn $H^1(\mathfrak{m}_x \mathfrak{m}_y \omega_C^{\otimes 3}) = 0$ ist. Nach dem Riemann-Rochschen Satz ist die letzte Gruppe dual zu $H^0(\omega_C^{\otimes -2} \otimes \mathfrak{m}_x^{-1} \otimes \mathfrak{m}_y^{-1})$. Der Grad von $\omega_C^{\otimes -2} \otimes \mathfrak{m}_x^{-1} \otimes \mathfrak{m}_y^{-1}$ ist $-4g + 6$, da $\deg \omega_C = 2g - 2$ ist. Wegen $-4g + 6 < 0$ für $g \geqq 2$ folgt $H^0(\omega_C^{\otimes -2} \otimes \mathfrak{m}_x^{-1} \otimes \mathfrak{m}_y^{-1}) = 0$ und damit die Bedingungen a), b) und c).
Eine Kurve C vom Geschlecht $g \geqq 2$ mit einem Isomorphismus $\mathbf{P}\big(H^0(\omega_C^{\otimes 3})\big) \cong \mathbf{P}_k^{5g-6}$ nennt man eine *trikanonisch eingebettete Kurve.* Die Menge $H_g^0(k)$ der Isomorphieklassen trikanonisch eingebetteter Kurven ist eine lokal abgeschlossene Menge im Hilbertschema und ist deshalb die Menge der k-rationalen Punkte eines Schemas $H_{g\,k}^0$. Vergleichen wir die Betrachtungen mit denen für elliptische Kurven, so sind wir jetzt an der Stelle, wo wir gesehen haben, daß es zu jeder elliptischen Kurve eine Weierstraßsche Normalform gibt, die von zwei Parametern abhängt.
Es seien (C, φ), (C', φ') zwei trikanonisch eingebettete Kurven. Offenbar ist C genau dann isomorph zu C', wenn ein Isomorphismus $\tau \in PGL(5g - 6)$ existiert, so daß $\tau \circ \varphi = \varphi'$ ist. Daraus folgt, daß die Punkte der Menge $H_g^0(k)/PGL(5g - 6)$ auf natürliche Weise bijektiv den Isomorphieklassen von glatten Kurven vom Geschlecht g entsprechen. Wenn man dann zeigen kann, daß der Quotient $H_g^0/GL(5g - 6)$ in einem geeigneten Sinne in der Kategorie der algebraischen Schemata existiert, so erhält man das grobe Modulschema der glatten Kurven vom Geschlecht g (Mumford [4]). Man kann direkt oder mit Hilfe der Deformationstheorie zeigen, daß $H_{g,k}^0$ glatt ist und $M_{g,k}^0$ normal und von der Dimension $3g - 3$. Von Deligne und Mumford [1] wurde zuerst bewiesen, daß der Raum $M_{g,k}^0$ zusammenhängend ist. Daß $M_{g,k}^0$ normal ist, folgt daraus, daß der Raum auch irreduzibel ist.
Wenn $k = \mathbf{C}$ der Körper der komplexen Zahlen ist, kann man das zeigen, indem man beweist, daß der klassische Teichmüllerraum eine Überlagerung von $M_{g,\mathbf{C}}^0$ ist. Für beliebige algebraisch abgeschlossene Körper erhält man das Resultat folgendermaßen. Man konstruiert ein Schema $M_g^0 \xrightarrow{\pi^0} \operatorname{Spec}(\mathbf{Z})$, dessen geometrische Fasern die Schemata $M_{g,k}^0$ sind. Da $M_{g,\mathbf{C}}^0$ zusammenhängend ist, ist auch die allgemeine Faser von π^0 geometrisch zusammenhängend.
Wäre π^0 eigentlich, so folgte nach dem Zusammenhangssatz von Zariski, daß alle geometrischen Fasern zusammenhängend sind. Leider kann man leicht sehen, daß π^0 nicht eigentlich sein kann.
Um die Beweisidee trotzdem verwirklichen zu können, konstruiert man durch Adjunktion gewisser singulärer Kurven einen eigentlichen Morphismus $\pi\colon M_g \to \operatorname{Spec}(\mathbf{Z})$ dessen geometrische Fasern $M_{g,k}^0$ als offene dichte Unterräume enthalten. M_g nennt man auch eine *Kompaktifizierung* von M_g^0. Auf $M_g \xrightarrow{\pi} \operatorname{Spec}(\mathbf{Z})$ kann man jetzt den Zusammenhangssatz von Zariski anwenden und erhält das gewünschte Resultat.

1. Gefaserte Gruppoide, Felder

Es sei $\mathscr{C}$ eine Kategorie von Schemata. Unter einem gefaserten Gruppoid über $\mathscr{C}$ verstehen wir eine Kategorie $\mathscr{F}$ und einen Funktor $p\colon \mathscr{F} \to \mathscr{C}$, für die folgendes gilt:
a) Für jeden Morphismus $S' \xrightarrow{\varphi'} S$ in $\mathscr{C}$ und jedes Objekt X in $\mathscr{F}$ mit $p(X) = S$ gibt es eine Liftung $\Phi'\colon X' \to X$ von φ' in $\mathscr{F}$.
b) Ist in $\mathscr{C}$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} S' \arrow[dr, "\varphi'"] & \\ & S \\ S'' \arrow[uu, "\psi"] \arrow[ur, "\varphi''"'] & \end{tikzcd} \tag{1}$$

gegeben und in $\mathscr{F}$ Liftungen $X' \xrightarrow{\Phi'} X \xleftarrow{\Phi''} X''$ von φ, so läßt sich das ganze Diagramm (1) zu einem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[dr, "\Phi'"] & \\ & X \\ X'' \arrow[uu, "\Psi"] \arrow[ur, "\Phi''"'] & \end{tikzcd} \tag{2}$$

liften.

Hieraus folgt leicht: Alle Morphismen Φ in $\mathscr{F}$ mit $p(\Phi) = 1$ sind Isomorphismen in $\mathscr{F}$. Mit $\mathscr{F}(S)$ bezeichnen wir das Gruppoid der Morphismen über 1_S und Objekte über S.

Wir setzen jetzt weiterhin voraus, daß in $\mathscr{C}$ Faserprodukte mit Etalmorphismen $S' \to S$ existieren. Ein gefasertes Gruppoid heißt ein *Feld über* $\mathscr{C}$, wenn noch folgende Bedingungen erfüllt sind:

c) Für je zwei Objekte X_1, X_2 aus $\mathscr{F}(S)$ ist der Kofunktor

$$\mathrm{Isom}\,(X_1, X_2)\colon (\mathscr{C}/S)^{\mathrm{opp}} \to (\mathscr{E}_{ns}),$$

$$(S' \to S) \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{F}(S')}(\varphi^* X_1, \varphi^* X_2)$$

eine Etalgarbe. (Hierbei bezeichnet $\varphi^* X_1$ ein bis auf Isomorphie eindeutig bestimmtes Objekt aus $\mathscr{F}$, so daß eine Liftung $\varphi^* X_1 \xrightarrow{\Phi} X_1$ von φ existiert).

d) Jedes Abstiegsdatum in $\mathscr{F}$ bezüglich einer Etalüberdeckung $(S_\alpha \to S)$ in $\mathscr{C}$ ist effektiv.

Explizit bedeutet das: Ist $S_{\alpha\beta} = S_\alpha \times_S S_\beta$, $S_{\alpha,\beta,\gamma} = S_\alpha \times_S S_\beta \times_S S_\gamma$

$$\coprod_{\alpha,\beta,\gamma} S_{\alpha\beta\gamma} \overset{p_{12}}{\underset{p_{13}}{\overset{p_{23}}{\rightrightarrows}}} \coprod_{\alpha,\beta} S_{\alpha\beta} \overset{p_1}{\underset{p_2}{\rightrightarrows}} \coprod_{\alpha} S_\alpha \to S$$

(p_{mn} die Projektion auf den n-ten und m-ten Faktor und p_n die Projektion auf den n-ten Faktor), so ist ein Abstiegsdatum ein Objekt Y aus $\prod_\alpha \mathscr{F}(S_\alpha)$ und ein Isomorphismus $i\colon p_1^* Y \simeq p_2^* Y$, so daß $p_{12}^*(i)\, p_{23}^*(i) = p_{13}^*(i)$ ist.

Die Bedingungen c) und d) besagen, daß die Kategorie aller Abstiegsdaten bezüglich einer Überdeckung von S äquivalent zur Kategorie $\mathscr{F}(S)$ ist.

Die Klasse aller Felder über $\mathscr{C}$ bildet eine 2-Kategorie und wir definieren das Faserprodukt $\mathscr{F}_1 \times_{\mathscr{F}} \mathscr{F}_2$ von 1-Morphismen (Funktoren über $\mathscr{C}$) $\mathscr{F}_1 \xrightarrow{f} \mathscr{F} \xleftarrow{g} \mathscr{F}_2$ wie folgt: Die Objekte von $\mathscr{F}_1 \times_{\mathscr{F}} \mathscr{F}_2$ sind Tripel

$$(X_1, X_2, \Phi), \quad X_i \in \mathrm{Ob}\, \mathscr{F}_i,\ p_1(X_1) = p_2(X_2),\ \Phi\colon f(X_1) \xrightarrow{\sim} g(X_2),$$
$$\text{mit} \quad p(\Phi) = 1.$$

Die Morphismen sind Paare

$$(X_1, X_2, \Phi) \xrightarrow{(\alpha_1, \alpha_2)} (Y_1, Y_2, \Psi),$$

$$\alpha_i\colon X_i \to Y_i \text{ Morphismus in } \mathscr{F}_i \qquad (i = 1, 2),$$

$$p_1(\alpha_1) = p_2(\alpha_2) \quad \text{und} \quad \Psi \circ f(\alpha_1) = g(\alpha_2) \circ \Phi.$$

Beispiele von gefaserten Kategorien sind die Kategorien $\mathscr{C}/S$ der Morphismen in $\mathscr{C}$ mit dem Ziel S (S Objekt von $\mathscr{C}$); $p\colon \mathscr{C}/S \to \mathscr{C}$ ordnet jedem Morphismus $S' \to S$ seinen „Start" S' zu.

Ein Feld $\mathcal{F}$ heißt *algebraisch*, wenn es folgende Eigenschaften besitzt:

e) Für alle Objekte S, S' aus $\mathcal{C}$ und 1-Morphismen von Feldern $\mathcal{C}/S \to \mathcal{F} \leftarrow \mathcal{C}/S'$ gibt es ein Objekt S'' in $\mathcal{C}$ und eine Äquivalenz

$$\mathcal{C}/S \times_{\mathcal{F}} \mathcal{C}S' \cong \mathcal{C}/S''.$$

Wir bezeichnen $\mathcal{C}/S$ einfach mit S und $\mathcal{C}/S \times_{\mathcal{F}} \mathcal{C}/S''$ mit $S \times_{\mathcal{F}} S''$.

f) Es gibt ein Objekt M in $\mathcal{C}$ und einen surjektiven Etalmorphismus $\mathcal{C}/M \to \mathcal{F}$ (d. h., für alle Objekte S von $\mathcal{C}$ und 1-Morphismen $\mathcal{C}/S \to \mathcal{F}$ ist $M \times_{\mathcal{F}} S \to S$ surjektiv und etal).

Wenn die Fasern von $\mathcal{F}$ nur die identischen Automorphismen besitzen, heißt $\mathcal{F}$ ein *algebraischer Raum*. Es seien x und x' zwei Schnitte von $\mathcal{F}$ über X. Für ein Schema $T \xrightarrow{\varphi} X$ sei $\mathrm{Isom}_X(X, X')(T)$ die Menge der Isomorphismen von φ^*x mit φ^*x'. Die Bedingung e) besagt, daß für zwei Schnitte $x\colon X \to \mathcal{F}$, $y\colon Y \to \mathcal{F}$ der Funktor $\mathrm{Isom}_{X\times Y}(p_1^*x, p_2^*y)$ repräsentierbar ist.

Theorem (Artin). *Es sei $\mathcal{F}$ ein Feld über der Kategorie $\mathcal{C}$ der S-Schemata (S ein Noethersches Basisschema) mit folgenden Eigenschaften:*

(i) *$\mathcal{F}$ erfüllt e), und für alle S-Schemata S' aus $\mathcal{C}$ und 1-Morphismen $S' \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} \mathcal{F}$ ist der Morphismus $\Delta(f, g) \to S'$ quasikompakt, separiert und unverzweigt. Hierbei bezeichnet $\Delta(f, g)$ das S-Schema $S' \times_{S' \times_S S'} (S' \times_{\mathcal{F}} S')$ ($S' \hookrightarrow S' \times S'$ Diagonaleinbettung).*

(ii) *Es existiert ein S-Schema von endlichem Typ und ein glatter surjektiver S-Morphismus $X \to \mathcal{F}$.*

Dann ist $\mathcal{F}$ algebraisch.

Die Eigenschaft (i) bedeutet: Ist $\mathcal{F} \to \mathcal{F} \times_S \mathcal{F}$ der Diagonalmorphismus und

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \to & \mathcal{F} \times_S \mathcal{F} \\ \uparrow & & \uparrow {\scriptstyle (f,g)} \\ \mathcal{F} \times_{\mathcal{F}\times_S\mathcal{F}} S' & \to & S' \end{array}$$

Faserproduktdiagramm, so wird der untere Pfeil durch einen quasikompakten, separierten unverzweigten Morphismus von S-Schemata dargestellt.

Bemerkungen. Man kann viele Definitionen und Sätze aus der Kategorie der Schemata auf algebraische Felder übertragen. Wir werden im weiteren solche Übertragungen ohne Beweise benutzen. Mehr Details findet man bei Deligne und Mumford [1] sowie Knutson [1]. Wir hätten in diesem Abschnitt auch die Kategorie der analytischen Räume zugrunde legen können und dann den Begriff des analytischen Feldes erhalten. Ein analytisches Feld ohne nichttriviale Automorphismen in den Fasern ist ein analytischer Raum.

2. Das Feld der algebraischen Kurven

2.1. Definition. Eine *relative Kurve* ist ein eigentlicher, flacher Morphismus von endlicher Darstellung $f\colon X \to S$, dessen geometrische Fasern rein eindimensionale Schemata sind. $f\colon X \to S$ heißt *reduziert, zusammenhängend* oder *glatt* usw., wenn das für jede Faser der Fall ist.

Wir interessieren uns im folgenden für die gefaserte Kategorie aller glatten Kurven von einem festen Geschlecht $g \geqq 2$. Dabei lassen wir als Morphismen nur kartesische Morphismen zu. Wir bezeichnen die Faserung mit M_g^0. Da Kurven nichttriviale Automorphismen besitzen können, kann M_g^0 nicht durch einen algebraischen Raum repräsentierbar sein.
Wir zeigen jedoch, daß M_g^0 ein algebraisches Feld ist. Dazu benutzen wir das Kriterium von ARTIN aus § 1.

2.2. Es sei $\pi: C \to S$ eine glatte Kurve über S. Ist S das Spektrum eines algebraisch abgeschlossenen Körpers, so haben wir bereits in der Einleitung gesehen, daß $(\Omega_{C/S}^1)^{\otimes 3} = \omega_{C/S}^{\otimes 3}$ very ample ist. Im allgemeinen Fall erhält man daraus, daß $\omega_{C/S}^{\otimes r}$ für $r \geqq 3$ relativ sehr ample ist. Aus dem Satz von RIEMANN-ROCH folgert man, daß $\pi_* \omega_{C/S}^{\otimes r}$ lokal frei ist und das Hilbertpolynom $P(x) = (2rx - 1)(g - 1)$ besitzt.

2.3. Wir können jetzt den Funktor der r-kanonisch eingebetteten Kurven definieren. Für ein Schema S ist $H_{r,g}^0(S)$ die Menge aller glatten, irreduziblen, relativen Kurven $C \hookrightarrow \mathbf{P}_S^n \to S\ \big(n = (2r - 1)(g - 1) - 1\big)$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) Die invertierbare Garbe, die durch $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1)$ auf C induziert wird, ist isomorph zu $\omega^{\otimes r} \otimes \pi^* L$, wobei L eine geeignete Garbe auf S ist.

(ii) Es sei $\alpha: \mathbf{P}_S^n \to S$ der Strukturmorphismus. Der kanonische Homomorphismus $\alpha_* \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1) \to \pi_*(\omega^r) \otimes_{\mathcal{O}_S} L$ ist ein Isomorphismus.

Äquivalent läßt sich der Funktor $H_{g,r}^0$ auch wie folgt beschreiben:

$$H_{r,g}^0(S) = \left\{ \begin{array}{l} \text{glatte irreduzible Kurven } C \to S \\ \text{zusammen mit einem Isomorphismus} \\ \mathbf{P}_S^n = \mathbf{P}\big(\omega_{C/S}^{\otimes r}\big), \text{ modulo Isomorphismen.} \end{array} \right.$$

Es gilt der folgende nicht sehr schwere Satz

2.4. Satz. *$H_{r,g}^0$ ist darstellbar durch ein Unterschema des Hilbertschemas* $\mathrm{Hilb}_{\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^n}^{P(x)}$ *und glatt über* Spec $(\mathbf{Z})$.

2.5. Satz. *M_g^0 ist ein algebraisches Feld über* Spec $(\mathbf{Z})$.

Wir benutzen Theorem aus § 1. Die Bedingung (i) folgt, wenn wir zeigen, daß $M_g^0 \to M_g^0 \times M_g^0$ darstellbar, endlich und unverzweigt ist. Nach § 1 bedeutet das, daß für zwei Schnitte $x: X \to M_g^0$, $y: Y \to M_g^0$ der Funktor $\mathrm{Isom}_{X \times Y}(p_1^* x, p_2^* y)$ repräsentierbar durch ein endliches unverzweigtes Schema über $X \times Y$ ist. Das ergibt sich unmittelbar aus folgendem Lemma, das wir in Abschnitt 4.2. über stabile Kurven in einer allgemeineren Form beweisen werden.

Lemma. *Es seien C_1 und C_2 zwei glatte irreduzible Kurven über S. Die Garbe* $\mathrm{Isom}_S(C_1, C_2)$ *wird durch ein endliches unverzweigtes S-Schema repräsentiert.*

Die Bedingung (ii) von § 1 folgt, wenn wir zeigen, daß der Vergißfunktor $H_{r,g}^0 \to M_g^0$ darstellbar glatt und surjektiv ist. Ist $j: S \to M_g^0$ ein Schnitt, so ist $H_{r,g}^0 \times_{M_g^0} S$ der Funktor der Isomorphismen des $\mathbf{P}_S^n$ mit dem $\mathbf{P}\big(\omega_{C/S}^{\otimes r}\big)$, wobei C die Kurve ist, die dem Morphismus j entspricht. Daraus erhalten wir das gewünschte Resultat.

2.6. Man kann aus $H_{r,g}^0$ das Feld der algebraischen Kurven zurückgewinnen. Dazu bemerken wir, daß die Gruppe $PGL(k)$ auf dem Hilbertschema und folglich auf $H_{r,g}^0$ operiert.

Es sei G eine glatte algebraische Gruppe von endlicher Darstellung über einem Basisschema S, weiter sei T ein S-Schema. Mit G_T bezeichnen wir die Gruppe $G \times_S T$. Ein Morphismus $p: E \to T$ heißt ein *prinzipalhomogener Raum*, wenn G_T auf E operiert und der Morphismus $G_T \times_T E \to E \times_T E$ ein Isomorphismus ist. Ist E im Sinne der Etaltopologie lokal isomorph zum prinzipalhomogenen Raum G_T, so nennen wir E *isotrivial*.
Es sei X ein S-Schema, auf dem G operiert. Wir definieren das klassifizierende Feld $[X/G]$. Die Kategorie der Schnitte dieses Feldes über einem S-Schema T ist die Kategorie der isotrivialen prinzipalhomogenen Räume $E \to T$, versehen mit einem G-Morphismus $E \to X$. Wir wollen diesen Begriff veranschaulichen. Es sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und $[X/G]_k$ die Kategorie der Schnitte von X/G über Spec(k). Da alle isotrivialen prinzipalhomogenen Räume über Spec(k) trivial sind, ist $[X/G]_k$ äquivalent zur Kategorie der G-Morphismen $G_k \to X$. Ein solcher Morphismus ist durch das Bild des Einselementes $1 \in G_k(k)$ in $X(k)$ eindeutig bestimmt. Offenbar sind zwei G-Morphismen $G_k \to X$ genau dann isomorph in $[X/G]_k$, wenn die entsprechenden Punkte in $X(k)$ im gleichen Orbit liegen. Die Isomorphieklassen von Objekten von $[X/G]_k$ entsprechen folglich bijektiv den Orbits von $X(k)$ unter der Wirkung von $G(k)$. Die Automorphismengruppen von Objekten entsprechen dabei den Stabilisatoren. Der prinzipalhomogene Raum $G \times_S X \xrightarrow{\text{proj}} X$ versehen mit dem G-Morphismus $G \times_S X \xrightarrow{\mu} X$, der die Operation von G auf X definiert, entspricht einem Morphismus $q: X \to [X/G]$.
Das Faserprodukt von q mit einem Schnitt $T \to [X/G]$ ist offenbar das durch diesen Schnitt definierte Bündel $E \to T$. Der Morphismus q ist damit glatt und surjektiv. Man zeigt ohne Schwierigkeit, daß $[X/G] \to [X/G] \times_S [X/G]$ der Bedingung (i) von § 1 genügt, wenn $G \times X \to X \times X$ quasikompakt, separiert und unverzweigt ist.
Man kann leicht zeigen, daß das klassifizierende Feld genau dann darstellbar ist, wenn $X/G = Y$ in der Kategorie der Schemata existiert und $X \to Y$ ein prinzipalhomogener Raum unter der Gruppe G ist.
Wie wir bereits in der Einleitung gesehen haben, ist eine Hauptschwierigkeit bei der Lösung von Modulproblemen die Bildung des Quotienten nach der Wirkung einer algebraischen Gruppe. Aus der Bemerkung erkennen wir, daß das Problem in der Kategorie der algebraischen Felder unter sehr schwachen Voraussetzungen eine Lösung hat. Es sei jetzt $C \to S$ eine glatte irreduzible Kurve vom Geschlecht g. Dem projektiven Bündel $\mathbf{P}(\omega_{C/S}^{\otimes x})$ entspricht ein prinzipalhomogener Raum $E \to S$ mit der Strukturgruppe $PGL(n)$. Durch Basiswechsel erhalten wir eine Kurve $C_E \xrightarrow{\pi'} E$. Da das Bündel $\mathbf{P}(\pi'_* \omega_{C_E/E}^{\otimes r})$ isomorph zu $p^* \mathbf{P}(\omega_{C/S}^{\otimes r})$ ist, erhalten wir eine kanonische Trivialisierung $\mathbf{P}(\pi'_* \omega_{C_E/E}^{\otimes r}) \cong \mathbf{P}^n$. Daher wird C_E durch einen eindeutig bestimmten Morphismus $E \to H_{r,g}^0$ induziert. Auf diese Weise erhalten wir einen Isomorphismus zwischen dem Feld M_g^0 und dem klassifizierenden Feld $[H_{r,g}^0/PGL(n)]$.

3. Modulräume algebraischer Kurven

3.1. Definition. Es sei γ eine abstrakte Gruppe. Weiter sei $P: C/S \to P(C/S)$ ein Funktor aus der Kategorie der glatten irreduziblen Kurven C über S in die Kategorie der prinzipalhomogenen Räume über S mit der Gruppe γ, der mit Basiswechsel verträglich ist. P heißt *rigid*, wenn jeder Automorphismus einer Kurve C/S, der die Identität auf $P(C/S)$ induziert, trivial ist.

3.2. Definition. Es sei P ein rigider Funktor. Eine P-Kurve ist eine glatte irreduzible Kurve $C \to S$, zusammen mit einem Schnitt des Bündels $P(C/S)$.

3.3. Beispiele.

3.3.1. $p: C \to S$ sei eine glatte Kurve und k eine natürliche Zahl, die in $\mathcal{O}_S$ invertierbar ist. Dann ist $R^1p_*\mathbf{Z}/k\mathbf{Z}$ eine lokal konstante Etalgarbe mit der typischen Faser $(\mathbf{Z}/k\mathbf{Z})^{2g}$. Das Cupprodukt definiert eine perfekte Paarung

$$R^1p_*\mathbf{Z}/k\mathbf{Z} \times R^1p_*\mathbf{Z}/k\mathbf{Z} \to R^2p_*\mathbf{Z}/k\mathbf{Z} \cong \mu_k^{-1}.$$

Diese Paarung ist wohlbekannt aus der Theorie der abelschen Mannigfaltigkeiten. Es sei $\mathrm{Pic}^0_{C/S}$ die Picardgruppe der Kurve C. Der kanonische Morphismus $C \to \mathrm{Pic}^0_{C/S}$ definiert eine Polarisierung des abelschen Schemas $\mathrm{Pic}^0_{C/S}$, d. h. eine Abbildung $\mathrm{Pic}^0_{C/S} \xrightarrow{\Phi} = \widehat{\mathrm{Pic}^0_{C/S}}$ in das duale abelsche Schema.
Es sei ${}_k(\mathrm{Pic}^0_{C/S})$ die Garbe der k-Teilungspunkte. Nach der Kummerschen Theorie hat man einen kanonischen Isomorphismus

$${}_k(\mathrm{Pic}^0_{C/S}) \cong R^1p_*\mu_k \cong (R^1p_*\mathbf{Z}/k\mathbf{Z}) \otimes \mu_k.$$

Die angegebene Paarung erhält man aus der zu Φ assoziierten Riemannschen Form ${}_k(\mathrm{Pic}^0_{C/S}) \times_k (\mathrm{Pic}^0_{C/S}) \to \mu_k$ durch Tensorierung mit μ_k^{-2} (siehe MUMFORD [4]).
Es sei jetzt $(\mathbf{Z}/k\mathbf{Z})^{2g} \times (\mathbf{Z}/k\mathbf{Z})^{2g} \xrightarrow{\langle,\rangle} \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}$ eine beliebige nicht ausgeartete alternierende Bilinearform. Man sieht leicht, daß eine Basis $\gamma_1, \ldots, \gamma_g, \gamma_1', \ldots, \gamma_g'$ von $(\mathbf{Z}/k\mathbf{Z})^{2g}$ existiert, so daß $\langle\gamma_i, \gamma_j'\rangle = \delta_{ij}$, $\langle\gamma_i, \gamma_j\rangle = 0$, $\langle\gamma_i', \gamma_j'\rangle = 0$ ist. Diejenige Bilinearform, die der kanonischen Basis von $(\mathbf{Z}/k\mathbf{Z})^{2g}$ entspricht, nennen wir die *kanonische symplektische Struktur*.
Wenn die Garben $R^1p_*\mathbf{Z}/k\mathbf{Z}$ und μ_k konstant sind, finden wir daher einen Isomorphismus $R^1p_*\mathbf{Z}/k\mathbf{Z} \cong (\mathbf{Z}/k\mathbf{Z})^{2g}$, der das Cupprodukt auf die kanonische symplektische Struktur bis auf Multiplikation mit einer Einheit aus $\mathbf{Z}/k\mathbf{Z}$ abbildet. Das letzte muß man zulassen, da man verschiedene Isomorphismen $\mu_k \cong \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}$ wählen kann. Es sei G die Gruppe der Automorphismen von $(\mathbf{Z}/k\mathbf{Z})^{2g}$, die die kanonische symplektische Struktur bis auf eine Einheit invariant lassen. Durch $R^1p_*\mathbf{Z}/k\mathbf{Z}$ wird dann ein Prinzipalfaserbündel J_k mit der Gruppe G definiert. J_k heißt der *Jacobische Funktor der* Stufe k. Nach SERRE ist J_k für $k \geqq 3$ rigid. Eine Jacobstruktur auf der Kurve C/S kann man als einen Isomorphismus von $R^1p_*\mathbf{Z}/k\mathbf{Z}$ mit der konstanten Garbe $(\mathbf{Z}/k\mathbf{Z})^{2g}$ interpretieren, der die symplektische Struktur bis auf Multiplikation mit einer Einheit invariant läßt.

3.3.2. In diesem Beispiel legen wir die Kategorie der analytischen Räume zugrunde. Analog zum Beispiel 3.3.1. betrachten wir den Funktor $R^1p_*\mathbf{Z}$. In diesem Fall haben wir durch die Orientierung einen kanonischen Isomorphismus $R^2p_*\mathbf{Z} \cong \mathbf{Z}$. Wir können daher anstelle von G die symplektische Gruppe selbst betrachten. Man erhält dann den Torellischen Funktor, der nach dem letzten Beispiel ebenfalls rigid ist. Explizit ist eine Torellistruktur ein Isomorphismus von $R^1p_*\mathbf{Z}$ mit der konstanten Garbe $\mathbf{Z}^{2g}$, der die symplektische Struktur respektiert.

3.3.3. Wir bleiben in der Kategorie der analytischen Räume. Es sei C_0 eine feste Riemannsche Fläche vom Geschlecht g. Für eine beliebige Riemannsche Fläche sei $I(X, C_0)$ die Menge aller die Orientierung erhaltenden Diffeomorphismen (oder Homöomorphismen) von X nach C_0 modulo Homotopieäquivalenz. Für unsere Kurve $p: C \to S$ bezeichne C_s die Faser in einem Punkt $s \in S$. Die Vereinigung $\bigcup I(C_s, C_0)$ kann man als Prinzipalfaserbündel unter der Gruppe $G = I(C_0, C_0)$

auffassen. Den dadurch definierten Funktor in die Kategorie der G-Prinzipalfaserbündel nennt man den *Teichmüllerfunktor*. Er ist nach dem letzten Beispiel rigid.

3.3.4. Für den Begriff der Teichmüllerstruktur gibt es ein Analogon im Falle beliebiger Charakteristik.
Es sei P eine vorgegebene Menge von Primzahlen. Wir betrachten Schemata, für die die Charakteristiken der Restklassenkörper in P liegen. Für eine proendliche Gruppe bezeichnen wir mit $G^{(P)}$ den maximalen Quotienten von zu P primer Ordnung. Es sei $p\colon C \to S$ eine glatte, irreduzible Kurve mit einem Schnitt s. Nach GROTHENDIECK [4], Exp. X, Théorème 38, bilden die Fundamentalgruppen $\pi_1(C_x, s(x))^P$, wobei x einen geometrischen Punkt von S bezeichnet, ein lokales System $\pi_1(C/S, s)^P$ auf S, das wir als Proobjekt der Kateogrie der endlichen lokalen Systeme über S betrachten. Es sei G eine endliche Gruppe von zu P primer Ordnung. $\pi_1(C/S, s)^P$ wirkt mittels innerer Automorphismen auf $\operatorname{Hom}(\pi_1(C/S, s)^P, G)$. Der Quotient dieser Wirkung ist unabhängig von dem gewählten Schnitt s, und wir bezeichnen ihn mit $\operatorname{Hom}^{\mathrm{ext}}(\pi_1(C/S)^P, G)$. Wir definieren eine Teichmüllerstruktur als die Klasse eines surjektiven Morphismus von $\pi_1(C/S)^P$ nach G in $\operatorname{Hom}^{\mathrm{ext}}(\pi_1(C/S)^P, G)$.

3.4. Es sei P ein rigider Funktor. Wir bezeichnen mit M_P^0 das Feld aller glatten irreduziblen Kurven mit einer P-Struktur. Dann existiert ein kanonischer Vergißmorphismus $M_P^0 \to M_g^0$. Es sei $x\colon S \to M_g^0$ ein Schnitt, der einer Kurve C/S entspricht. Offenbar ist das Faserprodukt $S \times_{M_g^0} M_P^0$ die Garbe der P-Strukturen auf C/S und folglich isomorph zu $P(C/S)$. Das bedeutet, daß der Vergißmorphismus repräsentierbar und etal ist. Daraus folgt unmittelbar, daß M_P^0 ein algebraisches Feld ist und, da es keine Automorphismen in den Fasern besitzt, sogar ein algebraischer Raum.
Nimmt man für P den Teichmüllerfunktor, so erhält man den klassischen Teichmüllerraum der Riemannschen Flächen vom Geschlecht g.

3.5. Bekanntlich sind die algebraischen Räume M_P^0 bereits Schemata. Es sei J_n der Jacobifunktor der Stufe $n \geqq 3$. Dann ist M_{J_n} ein algebraischer Raum über $\operatorname{Spec}\left(\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]\right)$. Mit Hilfe der Theorie der Moduln abelscher Mannigfaltigkeiten hat MUMFORD [4] folgendes Theorem bewiesen:

Theorem. *$M_{J_n}^0$, $n \geqq 3$, ist ein quasiprojektives Schema über* $\operatorname{Spec} \mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$.

Wir vergleichen jetzt die Funktoren M_P^0 für verschiedene P. Es sei P ein rigider Funktor in die Kategorie der G-Prinzipalfaserbündel und $G \to H$ ein surjektiver Morphismus mit dem Kern K. Ferner sei Q der Funktor $P \times_G H = P/K$. Wir setzen voraus, daß K endlich ist. G operiert auf der Menge der P-Strukturen einer Kurve und damit auf dem algebraischen Raum M_P. Es sei $S \to [M_P/K]$ ein Schnitt des klassifizierenden Feldes, d. h. ein K-Morphismus $E \to M_P$, wobei E ein Prinzipalfaserbündel über S mit der Gruppe K ist. Einen K-Morphismus $E \to M_P$ kann man als eine P-Kurve C/E auffassen, auf der K operiert. Das bedeutet, daß C eine Kurve mit einem Abstiegsdatum relativ zu dem Morphismus $E \to S$ ist. Man prüft nach, daß man so einen Isomorphismus $[M_P/K] \cong M_Q$ erhält.
Ist $G \to H$ injektiv, so ergibt sich $M_Q = \coprod_{H/G} M_P$. Es seien jetzt P und Q rigide Funktoren in die Kategorie der G- bzw. H-Prinzipalfaserbündel. Wir setzen voraus, daß G und H endliche Gruppen sind. Wendet man die erhaltenen Resultate auf die Homo-

morphismen $G \to G \times H \to H$ an, so erhält man, daß M_P quasiprojektiv ist genau dann, wenn M_Q quasiprojektiv ist. Aus dem Theorem von MUMFORD folgt unmittelbar:
Es sei P ein rigider Funktor aus der Kategorie $M_g^0 \times S$ in die Kategorie der G-Prinzipalfaserbündel. Dann ist M_P ein Schema über S, das quasiprojektiv über jeder offenen Menge der Form $S \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}\left[\frac{1}{p}\right]$ (p Primzahl) ist.

3.6. Der grobe Modulraum M_g der Kurven vom Geschlecht g. Wir wissen, daß M_g^0 nicht durch ein Schema repräsentiert wird. Man kann sich fragen, ob wenigstens der Funktor F, der jedem Schema S die Isomorphieklassen von Objekten der Faser $(M_g^0)_S$ zuordnet, repräsentierbar ist. Die Existenz von nichttrivialen Automorphismen in (M_g^0) verhindert jedoch, daß F eine Garbe ist. Von GROTHENDIECK wurde bewiesen, daß auch die zu F assoziierte Garbe nicht repräsentierbar ist. Nach MUMFORD kann man aber ein schwaches Modulschema konstruieren.

Definition. M_g heißt ein *grobes Modulschema* der glatten Kurven vom Geschlecht g, wenn folgendes gilt:

(i) Es gibt einen Morphismus $M_g^0 \to M_g$, über den sich jeder andere Morphismus in ein Schema eindeutig faktorisieren läßt.

(ii) Für jeden algebraisch abgeschlossenen Körper Ω ist die Menge der geometrischen Punkte $M_g(\Omega)$ gleich der Menge der Isomorphieklassen von Kurven über Ω.

Durch (i) und (ii) ist M_g offenbar bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Zur Konstruktion definieren wir den Begriff eines geometrischen Quotienten.

Definition. Es sei G eine algebraische Gruppe, die auf einem Schema X operiert. Ein *geometrischer Quotient* ist ein G-invarianter Morphismus $p: X \to Y$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) Y ist ein Quotient von X in der Kategorie der geometrischen Räume, d. h., Y hat die Quotiententopologie und es ist $p_* \mathcal{O}_X^G = \mathcal{O}_Y$.

(ii) Für jeden algebraisch abgeschlossenen Körper Ω definiert p einen Isomorphismus von $X(\Omega)/G$ mit $Y(\Omega)$.

Nach GROTHENDIECK [4] gilt folgender

Satz. *Es sei G eine endliche Gruppe, die auf einem quasiprojektiven Schema X operiert. Dann existiert der geometrische Quotient X/G und ist quasiprojektiv.*

Wir benutzen die Bezeichnungen von 3.3.1. G ist eine endliche Gruppe, die auf dem quasiprojektiven Schema M_{J_n} ($n \geqq 3$) operiert. Folglich existiert der geometrische Quotient $Y_n = M_{J_n}/G$.

Wir zeigen, daß Y_n ein schwaches Modulschema über $\operatorname{Spec}\left(\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]\right)$ ist.

Zunächst hat man einen Morphismus $M_g^0 \to Y_n$. Dazu sei $S \to M_g^0$ ein Schnitt, der durch die Kurve $C \to S$ gegeben ist. Wenn man eine J_n-Struktur auf $C \to S$ wählen kann, erhält man einen Morphismus $S \to M_{J_n}$ und damit einen Morphismus $S \to Y_n$. Es ist klar, daß der letzte Morphismus von der gewählten Jacobistruktur unabhängig ist. Da man lokal stets eine Jacobistruktur wählen kann, erhält man allgemein einen Morphismus $S \to Y_n$ durch Zusammenkleben. Es sei $M_g^0 \to N$ ein beliebiger Morphismus in ein Schema N. Dann erhalten wir durch Komposition mit dem kanonischen Morphismus $M_{J_n} \to M_g^0$ einen G-invarianten Morphismus $M_{J_n} \to N$. Nach der Bedingung (i) für geometrische Quotienten läßt sich der letzte Morphismus auf eindeutige Weise über Y_n faktorisieren. Da die geometrischen Punkte $M_{J_n}(\Omega)$ genau die Isomorphieklassen von Kurven über Ω mit einer J_n-Struktur sind, folgt die Eigenschaft (ii) für das grobe Modulschema aus der entsprechenden für geometrische Quotienten.

Wegen der Eindeutigkeit des groben Modulschemas stimmen Y_m und Y_n über $\operatorname{Spec}\left(\mathbf{Z}\left[\frac{1}{mn}\right]\right)$ überein. Durch Zusammenkleben erhält man:

3.7. Satz. *Das schwache Modulschema M_g über* $\operatorname{Spec}(\mathbf{Z})$ *existiert und ist für jede Primzahl p quasiprojektiv über* $\operatorname{Spec}\left(\mathbf{Z}\left[\frac{1}{p}\right]\right)$.

3.8. Der Teichmüllerraum. In diesem Punkt gehen wir kurz auf den Zusammenhang mit der transzendenten Theorie ein. Die Details findet man in den Arbeiten von Ahlfors [1], Bers [1] und Weil [1].

3.8.1. Uniformisierungssatz. *Es sei C_0 eine Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g \geq 2$. Dann existiert eine Fuchssche Untergruppe $\Gamma_0 \subset GL_2(R)$ ohne elliptische Elemente, so daß $H/\Gamma_0 \cong C_0$ ist, wobei H die obere Halbebene bezeichnet.*

Es sei $C \to M$ eine analytische Familie von Riemannschen Flächen, wobei M isomorph zu einem Polyzylinder ist. Weiter sei C_0 die Faser im Punkt $0 \in M$. Bekanntlich kann man einen Diffeomorphismus $\varkappa: C \to C_0 \times M$ finden, der mit der Projektion auf M verträglich ist. Es seien $t_1, \ldots, t_n$ Parameter in M, und z sei eine Uniformisierende von C_0. Es sei w eine Uniformisierende auf einer Faser C_s, wobei s genügend dicht bei 0 liegt.

Mit Hilfe von k können wir

$$dw = \alpha(z, t_1, \ldots, t_n)\, dz + \beta(z, t_1, \ldots, t_n)\, d\bar{z}$$

schreiben. Da die Formen $\alpha\, dz + \beta\, d\bar{z}, dt_1, \ldots, dt_n$ eine Basis für die (1, 0)-Formen einer komplexen Struktur sein müssen, rechnet man leicht nach, daß der Quotient $\mu(z, t_1, \ldots, t_n) = \frac{\beta}{\alpha}$ holomorph von $t_1, \ldots, t_n$ abhängen muß.

Wählt man $\varkappa$ so, daß die Orientierung erhalten bleibt, so folgt $|\mu| < 1$. Da dw eine komplexe Struktur auf H/Γ_0 definiert, muß es bis auf eine Konstante invariant unter Γ_0 sein.

Daraus erhält man, daß $\mu \frac{d\bar{z}}{dz}$ invariant unter Γ_0 ist, oder explizit

$$(*) \qquad \mu(A(z))\, \overline{A'(z)}/A'(z) = \mu(z) \quad \text{für alle} \quad A \in \Gamma_0.$$

Eine Funktion $\mu(z)$ (der Klasse L_2) mit $|\mu| < 1$, die der Bedingung $(*)$ genügt, heißt ein *Beltramidifferential* von Γ_0. Aus der Theorie der quasikonformen Abbildungen folgt:

3.8.2. Es sei μ ein Beltramidifferential. Dann definiert die Riemannsche Metrik $dz + \mu\, d\bar{z}$ eine komplexe Struktur auf H/Γ_0, die wir mit C_0^μ bezeichnen. Es sei w^μ der Homöomorphismus, der H mit der alten komplexen Struktur auf H mit der neuen Struktur abbildet. w^μ ist eindeutig bestimmt bis auf einen gebrochen rationalen Isomorphismus von H, also eindeutig, wenn wir fordern, daß die Punkte $0, 1, \infty$

bei w^μ invariant bleiben sollen. Wir wollen diese Annahme im folgenden stets machen. Wenn dann μ holomorph oder glatt von Parametern abhängt, so auch w^μ. Die Faser C_0 und die Äquivalenzklasse von w^μ in $I(C_0, C_0^\mu)$ definieren einen Punkt des Teichmüllerraumes $T_g(\mathbf{C})$.
In der analytischen Theorie wird die komplexe oder glatte Struktur auf der Menge $T_g(\mathbf{C})$ durch folgende Bedingung definiert:

(T) Wenn $\mu(z, t)$ holomorph oder glatt von Parametern t abhängt, ist die Abbildung $t \mapsto (C_0^{\mu(z,t)}, w^{\mu(z,t)}) \in T_g(\mathbf{C})$ holomorph bzw. glatt.

Es ist aus den Betrachtungen am Anfang dieses Abschnittes klar, daß eine analytische Struktur auf $T_g(\mathbf{C})$, die der Bedingung (T) genügt, mit der in 3.4. definierten übereinstimmen muß.

3.8.3. Eine glatte Einbettung des Teichmüllerraumes. Es sei μ ein Beltramidifferential. Die gebrochen linearen Transformationen $A \in \Gamma_0$ induzieren auf der oberen Halbebene H mit der komplexen Struktur w^μ gebrochen lineare Transformationen A^μ:

$$w^\mu(A(z)) = A^\mu(w^\mu(z)).$$

Wenn Γ_0^μ die Gruppe der Transformationen A^μ bezeichnet, gilt $C_0^\mu = H/\Gamma_0^\mu$.
Wir wählen jetzt für Γ_0 Erzeugende A_j, B_j, $j = 1, \ldots, g$, die nur der Relation $\prod_{j=1}^{g} (A_j B_j A_j^{-1} B_j^{-1}) = 1$ genügen. Wenn wir alles mit einer geeigneten Matrix konjugieren, können wir, da keine der auftretenden Transformationen elliptisch ist, annehmen, daß A_g die Fixpunkte 0, 1 und B_g den Fixpunkt ∞ hat. Ein solches System von Erzeugenden nennt man *normalisiert*. Man überzeugt sich sofort, daß man A_g und B_g aus den A_j und B_j, $j = 1, \ldots, g - 1$, erhalten kann. Da jede gebrochen rationale Transformation von drei Parametern abhängt, hängt ein normalisiertes System von Erzeugenden von $6_g - 6$ reellen Parametern ab. Wir fassen die normalisierten Systeme daher als Teilmenge des $\mathbf{R}^{6g-6}$ auf.
Es sei $S \to T_g$ ein glatter Punkt des Teichmüllerraumes, der lokal durch ein Beltramidifferential gegeben ist, wie wir es am Anfang dieses Abschnittes beschrieben haben.
Die Abbildung

$$\mu \mapsto (A_j^\mu, B_j^\mu), \quad j = 1, \ldots, g - 1,$$

definiert dann einen Punkt $S \to \mathbf{R}^{6g-6}$. Die so erhaltene Abbildung $T_g \to \mathbf{R}^{6g-6}$ ist eine offene Einbettung.

3.8.4. Die Kontraktibilität des Teichmüllerraumes. Wir haben gesehen, daß man die Punkte des Teichmüllerraumes in der Form (S_0^μ, w^μ) repräsentieren kann. Dabei können verschiedene μ den gleichen Punkt des Teichmüllerraumes repräsentieren. Genauer definieren μ und μ' den gleichen Punkt, wenn $w^\mu (w^{\mu'})^{-1}$ homotop zu einer holomorphen Abbildung ist.
Wir kommen jetzt zum entscheidenden Punkt der Theorie TEICHMÜLLERS.

Definition. Ein *Teichmüllerdifferential* ist ein Beltramidifferential der Form $\mu(z) = \varkappa \dfrac{\overline{f(z)}}{|f(z)|}$, wobei $\varkappa$ eine reelle Zahl, $0 \leqq \varkappa < 1$ und $f(z)\, dz^2$ ein holomorphes quadratisches Differential auf C_0 ist.

3.8.5. Jeder Punkt des Teichmüllerraumes hat eine eindeutige Darstellung (S_0^μ, w^μ), wobei μ ein Teichmüllerdifferential ist. μ ist dabei eindeutig bestimmt durch die

Extremaleigenschaft, daß

$$\max_{z \in H} |\mu(z)| \leqq \max_{z \in H} |\mu'(z)|$$

ist für alle $\mu'(z)$, die den gleichen Punkt des Teichmüllerraumes definieren. Wir zeigen jetzt, daß daraus die Kontraktibilität des Teichmüllerraumes folgt.

Es sei $(\Omega_1, \ldots, \Omega_{6g-6}) = \Omega$ eine reelle Basis des Raumes $H^0(C_0, \omega_{C_0}^{\otimes 2})$ der quadratischen Differentiale. Für alle Vektoren $x \in \mathbf{R}^{6g-6}$, $|x| < 1$, entspricht dem Teichmüller-differential $|x|(x\bar{\Omega})/|x\Omega|$ ein Punkt $\gamma(x)$ des Teichmüllerraumes. Nach 3.8. ist die Abbildung $x \to \gamma(x)$ eine eineindeutige differenzierbare Abbildung der Einheitskugel im $\mathbf{R}^{6g-6}$ auf den Teichmüllerraum $T_g \subset \mathbf{R}^{6g-6}$. Nach dem Theorem von Hopf über die Gebietsinvarianz ist j dann ein Homöomorphismus.

4. Die Kompaktifizierung des Feldes der Kurven vom Geschlecht $g \geqq 2$

Zunächst definieren wir den Begriff „eigentlich" für algebraische Felder.

Es sei P eine Eigenschaft für Morphismen $f: X \to Y$ von Schemata, die lokal auf X und Y bezüglich der Etaltopologie ist. Wir sagen, daß ein Morphismus $\varphi: \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ von algebraischen Feldern *die Eigenschaft P hat*, wenn für ein und folglich für jedes Diagramm der Form

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "x"] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{F}_1 \arrow[d, "\varphi"] \\ Y \arrow[r, "y"] & \mathcal{F}_2 \end{tikzcd}$$

wobei x und y surjektive Etalmorphismen sind, f die Eigenschaft P hat (z. B. lokal v. e. T., flach, etale, glatt usw.). $\mathcal{F}_1$ heißt *quasikompakt* (*Noethersch* usw.) wenn ein surjektiver Etalmorphismus $x: X \to \mathcal{F}_1$ mit X quasikompakt (Noethersch usw.) existiert. $\varphi: \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ heißt *quasikompakt*, wenn $\mathcal{F}_1 \times_{\mathcal{F}_2} Y$ für alle quasikompakten Y quasikompakt ist. Wenn φ außerdem lokal von endlichem Typ ist, heißt φ *von endlichem Typ*.

4.1. Definition. Ein Morphismus $f: \mathcal{F} \to S$ eines algebraischen Feldes $\mathcal{F}$ in ein Noethersches Schema S heißt *eigentlich*, wenn f von endlichem Typ und separiert ist und für jeden Bewertungsring V mit dem Quotientenkörper K und jedes Diagramm

$$\begin{tikzcd} & & \mathcal{F} \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}(K) \arrow[r] \arrow[urr, "g"] & \mathrm{Spec}(V) \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

ein diskreter Bewertungsring V' mit dem Quotientenkörper K' existiert, der eine endliche Erweiterung von V ist, und ein Morphismus $\mathrm{Spec}(V') \to \mathcal{F}$, so daß folgendes Diagramm kommutativ wird:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(K') \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Spec}(V') \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F} \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}(K) \arrow[r] \arrow[urr] & \mathrm{Spec}(V) \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

Für eigentliche Morphismen algebraischer Felder gelten wichtige Sätze der algebraischen Geometrie wie das Lemma von CHOW, der Zusammenhangssatz von ZARISKI und der Endlichkeitssatz.
Da es Kurven mit potentiell schlechter Reduktion gibt, existieren diskret bewertete Körper K und Morphismen $\operatorname{Spec}(K) \to M_g^0$, die sich nicht auf $\operatorname{Spec}(V')$ fortsetzen lassen, wobei V' irgendeine endliche Erweiterung des Bewertungsringes V von K ist. M_g^0 ist also nicht eigentlich über $\operatorname{Spec}(\mathbf{Z})$. Um M_g^0 zu kompaktifizieren, müssen wir zu M_g^0 geeignete Kurven hinzufügen, die sich bei Reduktion potentiell gut verhalten.

4.2. Stabile Kurven.

Definition. Es sei S ein Schema. Eine *stabile Kurve* vom Geschlecht $g \geqq 2$ ist ein flacher eigentlicher Morphismus $\pi\colon C \to S$, dessen geometrische Fasern C_s wie folgt beschaffen sind:

(i) C_s ist reduziert, zusammenhängend und besitzt höchstens gewöhnliche Doppelpunkte.

(ii) Auf jeder nicht singulären rationalen Komponente E von C_s liegen mindestens drei Doppelpunkte von C_S.

(iii) $\dim H^1(C_s, \mathcal{O}_{C_s}) = g$.

Es gilt:

1. C ist lokal vollständiger Durchschnitt, da $\mathcal{O}_{C_s,O}$ in einem Punkt $O \in C_s$ vollständiger Durchschnitt ist und damit wegen der Flachheit auch $\mathcal{O}_{C,O}$.
2. Auf C existiert eine invertierbare Garbe mit folgenden Eigenschaften (siehe HARTSHORNE [1]):
   a) $\omega_{C/S}$ ist verträglich mit Basiswechsel.
   b) Es sei S das Spektrum eines algebraisch abgeschlossenen Körpers; $z_1, \ldots, z_n$ seien die Doppelpunkte von C und x_i, y_i die beiden Punkte auf der Normalisierung C' von C, die über z_i liegen. Dann ist $\omega_{C,S}$ isomorph zum direkten Bild der Garbe der meromorphen Differentiale η auf C', die höchstens einfache Pole in den Punkten x_i, y_i haben, so daß
   $$\operatorname{res}_{x_i}(\eta) + \operatorname{res}_{y_i}(\eta) = 0$$
   ist.
   c) Wie in b) sei $S = \operatorname{Spec}(k)$. Dann hat man einen kanonischen Isomorphismus
   $$\operatorname{Ext}^i_{\mathcal{O}_C}(F, \omega_{C/S}) \cong \operatorname{Hom}_k\big(H^{1-i}(C, F), k\big)$$
   für jede köhärente $\mathcal{O}_C$-Garbe F.

Wie im Fall von glatten Kurven zeigt man ohne große Schwierigkeiten

4.3. Satz. *Es sei C/S eine stabile Kurve. Dann ist $\omega_{C/S}^{\otimes n}$ für $n \geqq 3$ sehr ampel und $\pi_*\big(\omega_{C/S}^{\otimes n}\big)$ lokal frei vom Rang $(2n-1)(g-1)$.*

Es sei H_g der Funktor der trikanonisch eingebetteten Kurven

$$H_g(S) = \left\{ \begin{array}{l} C \to S \text{ stabile Kurve und ein Isomorphismus} \\ \mathbf{P}(\omega_{C/S}^{\otimes 3}) \cong \mathbf{P}^{5g-6} \text{ modulo Isomorphismen.} \end{array} \right.$$

Völlig analog zum Fall der glatten Kurven erhält man

4.4. Satz. *H_g ist darstellbar durch ein Unterschema des Hilbertschemas* $\mathrm{Hilb}^{P_g(x)}_{P^{5g-6}}$, *wobei $P_g(x) = (6x-1)(g-1)$ ist.*

Um zu zeigen, daß das Feld der stabilen Kurven algebraisch ist, müssen wir die Automorphismen untersuchen.

Lemma. $\mathrm{Hom}(\Omega, \mathcal{O}_C) = 0$.

Beweis. Wir müssen zeigen, daß jedes Vektorfeld D auf C Null ist. D ist eine Derivation $D: \mathcal{O}_C \to \mathcal{O}_C$, die man auf die Garbe der meromorphen Funktionen in eindeutiger Weise ausdehnen kann. Es sei $\mathfrak{c}$ der Führer von $\mathcal{O}_{C'}$ nach $\mathcal{O}_C$. Da D eine Derivation ist, folgt $\mathfrak{c}D(\mathcal{O}_C) \subseteq D(\mathfrak{c})\mathcal{O}_{C'} + D(\mathfrak{c})$. Daraus folgt leicht $D(\mathcal{O}_{C'}) \subset \mathcal{O}_{C'}$, Geometrisch bedeutet das, daß die Vektorfelder auf C eineindeutig den Vektorfeldern auf C' entsrpechen, die in den Punkten x_i, y_i verschwinden. Es sei C_i' eine Komponente von C'. Wir unterscheiden drei Fälle

a) $g(C_i') \geqq 2$;

b) $g(C_i') = 1$, D/C_i' verschwindet an mindestens einem Punkt von C_i';

c) $g(C_i') = 0$, D/C_i' verschwindet an drei Punkten von C_i'.

In allen drei Fällen folgt aus dem Satz von Riemann-Roch $D/C_i' = 0$ und damit $D = 0$.

Es seien X und Y Schemata von endlichem Typ über einem Basisschema S und $\mathscr{L}$ und $\mathscr{M}$ Garben auf X und Y die relativ sehr ampel sind. Wir definieren folgenden Funktor auf der Kategorie der S-Schemata:

$$\mathrm{Isom}_S\big((X, \mathscr{L})(Y, \mathscr{M})\big)(T) = \text{Isomorphismen } f\colon X_T \to Y_T \text{ mit } f^*\mathscr{M}_T = \mathscr{L}_T\,.$$

Aus der Theorie der Hilbertschema folgt, daß Isom durch ein quasiprojektives Schema über S repräsentiert wird. Wenn X und Y stabile Kurven sind, so gilt nach Eigenschaft a) der Garbe ω

$$f^*\omega_{Y_T/T} = \omega_{X_T/T}$$

für jeden Isomorphismus f. Also ist $\mathrm{Isom}_S(X, Y)$ in diesem Fall ein quasiprojektives Schema über S.

Wir beweisen jetzt die versprochene Verallgemeinerung von Lemma 2.4.

4.5. Satz. *Es seien X und Y stabile Kurven über einem Schema S. Dann ist* $\mathrm{Isom}_S(X, Y)$ *endlich und unverzweigt über S.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, daß Isom quasiendlich und unverzweigt ist. Dazu müssen wir beweisen, daß die geometrischen Fasern endlich und reduziert sind. Offenbar sind die geometrischen Fasern leer oder isomorph zu einem Schema der Form $\mathrm{Aut}_k(C)$, wobei C eine stabile Kurve über dem algebraisch abgeschlossenen Körper k ist. Nach dem letzten Lemma ist der Tangentialraum von $\mathrm{Aut}_k(C)$ im Punkte id_C Null. Da $\mathrm{Aut}_k(C)$ quasiprojektiv ist, muß es dann ein endliches reduziertes Gruppenschema sein.

Nach einem bekannten Resultat von Chevalley bleibt zu beweisen, daß $\mathrm{Isom}_S(X, Y)$ eigentlich über S ist. Indem wir eine trikanonische Einbettung von X und Y wählen, erhalten wir einen Morphismus $S \to H_g \times H_g$. Nach Basiswechsel können wir annehmen, daß $S = H_g \times H_g$ und daß X und Y die Urbilder der universellen trikanonisch eingebetteten stabilen Kurve über H_g bei den beiden Projektionen von S auf H_g

sind. Mit Hilfe von Sätzen aus GROTHENDIECK [2], Kap. II, zeigt man leicht die folgende Variante des Bewertungskriteriums für eigentliche Morphismen:
Es sei Z ein Schema über S und U eine offene und dichte Teilmenge von Z. Z ist eigentlich über S, wenn für jeden diskreten Bewertungsring V mit dem Quotientenkörper K und jedes Diagramm

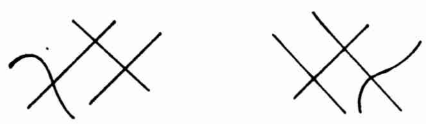
$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}\,(K) \arrow[r] \arrow[d] & U \arrow[r] & Z \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}\,(V) \arrow[rr] & & S \end{tikzcd}$$

ein Morphismus $\mathrm{Spec}(V) \to Z$ existiert, so daß das resultierende Diagramm kommutativ wird.
Wir zeigen weiter unten, daß H_g^0 dicht in H_g ist. Daraus folgt leicht, daß die offene Teilmenge von $\mathrm{Isom}_S\,(X, Y)$, die glatten Kurven entspricht, dicht ist. Folgender Satz zeigt, daß das Bewertungskriterium erfüllt ist.

4.6. Satz. *Es sei V ein diskreter Bewertungsring; s und η seien der spezielle und der allgemeine Punkt von* $\mathrm{Spec}\,(V)$. *Es seien ferner X und Y stabile Kurven über* $\mathrm{Spec}\,(V)$, *deren allgemeine Fasern glatt sind. Dann kann man jeden Isomorphismus $\varphi_\eta \colon X_\eta \to Y_\eta$ zu einem Morphismus $\varphi \colon X \to Y$ erweitern.*

Wir bemerken nachträglich, daß aus 4.5. folgt, daß die Bedingung „X_η und Y_η glatt" überflüssig ist.

Beweis. Da X_s nur gewöhnliche Doppelpunkte hat, haben die Singularitäten von X die Form $x \cdot y = \pi^n$, wobei π ein lokaler Parameter von V ist. Aus der Bedingung „X_η glatt" folgt $n \geqq 1$. Bläst man die Singularitäten auf, so erhält man folgende Konstellation von $n - 1$ projektiven Geraden:



Nach Aufblasung aller Singularitäten von X erhält man daher eine singularitätenfreie Fläche ohne ausgezeichnete Kurven erster Art, also das minimale Modell von X_η. Umgekehrt erhält man X aus dem minimalen Modell in eindeutiger Weise, indem man alle Kurven, die in einer Konstellation der angegebenen Art vorkommen, zusammenbläst. Da $\varphi_\eta \colon X_\eta \to Y_\eta$ einen Isomorphismus der minimalen Modelle induziert, erhält man den gewünschten Isomorphismus $\varphi \colon X \to Y$.

Analog zu 2.4. erhält man aus 4.6.

4.7. Satz. *Das Feld M_g der stabilen Kurven ist algebraisch.*

Wir kommen jetzt zum entscheidenden Punkt der Theorie der stabilen Kurven.

4.8. Satz (über stabile Reduktion). *Es sei V ein diskreter Bewertungsring mit dem Quotientenkörper K, und C sei eine geometrisch irreduzible glatte Kurve über K. Dann existiert eine endliche Erweiterung K' von K und eine stabile Kurve C über dem ganzen Abschluß V' von V in K', deren allgemeine Faser isomorph zu $C \otimes_K K'$ ist.*

Man kann 4.8. aus einem entsprechenden Resultat über abelsche Mannigfaltigkeiten folgern, das zuerst von GROTHENDIECK und MUMFORD bewiesen wurde. Einen elementaren Beweis ohne den schwierigen Apparat haben ARTIN und WINTERS [1] gegeben.

Nach den Bemerkungen am Anfang dieses Abschnitts erhalten wir aus 4.8.

4.9. Satz. *Das algebraische Feld der stabilen Kurven M_g ist eigentlich über* Spec ($\mathbf{Z}$).

5. Die Irreduzibilität des Modulraumes der glatten Kurven vom Geschlecht $g \geqq 2$

Der natürliche Morphismus $M_g^0 \to M_g$ ist darstellbar und eine offene Einbettung. Wir untersuchen zunächst das entsprechende lokale Problem.

5.1. Lemma. *Es sei C/k eine stabile Kurve. Dann ist* $\mathrm{Ext}^2(\Omega_{C/k}, \mathcal{O}_C) = 0$.

Beweis. Wir benutzen die Spektralsequenz

$$E_2^{pq} = H^p(X, \mathcal{E}xt^q(\Omega^1_{C/k}, \mathcal{O}_C)) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}(\Omega^1_{C/k}, \mathcal{O}_C) \quad .$$

und zeigen $E_2^{pq} = 0$ für $p + q = 2$. Das ist trivial für $q \neq 2$. Da C lokal ein vollständiger Durchschnitt ist, haben wir lokal eine Resolution

$$0 \to \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2 \to \Omega^1_{\mathbf{A}^n/k} \otimes \mathcal{O}_C \to \Omega^1_{C/k} \to 0.$$

Daraus folgt $\mathcal{E}xt^2 = 0$.

Im folgenden ist k ein algebraisch abgeschlossener Körper und C eine stabile Kurve über k. Wir betrachten die formale semiuniverselle Deformation $\mathcal{C}/\mathcal{M}$ von C über dem Wittring $\mathfrak{o}_k$.
Wegen $\mathrm{Ext}^0(\Omega^1_{C/k}, \mathcal{O}_C) = 0$ ist diese Deformation sogar universell und wegen $\mathrm{Ext}^2(\Omega^1_{C/k}, \mathcal{O}_C) = 0$ folgt aus der Deformationstheorie, daß die Basis $\mathcal{M}$ formal glatt ist, d. h. $\mathcal{M} = \mathrm{Spf}\, \mathfrak{o}_k[[t_1, \ldots, t_N]]$, wobei $N = \dim \mathrm{Ext}^1(\Omega^1_{C/k}, \mathcal{O}_C)$ ist. Die invertierbare Garbe $\omega_{\mathcal{C}/\mathcal{M}}$ ist ampel. Nach GROTHENDIECKS Existenzsatz findet man deshalb ein eindeutig bestimmtes projektives flaches Schema über Spec(A), wobei $A = \mathfrak{o}_k[[t_1, \ldots, t_N]]$ ist, dessen Komplettierung $\mathcal{C}$ ist und das wir im weiteren ebenfalls mit $\mathcal{C}$ bezeichnen. Es sei z_i ein Doppelpunkt von C und $\mathcal{O}_i/A_i$ die verselle Deformation der k-Algebra $\hat{\mathcal{O}}_{z_i,C}$ über dem Wittring. Wir haben $\hat{\mathcal{O}}_{z_i} = k[[u_i, v_i]]/u_i \cdot v_i$. Nach einem allgemeinen Resultat über die versellen Deformationen von vollständigen Durchschnitten (vgl. Kap. III) gilt

$$\mathcal{O}_i \cong k[[u_i, v_i, t_i]]/(u_i v_i - t_i), \quad A_i \cong \mathfrak{o}_k[[t_i]].$$

Da $\hat{\mathcal{O}}_{Z,\mathcal{C}} \mid A$ eine Deformation von $\hat{\mathcal{O}}_{z_i,C}$ ist, gibt es einen Morphismus $\varphi_i: A_i \to A$ derart, daß $\hat{\mathcal{O}}_{Z_i,\mathcal{C}} = A \otimes_{A_i} \mathcal{O}_i$ ist.

5.2. Lemma. *$\varphi: A_1 \otimes_{\mathfrak{o}_k} \cdots \otimes_{\mathfrak{o}_k} A_n \to A$ ist formal glatt. Das bedeutet, daß Isomorphismen $A_i \cong \mathfrak{o}_k[[t_i]]$ und $A \cong \mathfrak{o}_k[[t_1, \ldots, t_N]]$, existieren, so daß $\varphi(t_i) = t_i$ ist.*

Beweis. Die Tangentialabbildung von φ kann man mit der folgenden Abbildung identifizieren:

$$\mathrm{Ext}^1(\Omega_{C/k}, \mathcal{O}_C) \to \prod_{i=1}^{n} \mathrm{Ext}_{\hat{\mathcal{O}}_{z_i}}(\hat{\Omega}_{z_i}, \hat{\mathcal{O}}_{z_i}).$$

Aus der Sepktralsequenz von Lemma 5.1 erhält man leicht die Surjektivität.

Da $\hat{\mathcal{O}}_{z_i,\mathscr{C}} \cong A \otimes_{A_i} \mathcal{O}_i$ hat man nach 5.2.

$$\mathcal{O}_{z_i,\mathscr{C}} \cong \mathfrak{o}_k[\![u_i, v_i, t_i, \ldots, t_N]\!]/(u_i v_i - t_i).$$

Es sei $H'_g = H_g \times \operatorname{Spec}(\mathfrak{o}_k)$ das Schema der trikanonisch eingebetteten stabilen Kurven über dem Wittring. Ferner sei x ein Punkt von H'_g, der der Kurve C entspricht, und $T = \operatorname{Spec}(\hat{\mathcal{O}}_{x,H'_g})$. Nach der Universalität von M hat man einen eindeutig bestimmten Morphismus $f\colon T \to \operatorname{Spec}(A)$, der durch die universelle Kurve Z'_g über H'_g induziert wird. Wählen wir eine trikanonische Einbettung der Kurve C über $\operatorname{Spec}(A)$, so erhalten wir einen Schnitt s von f. Es sei G die Komplettierung von $PGL(5g-6)$ im Einselement. G operiert offenbar auf T, da $PGL(5g-6)$ auf H_g operiert. Berücksichtigt man, daß der Stabilisator von C in $PGL(5g-6)$ nach 4.5. reduziert und endlich ist, so folgt, daß $G \times M \to G \times T \xrightarrow{\mu} T$ ein Isomorphismus ist (siehe MUMFORD [4], Kap. 5, § 2). Also ist $f\colon T \to \operatorname{Spec}(A)$ formal glatt. Daraus folgt $\hat{\mathcal{O}}_{x,H_g} \cong \mathfrak{o}_k[\![t_1, \ldots, t_M]\!]$.
Da man die universelle Kurve $(Z'_g)_T$ aus $\mathscr{C}$ durch Basiswechsel erhält, gilt weiter $\mathcal{O}_{Z'_g,z_i} \cong \mathfrak{o}_k[\![t_1, \ldots, t_M, u_i, v_i]\!]/(u_i v_i - t_i)$. Die Menge der nicht glatten Punkte des Morphismus $Z'_g \to H'_g$ wird also lokal durch die Gleichung $t_1 \cdots t_n = 0$ beschrieben.

Definition. Es sei $p\colon X \to Y$ ein glatter Morphismus von endlichem Typ und $D \subset X$ ein relativer Cartierdivisor. Wir sagen, daß D *normale Schnitte* hat, wenn für alle $x \in D$ die lokale Gleichung $d = 0$ von D in der strikten Komplettierung $\tilde{\mathcal{O}}_{x,X}$ von $\mathcal{O}_{x,X}$ eine Darstellung $d = d_1 \cdots d_k$ besitzt, wobei $d_1, \ldots, d_k$ linear unabhängig in $m_{x,X}\tilde{\mathcal{O}}_{x,X}/m^2_{x,X}\tilde{\mathcal{O}}_{x,X} + m_{y,Y}\mathcal{O}_{x,X}$ sind.
Es sei S die Menge der Punkte von H_g, wobei der Morphismus $Z_g \to H_g$ nicht glatt ist. Man kann die oben durchgeführten Überlegungen wie folgt zusammenfassen.

5.3. Satz. *H_g ist ein glattes Schema über $\mathbf{Z}$ und S ein Divisor mit normalen Schnitten relativ zu $\mathbf{Z}$.*

5.4. Korollar. *Das Komplement von M_g^0 in M_g ist ein Divisor mit normalen Schnitten.*

Beweis. Es sei $x\colon X \to M_g$ ein Etalmorphismus. Wir müssen zeigen, daß $X_0 = x^{-1}(M_g^0)$ das Komplement eines Divisors mit normalen Schnitten ist. Wir betrachten den glatten Morphismus $X \times_{M_g} H_g \xrightarrow{x'} X$. Dann ist $x'^{-1}(X_0)$ das Urbild von H_g^0 bei dem Etalmorphismus $X \times_{M_g} H_g \to H_g$ und deshalb das Komplement eines Divisors mit normalen Schnitten. Da x' glatt ist, muß X_0 ebenfalls das Komplement eines solchen Divisors sein.

5.5. Satz. *Die geometrischen Fasern des Morphismus $M_g^0 \to \operatorname{Spec}(\mathbf{Z})$ sind irreduzibel.*

Beweis. Da das Komplement von M_g^0 in M_g ein Divisor relativ zu $\mathbf{Z}$ ist, ist die Anzahl der Zusammenhangskomponenten (= irreduzible Komponenten, da p glatt ist) einer geometrischen Faser $(M_g^0)_\Omega$ gleich der Anzahl der Komponenten von $(M_g)_\Omega$. Auf den eigentlichen Morphismus $p\colon M_g \to \operatorname{Spec}(\mathbf{Z})$ können wir den Zariskischen Zusammenhangssatz anwenden. Danach genügt es zu zeigen, daß eine der geometrischen Fasern zusammenhängend ist. Aus der analytischen Theorie wissen wir, daß der Teichmüllerraum T_g zusammenhängend ist. Damit ist auch $(M_g)_\mathbf{C}$ zusammenhängend, denn es existiert ein surjektiver Morphismus $T \to (M_g^0)_\mathbf{C}$.

5.6. Korollar. *Das schwache Modulschema M_g der Kurven vom Geschlecht g über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k ist irreduzibel.*

V. K 3-Flächen

1. Grundlegende Tatsachen über K 3-Flächen

Die K 3-Flächen spielen in der Flächentheorie eine Sonderrolle, die mit der der elliptischen Kurven vergleichbar ist. Ihre Untersuchung erfordert daher spezielle Methoden. Obwohl viele der Resultate für K 3-Flächen über einem algebraisch abgeschlossenen Grundkörper beliebiger Charakteristik gelten, betrachten wir im folgenden zur Vereinfachung nur den Fall der komplexen Zahlen.

1.1. Definition. Eine algebraische Fläche X heißt K 3-*Fläche*, wenn ihr kanonisches Bündel trivial und wenn $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ ist.

1.2. Beispiel.

1.2.1. Jede singularitätenfreie Hyperebene vom Grad 4 im $\mathbf{P}^3$ ist eine K 3-Fläche. Da der Grad 4 ist, hat man eine exakte Sequenz

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(-4) \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3} \to \mathcal{O}_X \to 0.$$

Mit Hilfe bekannter Resultate über die Kohomologie projektiver Räume folgt $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$.

Aus der exakten Folge

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(-4) \otimes \mathcal{O}_X \to \Omega^1_{\mathbf{P}^3} \otimes \mathcal{O}_X \to \Omega^1_X \to 0$$

folgt

$$\Omega^2_X \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(-4) \cong \Omega^3_{\mathbf{P}^3} \otimes \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_X(-4),$$

also

$$\Omega^2_X \cong \mathcal{O}_X.$$

Analog gilt: Ist $X \subset \mathbf{P}^n$ vollständiger Durchschnitt vom Grad $(d_1, \ldots, d_{n-2})$, so ist X genau dann K 3-Fläche, wenn $\sum_{\nu=1}^{n-2} d_\nu = n + 1$ ist.

1.2.2. Es sei A eine zweidimensionale abelsche Mannigfaltigkeit und G die Gruppe, die aus den beiden Automorphismen Multiplikation mit $+1$ und -1 besteht. Ferner sei $Y = A/G$ der Quotient, und $P_1, \ldots, P_{16}$ seien die Fixpunkte bei der Wirkung von G auf A. In den Punkten P_i kann man lokale Parameter x, y wählen, so daß der Automorphismus Multiplikation mit -1 die Form $x \mapsto x$, $y \mapsto -y$ erhält. Da $u = x^2$, $v = y^2$ und $t = xy$ die invarianten Funktionen erzeugen, erhalten wir im Bildpunkt $\overline{P}_i$ von P_i auf Y

$$\tilde{\mathcal{O}}_{\overline{P}_i} \cong \mathbf{C}[\![u, v, t]\!]/(u \cdot v - t^2).$$

Der singuläre Ort von Y besteht demzufolge aus 16 isolierten quadratischen Singularitäten. Nach Aufblasung der Punkte $\overline{P}_1, \ldots, \overline{P}_{16}$ entsteht eine singularitätenfreie Fläche X. Die Urbilder der Punkte $P_1, \ldots, P_{16}$ sind rationale singularitätenfreie Kurven $e_1, \ldots, e_{16}$ mit der Selbstschnittzahl -2.
Da auf A eine nirgends verschwindende holomorphe 2-Form existiert, findet man auf X ebenfalls eine solche 2-Form. Die kanonische Klasse von X ist daher Null. Es sei $\pi: A \to Y$ die kanonische Projektion. Nach Definition gilt $(\pi_*\mathcal{O}_A)^G = \mathcal{O}_Y$. Nach GROTHENDIECK [1], Kap. 5.2.1, folgt dann $H^1(A, \mathcal{O}_A)^G = H^1(Y, \mathcal{O}_Y)$. Da die Wirkung von G auf $H^1(A, \mathcal{O}_A)$ die Multiplikation mit -1 ist, erhalten wir $H^1(Y, \mathcal{O}_Y) = 0$. Wendet man jetzt die Cartan-Leray-Sequenz auf die Aufblasung $f: X \to Y$ an, so ergibt sich leicht

$$H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0.$$

K 3-Flächen, die man auf die beschriebene Art konstruieren kann, heißen *Kummersche Flächen.*

1.2.3. Es sei $X \to \mathbf{P}^2$ eine zweiblättrige Überlagerung, X eine glatte Fläche, D der Differentendivisor, der durch $\mathcal{O}_X(D) = \varphi^*\omega_{\mathbf{P}^2}^{-1} \otimes \omega_X$ (induziert durch $\det(\varphi^*): \varphi^*\omega_{\mathbf{P}^2} \to \omega_X$) definiert ist.
Ist $D_0 = \mathrm{Norm}(D) \subset \mathbf{P}^2$, so ist $\varphi^*D_0 = 2D$, und ist H eine Gerade in $\mathbf{P}^2$, so ist

$$(\varphi^*D_0 \cdot \varphi^*H) = 2\big(D \cdot \varphi^*(H)\big) = \deg \varphi(D_0 \cdot H) = 2(D_0 \cdot H),$$

also $\deg(D_0) = (D \cdot \varphi^*H) = 2n$ (da $\varphi^*H \to H$ eine zweiblättrige Überlagerung ist). Somit ist

$$\mathcal{O}_X(D) \cong \varphi^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(n), \quad n = \frac{1}{2}\deg(D_0),$$

und

$$\omega_X = \varphi^*\big(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(n) \otimes \omega_{\mathbf{P}^2}\big) = \varphi^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(n-3),$$

also $\omega_X \cong \mathcal{O}_X$ genau dann, wenn $\deg D_0 = 6$ ist. Ferner folgt aus $\deg D_0 = 6$, daß $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ ist, denn dann ist $\omega_X \cong \mathcal{O}_X$, $\mathcal{O}_X(D) \cong \varphi^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(3)$, und somit gilt, wenn T_0, T_1, T_2 homogene Koordinaten auf $\mathbf{P}^2$ sind: Auf der offenen Menge $X_i \subset X$ ($T_i \neq 0$) hat D eine Gleichung f_i, so daß $f_iT_i^3 = f_jT_j^3$ ist. Dann ist

$$\varphi^*\mathcal{O}_X(3)/\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(3) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(3),$$
$$(a + bf_i)\, T_i^3 \mapsto bT_i^3$$

auf der offenen Menge $T_i \neq 0$. Also ist

$$\chi\big(\mathcal{O}_X(D)\big) = \chi\big(\varphi_*\mathcal{O}_X(3)\big) = 2\chi\big(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(3)\big) = 20,$$

und wegen $\omega_X \cong \mathcal{O}_X$ ist

$$\chi\big(\mathcal{O}_X(D)\big) = \chi\big(\mathcal{O}_X(-D)\big) = \chi(\mathcal{O}_X) - \chi(\mathcal{O}_D),$$

$D \simeq D_0$ ebene Kurve vom Grad 6, daher $\chi(\mathcal{O}_D) = -18$, also

$$\chi(\mathcal{O}_X) = 2 - \dim H^1(X, \mathcal{O}_X) = 2.$$

Zu jeder glatten Kurve $D_0 \subset \mathbf{P}^2$ vom Grad 6 gibt es eine zweiblättrige Überlagerung $X \to \mathbf{P}^2$, die längs D_0 verzweigt ist.
Es sei $L = V(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(3))$ das Linienbündel mit $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(L) = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(3)$, D_0 definiert dann einen Schnitt $s\colon \mathbf{P}^2 \to L^{\otimes 2}$ (wegen $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(L^{\otimes 2}) \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(D)$), und ist $L \to L^{\otimes 2}$ die Abbildung $x \mapsto x \otimes x$, so ist $X = \mathbf{P}^2 \times_{L^{\otimes 2}} L \subset L$ die gewünschte Fläche.
Spezialfall. Es sei C eine glatte Kurve vom Geschlecht 2 und $\tau\colon C \to C$ die kanonische Involution, $Y = (C \times C)/S_2$ sei das symmetrische Produkt. Dann operiert τ auf Y durch $\tau(P + Q) = \tau(P) + \tau(Q)$, und ist $X = Y/\{\mathrm{id}, \tau\}$, so ist X eine K 3-Fläche, die sich wie folgt als zweiblättrige Überlagerung von $\mathbf{P}^2$ darstellen läßt:
Ist $\pi\colon C \to \mathbf{P}^1$ die kanonische Überlagerung, so induziert π eine vierblättrige Überlagerung

$$Y \xrightarrow{\pi} (\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)/S_2 = \mathbf{P}^2$$

mit $\pi \circ \tau = \pi$, also eine zweiblättrige Überlagerung $X \xrightarrow{\varphi} \mathbf{P}^2$. Durch lokale Rechnung folgt, daß X glatt ist. Ist $Y \xrightarrow{\psi_{P_0}} J(C)$ der kanonische birationale Morphismus von Y auf die Jacobische $J(C)$, den man durch Auszeichnung eines Punktes $P_0 \in C$ erhält, so ist

$$\begin{array}{ccc} Y & \to & J(C) \\ {\scriptstyle\tau}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle -\mathrm{id}} \\ Y & \to & J(C) \end{array}$$

kommutativ (da $P + \tau(P)$ linear äquivalent zu $Q + \tau(Q)$ ist); also ist X die zu $J(C)$ gehörige Kummersche Fläche.

1.3. Die Hodgezahlen einer K 3-Fläche X. Wie gewöhnlich bezeichnen wir mit $h^{pq} = \dim H^q(X, \Omega^p)$ die Hodgezahlen von X. Aus der Definition einer K 3-Fläche entnimmt man $h^{10} = 0$, $h^{02} = 1$.
Durch die allgemeinen Beziehungen $h^{pq} = h^{2-q,2-p}$ und $h^{pq} = h^{qp}$ bekommt man alle anderen Hodgezahlen bis auf h^{11}. Nach dem Riemann-Rochschen Satz für Flächen gilt

$$\chi(\mathcal{O}_X) = \frac{1}{12}\,\chi(X),$$

wobei

$$\chi(\mathcal{O}_X)\,\chi = \sum_p (-1)^p h^{p0}, \quad \chi(X) = \sum_{p,q} (-1)^{p+q} h^{pq}$$

ist. Daraus berechnet man leicht $h^{11} = 20$. Insgesamt ergibt sich folgendes Bild der Hodgezahlen h^{pq}:

$q \backslash p$	0	1	2
0	1	0	1
1	0	20	0
2	1	0	1

1.4. Satz. *Eine K 3-Fläche X ist einfach zusammenhängend.*

Es sei $\tilde{X} \to X$ eine n-blättrige Überlagerung. Dann gilt $\chi(X) = n\chi(\tilde{X})$. Andererseits ist klar, daß $\tilde{X}$ wieder eine K 3-Fläche ist. Deshalb gilt $\chi(X) = \chi(\tilde{X})$ und damit $n = 1$.

Korollar. *Die Kohomologiegruppen $H^i(X, \mathbf{Z})$ einer K 3-Fläche sind torsionsfrei.*

Beweis. Nach dem Satz über universelle Koeffizienten haben wir eine exakte Sequenz

$$0 \to \mathrm{Ext}^1(H_{q-1}(X, \mathbf{Z}), \mathbf{Z}) \to H^q(X, \mathbf{Z}) \to \mathrm{Hom}\big(H_q(X, \mathbf{Z}), \mathbf{Z})\big) \to 0. \qquad (*)$$

Da $H_1(X, \mathbf{Z})$ nach dem letzten Satz verschwindet, sieht man, daß $H^0(X, \mathbf{Z})$, $H^1(X, \mathbf{Z})$, $H^2(X, \mathbf{Z})$ torsionsfrei sind. Die übrigen Kohomologiegruppen sind dann nach der Poincaréschen Dualität ebenfalls torsionsfrei.

1.5. Die Struktur von $H^2(X, \mathbf{Z})$ als Gitter. Bekanntlich definiert das Cupprodukt eine perfekte Paarung

$$v: H^2(X, \mathbf{Z}) \times H^2(X, \mathbf{Z}) \to \mathbf{Z}. \qquad (**)$$

Unter dem *Index* des euklidischen Gitters $H^2(X, \mathbf{Z})$ versteht man die Differenz zwischen der Anzahl der positiven und der negativen Eigenwerte dieser Bilinearform.
Der Index ist eine topologische Invariante der Mannigfaltigkeit. Er kann mit Hilfe des Indexsatzes von HODGE berechnet werden:

$$\mathrm{index}\, X = \sum_{p,q} (-1)^q\, h^{pq}(X).$$

Daraus erhalten wir, daß der Index einer K 3-Fläche 16 ist.

Ein euklidisches Gitter E heißt *gerade*, wenn $x^2 \equiv 0 \bmod 2$ für jeden Vektor gilt. Nach MILNOR [1] ist die Bilinearform (**) auf einer vierdimensionalen einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit gerade, falls die zweite Stiefel-Withney-Klasse Null ist. Das ist hier erfüllt, da die erste Chernsche Klasse des Tangentialbündels Null ist.
Nach SERRE [2] ist ein gerades Gitter durch einen Index und Rang eindeutig bestimmt.

1.6. Da die kanonische Klasse trivial ist, nehmen die Formeln der Flächentheorie auf K 3-Flächen eine besonders einfache Gestalt an. Für einen Divisor D gilt

$$l(D) + l(-D) \geqq \frac{(D^2)}{2} + 2 \quad (\text{RIEMANN-ROCH}).$$

Insbesondere folgt für einen Divisor mit $D^2 \geqq -2$, daß D oder $-D$ äquivalent zu einem effektiven Divisor ist. Ist C eine irreduzible Kurve auf X, so erhält man ihr arithmetisches Geschlecht

$$p_a(C) = \frac{(C^2)}{2} + 1.$$

2. Der lokale Satz von Torelli für K 3-Flächen

2.1. Es sei X eine *Kählersche K 3-Fläche*, d. h. eine kompakte Kählersche Fläche mit $h^{01} = 0$ und $h^{02} = 1$. Auf X existiert eine nirgends verschwindene holomorphe 2-Form $\varkappa$, die bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt ist.
Es sei $\gamma_1, \ldots, \gamma_{22}$ eine Basis von $H_2(X, \mathbf{Z})$. Unter der *Periode* von X versteht man das Tupel $\left(\int\limits_{\gamma_1} \varkappa, \ldots, \int\limits_{\gamma_{22}} \varkappa\right)$. Dadurch wird invariant ein Punkt des projektiven Raumes

$$\mathbf{P}\big(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(H_2(X, \mathbf{Z}), \mathbf{C})\big) \cong \mathbf{P}\big(H^2(X, \mathbf{C})\big) \cong \mathbf{P}^{21}$$

definiert.
Ist $\omega_1, \ldots, \omega_{22}$ eine zu $\gamma_1, \ldots, \gamma_{22}$ duale Basis, die aus harmonischen Formen besteht, dann gilt

$$\varkappa = \sum_{i=1}^{22} \alpha_i \omega_i \quad \text{mit} \quad \alpha_i = \int\limits_{\gamma_i} \varkappa .$$

Es sei $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ und H die Matrix $\left(\int\limits_X \omega_i \wedge \omega_j\right)$. Da $\int\limits_X \varkappa \wedge \varkappa = 0$ und $\int\limits_X \varkappa \wedge \bar{\varkappa} > 0$ ist, erhalten wir die Periodenrelationen

$$\alpha H^t \alpha = 0, \quad \alpha H^t \bar{\alpha} > 0 .$$

Die Periode von X liegt also in einer offenen Menge einer 20-dimensionalen Quadrik Ω des $\mathbf{P}^{21}_{\mathbf{C}}$.
Es sei $f\colon X \to M$ eine glatte Familie von Kählerschen K 3-Flächen und X_0 die Faser in einem festen Punkt $t_0 \in M$. Wir setzen voraus, daß die Basis M kontrahierbar ist. Dann ist $f\colon X \to M$ eine triviale differenzierbare Faserung. Für jede Faser X_t, $t \in M$, erhalten wir kanonische Isomorphismen

$$H^2(X_t, \mathbf{C}) \cong H^2(X, \mathbf{C}) \cong H^2(X_0, \mathbf{C}) .$$

Daher kann man die Periode einer Faser X_t als ein Element des Raumes $\mathbf{P}\big(H^2(X_0, \mathbf{C})\big)$ auffassen.
Dadurch erhalten wir die Periodenabbildung

$$M \to \mathbf{P}\big(H^2(X_0, \mathbf{C})\big) .$$

2.2. Satz. *Die Periodenabbildung ist holomorph.*

Beweis. Es sei $\Omega^\bullet_{X/M}$ der Komplex der relativen längs der Fasern holomorphen Differentiale. Nach dem Lemma von Poincaré ist $\Omega^\bullet_{X/M}$ eine Auflösung von $f^\bullet \mathcal{O}_M$ ($f^\bullet$ bezeichnet das inverse Bild im Sinne von Garben abelscher Gruppen). Daraus erhalten wir eine Spektralsequenz

$$E_1^{pq} = R^q f_* \Omega^p_{X/M} \Rightarrow R^n f_* (f^\bullet \mathcal{O}_M) . \tag{$*$}$$

Nach der Theorie von Hodge degeneriert diese Spektralsequenz in jeder Faser und damit überhaupt. Ferner gilt nach dem Satz über universelle Koeffizienten

$$R^n f_* (f^\bullet \mathcal{O}_M) \cong R^n f_* \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{O}_M .$$

Aus der Sequenz $(*)$ erhält man daher eine Inklusion

$$f_* \Omega^2_{X/M} \hookrightarrow R^2 f_* \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{O}_M ,$$

folglich einen Schnitt des Bündels $\mathbf{P}(R^2 f_* \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{O}_M)$. Wenn M hinreichend klein gewählt ist, hat man einen Isomorphismus $R^2 f_* \mathbf{C} \cong H^2(X_0, \mathbf{C}) \times M$. Der oben definierte Schnitt gibt dann eine Abbildung $M \to \mathbf{P}(H^2(X_0, \mathbf{C}))$, die mit der Periodenabbildung übereinstimmt. Damit ist der Satz bewiesen.

Man kann aus der Periode einer K 3-Fläche die Neron-Serevi-Gruppe der algebraischen Zyklen erhalten. Grundlage dafür ist folgende wohlbekannte Tatsache (Weil [1]):

2.3. Satz. *Es sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit. Das Bild der Abbildung $H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \to H^2(X, \mathbf{Z})$ ist die Gruppe $H^2(X, \mathbf{Z}) \cap H^1(X, \Omega_X^1)$.*

Es sei $\xi \in H^2(X, \mathbf{Z})$ und $\check{\xi} \in H_2(X, \mathbf{Z})$ die duale Klasse.

2.4. Korollar. *ξ ist genau dann die Chernsche Klasse eines Linienbündels, wenn die Periodenabbildung auf $\check{\xi}$ verschwindet.*

Beweis. Es sei ω_ξ die harmonische Form aus der Kohomologieklasse ξ. Dann gilt

$$\int_{\check{\xi}} \varkappa = \int_X \omega_\xi \wedge \varkappa .$$

Ist ω_ξ vom Typ (1,1), so verschwindet das letzte Integral offenbar. Umgekehrt sei $\int_{\check{\xi}} \varkappa = 0$.

Da ω_ξ reell ist, können wir $\omega_\xi = a\varkappa + \eta + \bar{a}\bar{\varkappa}$ schreiben. Dabei ist η eine harmonische Form vom Typ (1, 1) und $a \in \mathbf{C}$. Wir erhalten

$$0 = \int_{\check{\xi}} \varkappa = \int_X \omega_\xi \wedge \varkappa = \bar{a} \int \bar{\varkappa} \wedge \varkappa .$$

Daraus folgt $\bar{a} = 0$ und $\omega_\xi = \eta$.

2.5. Definition. Es sei $f: X \to M$ eine glatte Familie von K 3-Flächen, X_0 die Faser im Punkt $t_0 \in M$ und Θ die Garbe von Keimen holomorpher Vektorfelder auf X_0. f heißt *effektiv parametrisiert* im Punkt $t_0 \in M$, wenn die Kodaira-Spencer-Abbildung $\varrho: T_{t_0} \to H^1(X_0, \Theta)$ injektiv ist. Ist ϱ surjektiv, so heißt f *vollständig*.

2.6. Theorem (lokaler Satz von Torelli für K 3-Flächen). *Es sei $f: X \to M$ eine glatte im Punkt $t_0 \in M$ effektiv parametrisierte Familie von K 3-Flächen. Dann ist die Periodenabbildung im Punkt t_0 eine Einbettung.*

Einen Beweis für dieses Resultat von Andreotti und Tjurina findet man in Schafarewitsch u. a. [1]. Nach dem Dualitätssatz von Serre gilt

$$\dim H^q(X_0, \Theta) = \dim H^{n-q}(X_0, \Omega_{X_0}^1).$$

Aus 1.3. ergibt sich $\dim H^2(X_0, \Theta) = 0$. Nach Kuranishi existiert daher eine in jedem Punkt effektiv und vollständig parametrisierte Familie Kählerscher K 3-Flächen (siehe Kap. II). Die Basis einer solchen Familie ist eine komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension $20 = \dim H^1(X_0, \Theta)$.
Es sei $f: X \to M$ eine solche Kuranishifamilie. In der Umgebung eines jeden Punktes $t_0 \in M$ liefert die Periodenabbildung eine offene Einbettung $M \to \Omega$.
Nach den Betrachtungen von 2.4. entspricht jedem Punkt eine Neron-Severi-Gruppe, nämlich der Kern der Abbildung $\omega: H_2(X_0, \mathbf{Z}) \to \mathbf{C}$. Es ist klar, daß die Menge der ω mit Kern $\omega = 0$ überall dicht in Ω ist. Daraus folgt, daß in der Umgebung

eines jeden Punktes $t_0 \in M$ Punkte t existieren, in denen die Neron-Severi-Gruppe der Faser X_t Null ist. Insbesondere kann X_t dann nicht algebraisch sein. Es kann folglich keine Kuranishifamilien algebraischer Flächen geben. Genauer gilt

2.7. Satz. *Die Menge* $\{t \in M \mid X_t$ *algebraisch*$\}$ *ist dicht in* M *und Vereinigung von abzählbar vielen 19-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten.*

3. Der globale Satz von Torelli für $K3$-Flächen

3.1. In diesem Abschnitt untersuchen wir analog zum Kapitel IV über globale Moduln von Kurven die Modulräume von K 3-Flächen. Wir verwenden dabei die Terminologie der algebraischen Felder.
Es sei $\mathscr{F}$ das Feld der K 3-Flächen. Da die Automorphismengruppe einer K 3-Fläche im allgemeinen unendlich ist, ist die Diagonale $\mathscr{F} \to \mathscr{F} \times \mathscr{F}$ nicht quasikompakt, und wir können deshalb das Kriterium von Artin nicht anwenden. Wir erzwingen die Quasikompaktheit durch folgende Definition.

3.2. Definition. Es sei $f\colon X \to S$ eine Familie von K 3-Flächen. Unter einer *n-Polarisierung* von f verstehen wir ein relativ sehr amples Linienbündel $\mathscr{L}$ auf X derart, daß $f_*\mathscr{L}$ lokal frei vom Rang $n+1$ ist. Das Feld der n-polarisierten K 3-Flächen bezeichnen wir mit $\mathscr{M}_n$.

Wir betrachten zunächst den Funktor der „n-linearisierten" K 3-Flächen

$$M_n(S) = \left\{ \begin{array}{l} n\text{-polarisierte } K\,3\text{-Flächen } X \xrightarrow{f} S,\, \mathscr{L} \\ \text{zusammen mit einen Isomorphismus} \\ \mathbf{P}(f_*\mathscr{L}) \cong \mathbf{P}^n_S,\ \text{modulo Isomorphismen.} \end{array} \right.$$

Man zeigt leicht, daß M_n ein offener Unterfunktor von $\mathrm{Hilb}^{P(t)}_{\mathbf{P}^n_{\mathbf{C}}}$ ist, wobei $P(t) = t^2(n-1) + 2$ ist.
Es sei $X \to M_n$ die universelle n-linearisierte K 3-Fläche über M_n und X_0 die Faser in einem festen Punkt $t_0 \in M_n$. Wir betrachten die Kodaira-Spencer-Abbildung $T_{M,t_0} \xrightarrow{\varrho} H^1(X_0, \Theta_{X_0})$, wobei Θ_{X_0} die Garbe der Keime holomorpher Vektorfelder auf X_0 bezeichnet. Da M_n eine offene Teilmenge des Hilbertschemas ist, ist der Tangentialraum T_{M,t_0} isomorph zu $H^0(X_0, N_{\mathbf{P}^n/X_0})$, wobei $N_{\mathbf{P}^n/X_0}$ das Normalenbündel von X_0 in $\mathbf{P}^n$ bezeichnet. In unserem Falle erhält man die Kodaira-Spencer-Abbildung aus der Sequenz

$$0 \to \Theta_{X_0} \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n} \otimes \mathcal{O}_{X_0} \to N_{\mathbf{P}^n/X_0} \to 0. \tag{$*$}$$

Das Kompositum der beiden Abbildungen

$$H^0(\mathbf{P}^n, \Theta_{\mathbf{P}^n}) \to H^0(X_0, \Theta_{\mathbf{P}^n} \otimes \mathcal{O}_{X_0})$$

und

$$H^0(X_0, \Theta_{\mathbf{P}^n} \otimes \mathcal{O}_{X_0}) \to H^0(X_0, N_{\mathbf{P}^n/X_0}) \cong T_{M_n,t_0}$$

bezeichnen wir mit Ψ.

3.3. Satz. *Das Schema* M_n *ist glatt. Die Sequenz*

$$0 \to H^0(\mathbf{P}^n, \Theta_{\mathbf{P}^n}) \to T_{M_n,t_0} \xrightarrow{\varrho} H^1(X_0, \Theta_{X_0})$$

ist exakt. Der Kokern von ϱ *ist eindimensional.*

Beweis. Aus der Theorie der Hilbertschema ist bekannt, daß die erste Behauptung äquivalent mit $H^1(X_0, N_{\mathbf{P}^n/X_0}) = 0$ ist. Nach 1.3. und dem Serreschen Dualitätssatz wissen wir, daß $H^0(X_0, \Theta_{X_0}) = H^2(X_0, \Theta_{X_0}) = 0$ ist. Daher erhält man aus der exakten Folge (*) die exakte Folge

$$0 \to H^0(X_0, \Theta_{\mathbf{P}^n} \otimes \mathcal{O}_{X_0}) \to H^0(X_0, N_{\mathbf{P}^n/X_0}) \to H^1(X_0, \Theta_{X_0})$$
$$\to H^1(X_0, \Theta_{\mathbf{P}^n} \otimes \mathcal{O}_{X_0}) \to H^1(X_0, N_{\mathbf{P}^n/X_0}) \to 0.$$

Bekanntlich hat man eine exakte Folge

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n} \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1)^{n+1} \to \Theta_{\mathbf{P}^n} \to 0.$$

Durch Tensorieren mit $\mathcal{O}_{X_0}$ erhält man ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & H^0(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}) & \to & H^0(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1)^{n+1}) & \to & H^0(\mathbf{P}^n, \Theta_{\mathbf{P}^n}) & \to 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} & \\ 0 \to & H^0(X_0, \mathcal{O}_{X_0}) & \to & H^0(X_0, \mathcal{O}_{X_0}(1)^{n+1}) & \to & H^0(X_0, \Theta_{\mathbf{P}^n} \otimes \mathcal{O}_{X_0}) & \to 0 \end{array}$$

und einen Isomorphismus

$$H^1(X_0, \Theta_{\mathbf{P}^n} \otimes \mathcal{O}_{X_0}) \cong H^2(X_0, \mathcal{O}_{X_0}).$$

Da die ersten beiden Pfeile des Diagramms nach Definition des Funktors M_n Isomorphismen sind, ist φ ein Isomorphismus. Setzt man die erhaltenen Ergebnisse in die anfangs angegebene Folge ein, so ergibt sich

$$0 \to H^0(\mathbf{P}^n, \Theta_{\mathbf{P}^n}) \to H^0(X_0, N_{\mathbf{P}^n/X_0}) \xrightarrow{\chi} H^1(X_0, \Theta_{X_0})$$
$$\to H^2(X_0, \mathcal{O}_{X_0}) \to H^1(X_0, N_{\mathbf{P}^n/X_0}) \to 0.$$

Da $\dim H^2(X_0, \mathcal{O}_{X_0}) = 1$ ist, folgt der Satz, wenn wir zeigen, daß χ nicht surjektiv ist. Das ist klar, da es nach den Überlegungen vor 2.7. keine vollständig parametrisierten Familien algebraischer K 3-Flächen gibt.

Es sei $M_n \to \mathcal{M}_n$ der kanonische Morphismus und $S \to \mathcal{M}_n$ ein Schnitt, der einer K 3-Fläche $X \xrightarrow{f} S$ mit einer n-Polarisierung $\mathcal{L}$ entspricht. Offenbar ist $M_n \times_{\mathcal{M}_n} S$ die Garbe der Isomorphismen von $\mathbf{P}(f_*\mathcal{L})$ und $\mathbf{P}_S^n$, d. h., der Morphismus $M_n \to \mathcal{M}_n$ ist darstellbar und glatt. Daraus folgt nach dem Kriterium von ARTIN leicht, daß $\mathcal{M}_n$ ein algebraisches Feld ist. Wir definieren jetzt einen rigiden Funktor auf $\mathcal{M}_n$. Es sei L ein unimodulares gerades Gitter vom Rang 22 und mit dem Index 16. Wir fixieren einen Vektor $l \in L$ mit $l^2 = 2n - 2$. Es sei G die Gruppe aller Automorphismen von L, die den Vektor l invariant lassen. Wir betrachten eine Familie $f\colon X \to S$ von K 3-Flächen mit einer n-Polarisierung $\mathcal{L}$. Dieses $\mathcal{L}$ definiert in der Homologie $H_2(X_s, \mathbf{Z})$ jeder Faser von f eine Klasse ξ_s.
Aus dem Satz von RIEMANN-ROCH und dem Satz von BERTINI folgt $\xi_s^2 = 2n - 2$. Es sei $P(X/S)$ das Prinzipalfaserbündel, dessen Faser im Punkt s die Isomorphismen von $H^2(X_s, \mathbf{Z})$ nach L sind, die den Vektor ξ_s auf den Vektor l abbilden. Als Basis des Bündels $P(X/S)$ muß man die offene Menge U aller s nehmen, für die solche Isomorphismen existieren. Wenn U mit S übereinstimmt, nennen wir die Familie $X \to S$ zusammen mit einem Schnitt von $P(X/S)$ über S eine *Familie rigider K 3-Flächen*. Für $S = \mathrm{Spec}(\mathbf{C})$ ist eine rigide K 3-Fläche ein Tripel (X, φ, ξ), wobei X

eine K 3-Fläche ist, $\xi \in H_2(X, \mathbf{Z})$ die Klasse eines sehr amplen Divisors auf X und $\varphi: H_2(X, \mathbf{Z}) \to L$ ein Isomorphismus, der ξ in l überführt.

Nach folgendem Lemma, dessen Beweis man in SCHAFAREWITSCH u. a. [1] findet, ist $P(X/S)$ ein rigider Funktor.

3.4. Lemma. *Ein Automorphismus von X, der auf der Gruppe $H^2(X, \mathbf{Z})$ die Identität induziert, ist die Identität.*

Wir bezeichnen mit R_n den Funktor rigider K 3-Flächen; $R_n(S)$ ist also die Menge aller Isomorphieklassen von Paaren $(X \to S, \varphi)$, X/S eine Familie von K 3-Flächen, φ ein Isomorphismus des lokalen Systems $H_2(X_s, \mathbf{Z})$ auf das konstante lokale System L über S, so daß $\varphi_s^{-1}(l)$ für jedes $s \in S$ die Klasse eines sehr amplen Divisors ist. Man hat einen kanonischen darstellbaren unverzweigten Morphismus $R_n \to \mathcal{M}_n$. Daraus folgt, daß R_n durch eine analytische Mannigfaltigkeit darstellbar ist.

3.5. Satz. *Die universelle Familie $X \to R_n$ rigider K 3-Flächen hat die Dimension* 19 *und ist effektiv parametrisiert.*

Beweis. Da die Abbildung $R_n \to \mathcal{M}_n$ etal ist, genügt es, die entsprechenden Behauptungen für $\mathcal{M}_n$ zu beweisen. Es sei x: Spec $(\mathbf{C}) \to \mathcal{M}_n$ ein Schnitt, der einer n-polarisierten K 3-Fläche X_0 entspricht. Der Tangentialraum T_0 von $\mathcal{M}_n$ im Punkt x ist die Menge der Isomorphieklassen n-polarisierter K 3-Flächen über Spec $(\mathbf{C}[\varepsilon])$ mit der speziellen Faser X_0 $(\varepsilon^2 = 0)$. Wir wählen eine projektive Einbettung der polarisierten Fläche X_0. Dann entspricht X_0 einem Punkt t_0 des Schemas M_n. Man hat einen kanonischen Morphismus $T_{M_n, t_0} \to T_0$. Offenbar wirkt die Liealgebra $GL(n + 1)$ von $PGL(n)$ auf T_{M_n, t_0}, und T_0 ist der Quotient unter dieser Wirkung. Wir betrachten die exakte Folge

$$0 \to H^0(\mathbf{P}^n, \Theta_{\mathbf{P}^n}) \to T_{M, t_0} \xrightarrow{\varrho} H^1(X_0, \Theta_{X_0}).$$

Offenbar kann man ϱ über T_0 faktorisieren. Da $GL(n + 1)$ transitiv auf $H^0(\mathbf{P}^n, \Theta_{\mathbf{P}^n}$ wirkt, erhält man eine Injektion $T_0 \to H^1(X_0, \Theta_{X_0})$. Daraus folgt die Behauptung.

3.6. Die Periodenabbildung. Im Vektorraum $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(L, \mathbf{C})$ ist auf kanonische Weise ein Skalarprodukt definiert. Es sei $\Omega \subset \mathbf{P}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(L, \mathbf{C}))$ die Menge aller Geraden ω, so daß $\omega_0^2 = 0$ und $\omega_0 \bar{\omega}_0 > 0$ für alle von Null verschiedenen Elemente $\omega_0 \in \omega$ gilt; $\Omega(l) \subset \Omega$ sei die Teilmannigfaltigkeit aller Geraden, die auf l senkrecht stehen. Da L den Rang 22 hat, hat $\Omega(l)$ die Dimension 19.

Es sei (X, φ, ξ) eine rigide K 3-Fläche, φ induziert einen Isomorphismus der Räume $\mathbf{P}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(H_2(X, \mathbf{Z}), \mathbf{C}))$ und $\mathbf{P}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(L, \mathbf{C}))$. Nach 2.1. wird die Periode von X dabei auf einen Punkt von $\Omega(l)$ abgebildet. Wir erhalten dadurch eine Abbildung Per: $R_n \to \Omega(l)$, die nach 2.2. holomorph ist. Da die universelle rigide K 3-Fläche über R_n effektiv parametrisiert und $\dim R_n = \dim \Omega(l) = 19$ ist, ist Per nach 2.6. ein lokaler Isomorphismus. Das Hauptresultat dieses Kapitels lautet

3.7. Satz (Torellisatz für K 3-Flächen; SCHAFAREWITSCH u. a. [1]). *Die Periodenabbildung* Per *ist eine offene Einbettung $R_n \to \Omega(l)$.*

Nach dem Gesagten genügt es zu zeigen, daß Per injektiv ist. Im folgenden Abschnitt werden wir in $\Omega(l)$ eine dichte Teilmenge Z konstruieren, so daß $\mathrm{Per}^{-1}(Z) \to Z$ bijektiv ist. Da R_n und $\Omega(l)$ separiert sind, folgt leicht, daß dann Per injektiv sein muß.

Man kann versuchen, den Torellisatz auf rigide Kählersche K 3-Flächen auszudehnen, indem man für R_n den Kuranishiraum der rigiden K 3-Flächen nimmt. Ein analoger Beweis stößt jedoch auf Schwierigkeiten, da der Kuranishiraum nicht separiert ist. (Der Satz wurde inzwischen von M. RAPOPORT und D. BURNS bewiesen.)

4. Der Beweis des Torellischen Satzes für K 3-Flächen

In § 1 haben wir gesehen, daß man jeder zweidimensionalen abelschen Mannigfaltigkeit auf kanonische Weise eine K 3-Fläche X zuordnen kann. Wenn die abelsche Mannigfaltigkeit eine elliptische Kurve enthält, so nennen wir X eine *spezielle Kummersche Fläche.*

4.1. Satz. *Es seien X und X' K 3-Flächen, und X sei speziell kummersch. Es sei $\psi\colon H_2(X, \mathbf{Z}) \to H_2(X', \mathbf{Z})$ ein Isomorphismus von Gittern, der die effektiven Zyklen von $H_2(X, \mathbf{Z})$ in effektive Zyklen überführt und die Perioden erhält. Dann ist X' speziell kummersch, und es existiert ein Isomorphismus $\varphi\colon X \to X'$, der in der Homologie ψ induziert.*

Den Beweis von 4.1. werden wir in 5.2. geben. Zunächst zeigen wir, daß aus 4.1. der Satz von TORELLI folgt.
Es sei $S_X \subset H_2(X, \mathbf{Z})$ die Neron-Severi-Gruppe der algebraischen Zyklen einer K 3-Fläche X. Mit $U_X \subset S_X$ bezeichnen wir die Unterhalbgruppe der Klassen effektiver Zyklen. Es sei $V_X \subset S_X$ die Menge der Zyklen a mit $a^2 \geqq 0$ und $au \geqq 0$ für alle $u \in U_X$. Aus dem Satz von RIEMANN-ROCH folgert man $V_X \subset U_X$. Weiterhin folgt aus dem Satz von RIEMANN-ROCH leicht

4.2. Lemma. *Es seien X und X' K 3-Flächen, und $\psi\colon S_X \to S_{X'}$ sei ein Homomorphismus der Neron-Severi-Gruppen, der die Klasse eines amplen Divisors auf X in ein Element von $V_{X'}$ überführt und das Schnittprodukt respektiert. Dann bildet ψ effektive Divisoren auf effektive Divisoren ab.*

Beweis. Ist $D \subset X$ eine reduzierte irreduzible Kurve, so ist

$$p_a(D) = 1 + \frac{(D^2)}{2} \geqq 0$$

und

$$l(D) + l(-D) \geqq 1 + p_a(D) > 0.$$

Da das Schnittprodukt erhalten bleibt, ist

$$l\big(\psi(D)\big) + l\big(\psi(-D)\big) \geqq 1 + p_a\big(\psi(D)\big) = 1 + p_a(D) > 0,$$

also $\psi(D)$ oder $\psi(-D)$ effektiv.
Ist H Hyperebenschnitt und $H' = \Psi(H)$, so ist

$$\big(\psi(-D) \cdot \psi(H)\big) = -(D \cdot H) < 0,$$

also ist $\psi(D)$ effektiv.
Es sei $P_X \subset U_X$ die Menge der Vektoren p mit $p^2 = -2$. Jedem $p \in P_X$ können wir eine Spiegelung des Raumes $H_2(X, \mathbf{Z})$ zuordnen: $S_p(x) = x + (x \cdot p)\, p$.

Es sei G die Gruppe der Automorphismen von $H_2(X, \mathbf{Z})$, die die Perioden erhalten, und $\Gamma(X)$ die Untergruppe, die von den Spiegelungen s_p erzeugt wird. Schließlich bezeichne D die Gruppe, die aus den Transformationen $x \to \pm x$ besteht. Mit Hilfe der Theorie der Coxetergruppen kann man beweisen

4.3. Lemma. *$\Gamma(X)$ ist ein Normalteiler von G, $G = G^V \Gamma(X) D$, wobei G^V die Untergruppe der Automorphismen von G bezeichnet, die V invariant lassen. Für jeden Vektor x mit $x^2 \geqq 0$ existiert ein $\gamma \in \Gamma(X) \cdot D$ derart, daß $\gamma x \in V$ ist.*
Das orthogonale Komplement von S_X in $H_2(X, \mathbf{Z})$ nennt man die *Gruppe der transzendenten Zyklen T_X*.

4.4. Lemma. *Es sei B ein positiv definites Gitter, gerade und vom Rang 2. Dann existiert eine zweidimensionale reduzible abelsche Mannigfaltigkeit A, deren Gitter der transzendenten Zyklen T_A isomorph zu B ist.*

Beweis. Es sei A ein komplexer Torus mit der Basiszahl 4. Dann erzeugt das Bild der Abbildung $\operatorname{Pic} A \to H^1(A, \Omega_A)$ ganz $H^1(A, \Omega_A)$. Daraus folgt, daß auf A eine Riemannsche Form existiert. Aus der Klassifikation der Endomorphismenringe nicht reduzibler abelscher Mannigfaltigkeiten (Mumford [6]) folgt, daß eine abelsche Mannigfaltigkeit mit der Basiszahl 4 reduzibel sein muß. Da ein komplexer Torus mit $T_A \cong B$ die Basiszahl 4 hat, genügt es zum Beweis von 4.4., einen komplexen Torus mit den gewünschten Eigenschaften zu finden.

Die zweite Homologiegruppe eines komplexen Torus ist isomorph zu dem Gitter E mit der Basis $e_1, \ldots, e_6$, so daß

$$e_i e_j = \begin{cases} 1 & \text{für } |i - j| = 3, \\ 0 & \text{für } |i - j| \neq 3 \end{cases}$$

ist. Da ein komplexer Torus durch seine Perioden eindeutig bestimmt ist, gibt es eine Bijektion der Tori der Dimension 2 und der komplexen linearen Funktionale ω auf E mit

$$\omega^2 = 0 \quad \text{und} \quad \omega\bar{\omega} > 0. \tag{$*$}$$

Bekanntlich kann jedes zweidimensionale Gitter in E eingebettet werden. Wir wählen eine solche Einbettung von B in E und bezeichnen das orthogonale Komplement mit B'. Es genügt folglich, ein lineares Funktional ω auf E zu finden derart, daß $\omega(B') = 0$ ist. Die Existenz folgt aus

4.5. Lemma. *Auf jedem zweidimensionalen positiv definiten Gitter B existiert ein komplexes lineares Funktional ω mit den Relationen $(*)$.*

Beweis. Es sei $B = \mathbf{Z}e_1 + \mathbf{Z}e_2$. Die positiv definite quadratische Form $F(x_1, x_2) = (x_1 e_1 + x_2 e_2)^2$ kann man in der Form $F(x_1, x_2) = |\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2|^2$ schreiben, wobei μ_1 und μ_2 aus $\mathbf{C}$ sind. $\omega = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2$ ist das gesuchte Funktional.

4.6. Es sei B ein positiv definites Gitter vom Rang 2, so daß $b^2 = 0 \pmod 4$ und ω ein lineares Funktional auf B mit der Relation $(*)$ ist. Dann gibt es eine bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte K 3-Fläche X, für die $T_X \cong B$ ist, wobei die Periode von X auf ω abgebildet wird. X ist dann eine spezielle Kummersche Fläche mit der Basiszahl 20.

Beweis. Es sei B' das Gitter mit derselben zugrunde liegenden abelschen Gruppe B, dessen Skalarprodukt aber gerade die Hälfte des Skalarproduktes auf B ist. Ferner sei A eine abelsche Mannigfaltigkeit mit $T_A \cong B'$, so daß die Periode in ω übergeht, und X die zugehörige K 3-Fläche. Offenbar ist $T_X \cong B$.
Es sei X' eine zweite K 3-Fläche mit $T_{X'} \cong B$. Man kann den Isomorphismus $T_X \to T_{X'}$ zu einem Isomorphismus $H_2(X, \mathbf{Z}) \to H_2(X', \mathbf{Z})$ ausdehnen.
Es sei ξ die Klasse eines sehr amplen Divisors in $H_2(X, \mathbf{Z})$. Nach Lemma 4.3 finden wir ein $\gamma \in \Gamma(X') \cdot D$ derart, daß $\gamma\varphi(\xi) \in V_{X'}$ ist.
Nach 4.2. überführt $\gamma\varphi$ effektive Divisoren in effektive Divisoren und erhält die Perioden. Dann finden wir nach 4.1. den gewünschten Isomorphismus $X \to X'$.
Aus 4.6. und den Bemerkungen am Schluß von § 3 folgt der globale Torellisatz, wenn wir folgendes zeigen:

4.7. Satz. *Die Menge aller $\omega \in \Omega(l)$, für die*
(i) rg Ker $\omega = 2$,
(ii) $a^2 \equiv 0 \pmod 4$ *für alle* $a \notin$ Ker ω *ist,*
ist überall dicht in $\Omega(l)$.

Der Beweis erfordert einige Details aus der Theorie der unimodularen Gitter. Wir geben daher nur die Details an.
Nach 4.5. folgt, daß ein $\omega \in \Omega(l)$ mit Ker $\omega = B$ existiert. Die Menge der ω mit (i) und (ii) ist also nicht leer.
Es sei G die Gruppe aller linearen Transformationen von $L \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$, die den Vektor l und das Skalarprodukt bis auf einen konstanten Faktor invariant lassen. Offenbar wirkt G transitiv auf $\Omega(l)$. Ferner sei $\Gamma \subset G$ die Gruppe aller Endomorphismen, deren Matrizen bezüglich einer geeigneten Basis von L Koeffizienten mit zu 2 primen Nennern haben und deren Umkehrmatrizen die gleiche Eigenschaft besitzen. Aus der Theorie der algebraischen Gruppen weiß man, daß Γ dicht in G liegt. Es sei $\omega \in \Omega(l)$ eine Periode, die (i) und (ii) erfüllt. Dann folgt, daß $\Gamma\omega$ überall dicht in $\Omega(l)$ ist. Man überzeugt sich leicht, daß alle Elemente von $\Gamma\omega$ den Bedingungen des Satzes genügen.

5. Spezielle Kummersche Flächen

Wir skizzieren jetzt den Beweis von 4.1. Der erste Schritt ist, zu zeigen, daß X' ebenfalls speziell kummersch ist. Dazu geben wir eine Charakterisierung einer speziellen Kummerschen Fläche mit Hilfe des Gitters S_X.
Es sei E ein Gitter mit der Basis $u_1, \ldots, u_4$ derart, daß $u_iu_j = \delta_{ij}$ ist. Mit G_4 bezeichnen wir das Teilgitter aller Vektoren $\sum x_iu_i$, so daß $\sum x_iu_i \equiv 0 \pmod 2$ ist.
Es sei z ein Vektor eines Gitters G mit $z^2 = 0$, $U \subset G$ das Teilgitter, das von allen Vektoren x mit $x^2 = -2$, $xz = 0$ und z aufgespannt wird. Wir bezeichnen mit $G(a)$ das Gitter U/Ga.

5.1. Satz. *Es sei X eine K 3-Fläche. Dann ist X speziell kummersch genau dann, wenn in der Gruppe S_X eine Klasse z eines irreduziblen Divisors existiert, so daß $z^2 = 0$ und $S_X(z) \cong G_4^4$ ist.*
Einen Vektor z mit diesen Eigenschaften nennen wir *kummersch.*

Beweis. Es sei zunächst X eine Kummersche Fläche, die einer reduziblen abelschen Mannigfaltigkeit A entspricht. Da A reduzibel ist, existiert ein surjektiver Homo-

morphismus von A auf eine elliptische Kurve B, dessen Fasern elliptische Kurven sind.
Die Gruppe $G = \{+1, -1\}$ operiert in natürlicher Weise auf A und B. Wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} A & \to & A/G & \leftarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ B & \to & B/G & \cong & \mathbf{P}^1 \end{array}$$

Es sei z die Klasse der allgemeinen Faser von f. Man überzeugt sich leicht, daß $S_X(z)$ von den irreduziblen Komponenten der ausgearteten Fasern von f erzeugt wird. Offenbar ist $f^{-1}(p)$ genau dann ausgeartet, wenn p Bild eines der vier Zweiteilungspunkte von B ist. In diesem Fall hat man $g^{-1}(p) = 2C$, wobei C eine glatte rationale Kurve ist. Da $2C$ Bild einer elliptischen Kurve auf A ist, die durch vier Zweiteilungspunkte geht, sieht man leicht, daß das Urbild von $2C$ auf X die Form $2L + L_1 + L_2 + L_3 + L_4$ hat. Dabei ist L die strenge Transformierte von C, und L_i, $i = 1, \ldots, 4$, sind die exzeptionellen Geraden. Man hat

$$(L^2) = (L_i^2) = -2, \quad (L_iL_j) = 0 \quad \text{für} \quad i \neq j, \quad (L_i \cdot L) = 1.$$

Damit haben wir die Faser $f^{-1}(p) = 2L + L_1 + \cdots + L_4$ berechnet. Wir sagen mit Kodaira, daß $f^{-1}(p)$ *vom Typ* D_4 ist. Die Abbildung

$$L \mapsto -u_1 - u_3, \quad L_1 \mapsto u_1 + u_2, \quad L_2 \mapsto u_1 - u_2,$$

$$L_3 \mapsto u_3 + u_4, \quad L_4 \mapsto u_3 - u_4$$

liefert einen Isomorphismus des Gitters G_4 mit dem Gitter

$$\mathbf{Z}L \oplus \mathbf{Z}L_1 \oplus \mathbf{Z}L_2 \oplus \mathbf{Z}L_3 \oplus \mathbf{Z}L_4/2L + L_1 + L_2 + L_3 + L_4.$$

Insgesamt erhält man $S_X(z) \cong G_4^4$.
Wir nehmen jetzt umgekehrt an, daß in S_X ein Kummerscher Vektor z existiert, und zeigen dann, daß X speziell kummersch ist. Es sei D ein irreduzibler Divisor, dessen Klasse z ist. Nachdem Satz von Bertini enthält $|D|$ einen glatten irreduziblen Divisor C. Man zeigt leicht, daß C eine elliptische Kurve und $l(C) = 2$ ist.
Das lineare System $|C|$ definiert eine Faserung $f\colon X \to \mathbf{P}^1$. Es seien $D_1, \ldots, D_r$ die ausgearteten Fasern und $D_i = \sum_j n_{ij}C_{ij}$ ihre Zerlegungen in irreduzible Komponenten. Ferner sei H_i das Gitter

$$H_i = \bigoplus_j \mathbf{Z}C_{ij}/\sum n_{ij}C_{ij}.$$

Nach den Bemerkungen am Anfang des Beweises hat man

$$H_1 \oplus \cdots \oplus H_r = S_X(z) \cong G_4^4.$$

Mit Hilfe der Kodairaklassifikation der singulären Fasern einer elliptischen Faserung kann man $H_i \cong G_4$ folgern. Daraus erhält man weiter, daß $f\colon X \to \mathbf{P}^1$ genau vier singuläre Fasern hat, die in den Punkten $u_1, \ldots, u_4 \in \mathbf{P}^1$ liegen mögen. Es sei $B \to \mathbf{P}^1$ eine elliptische Kurve mit den Verzweigungspunkten $u_1, \ldots, u_4$. Man kann auf B eine Gruppenstruktur wählen, so daß $B/G = \mathbf{P}^1$ ist. Es sei A das minimale Modell von $X \times_{\mathbf{P}^1} B$. Da Fasern vom Typ D_4 potentiell gute Reduktion haben, hat die Faserung $A \xrightarrow{\varphi} B$ keine entarteten Fasern. Nach der Klassifikation der kompakten komplexen Flächen ist A dann eine abelsche Mannigfaltigkeit. Wir können voraussetzen, daß das Gruppengesetz auf A so gewählt sei, daß φ ein Homomorphismus ist. Offenbar ist dann X die Kummersche Fläche, die zu A assoziiert ist.

5.2. Wir benötigen einige Tatsachen aus der Topologie der Kummerschen Flächen, die wir ohne Beweis angeben.
Es sei A eine abelsche Mannigfaltigkeit der Dimension 2 und N die Menge der Zweiteilungspunkte. Weiter sei X die zu A assoziierte Kummersche Fläche. Wir haben eine Abbildung $A - N \to X$ und daher in der Homologie

$$\begin{tikzcd} H_2(A - N, \mathbf{Z}) \arrow[r] \arrow[d] & H_2(X, \mathbf{Z}) \\ H_2(A, \mathbf{Z}) \arrow[ur, "\pi"'] & \end{tikzcd}$$

Es sei $\pi_X \subset H_2(X, \mathbf{Z})$ das Gitter, daß von den 16 ausgezeichneten Geraden erzeugt wird. Dann ist das orthogonale Komplement von π_X das Gitter $\pi_* H_2(A, \mathbf{Z})$. Es sei φ ein Automorphismus von $H_2(X, \mathbf{Z})$, der auf $\pi_* H_2(A, \mathbf{Z})$ die Identität ist und eine der ausgearteten Geraden invariant läßt. Dann ist φ die Identität.

Beweis von 4.1. Ohne große Schwierigkeiten zeigt man, daß ψ Kummersche Vektoren auf Kummersche Vektoren abbildet. Daraus erhält man nach 5.1., daß X' speziell kummersch ist und daß $\psi(\pi_X) \subset \pi_{X'}$ ist. Dann induziert ψ_i einen Isomorphismus der orthogonalen Komplemente $\psi_1 : H_2(A, \mathbf{Z}) \to H_2(A', \mathbf{Z})$, der ebenfalls effektive Divisoren und das Schnittprodukt respektiert. Wir werden weiter unten sehen, daß ψ_1 durch einen Morphismus $\varphi_1 : A \to A'$ induziert wird.
Es sei l die ausgezeichnete Gerade aus π_X, die dem Nullpunkt von A entspricht. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß $\psi(l)$ dem Nullpunkt von A' entspricht.
Der Morphismus φ_1 induziert einen Morphismus $\varphi: X \to X'$. Es sei $\varphi_*: H_2(X, \mathbf{Z}) \to H_2(X', \mathbf{Z})$ die induzierte Abbildung in der Kohomologie. Da $\varphi_*(l) = \psi(l)$ ist und φ_* und ψ auf $H_2(A, \mathbf{Z})$ übereinstimmen, müssen φ und ψ nach den Bemerkungen von 4.9. übereinstimmen.

5.3. Lemma. *Es seien A_1 und A_2 zweidimensionale abelsche Mannigfaltigkeiten. Es sei $\psi_1 : H_2(A_1, \mathbf{Z}) \to H_2(A_2, \mathbf{Z})$ ein Isomorphismus, der das Skalarprodukt und die Perioden respektiert und effektive Divisoren auf effektive Divisoren abbildet. Dann wird ψ_1 durch einen Isomorphismus abelscher Mannigfaltigkeiten $\varphi_1 : A_1 \to A_2$ induziert.*

Beweis. Es sei $A_1 = \mathbf{C}^2/\Gamma_1$, $A_2 = \mathbf{C}^2/\Gamma_2$, $e_1, \ldots, e_4$ eine $\mathbf{Z}$-Basis von Γ_1 und $f_1, \ldots, f_4$ eine $\mathbf{Z}$-Basis von Γ_2. Dann ist

$$\gamma_1 = e_1 \wedge e_2, \quad \gamma_2 = e_3 \wedge e_4, \quad \gamma_3 = e_1 \wedge e_3,$$

$$\gamma_4 = e_4 \wedge e_2, \quad \gamma_5 = e_1 \wedge e_4, \quad \gamma_6 = e_2 \wedge e_3$$

eine $\mathbf{Z}$-Basis von $H_2(A, \mathbf{Z})$, und analog erhält man eine $\mathbf{Z}$-Basis $\delta_1, \ldots, \delta_6$ von $H_2(A_2, \mathbf{Z})$.
Es sei J' die Schnittmatrix von $\gamma_1, \ldots, \gamma_6$ und $\delta_1, \ldots, \delta_6$. Die das Schnittprodukt erhaltenden Isomorphismen $\psi: H_2(A_1, \mathbf{R}) \to H_2(A_2, \mathbf{R})$ entsprechen bijektiv den Elementen

der Gruppe von Matrizen

$$G(\mathbf{R}) = \{X \in GL(6\mathbf{R}) \mid {}^tXJ'X = J'\}.$$

Es seien α_i die folgenden Automorphismen von $H_2(A_2, \mathbf{R})$:

1. $\alpha_1 = \mathrm{id}$,
2. $\alpha_2 = -\mathrm{id}$,
3. $\alpha_3 = \tau$ mit $\tau(\delta_{2i-1}) = \delta_{2i}$, $i = 1, \ldots, 3$, und $\tau^2 = \mathrm{id}$,
4. $\alpha_4 = -\tau$.

Man zeigt, daß zu jedem ψ ein i derart existiert, daß $\alpha_i \circ \psi \in G^0(\mathbf{R})$ ist, wobei $G^0(\mathbf{R})$ die Zusammenhangskomponente der 1 von $G(\mathbf{R})$ bezeichnet. Da die Abbildung $SL(4\mathbf{R}) \to G(\mathbf{R})$ surjektiv ist, wird $\alpha_i \circ \psi$ durch einen Isomorphismus $\varphi\colon \Gamma_1 \otimes \mathbf{R} \to \Gamma_2 \otimes \mathbf{R}$ induziert. Ist $\psi(H_2(A_1, \mathbf{Z})) \subset H_2(A_2, \mathbf{Z})$, so folgt $\varphi(\Gamma_1) \subset \Gamma_2$, da $SL(4\mathbf{Z})$ eine maximale diskrete Untergruppe von $SL(4\mathbf{R})$ ist. Wir erhalten dann eine Abbildung $\varphi\colon \mathbf{C}^2/\Gamma_1 \to \mathbf{C}^2/\Gamma_2$, von der man nachweist, daß sie die komplexe Struktur respektiert, da die Perioden erhalten bleiben.

1. Ist also $\psi_1 \in G^0(\mathbf{R})$, so ist der Satz bewiesen.

2. Es sei $-\psi_1 \in G^0(\mathbf{R})$. Dann folgt, daß $-\psi_1$ durch einen Isomorphismus $A_1 \to A_2$ induziert wird. Da aber ψ_1 effektive Divisoren respektiert, erhalten wir einen Widerspruch.

Es sei $\alpha_3 \circ \psi \in G^0(\mathbf{R})$. Da A_2 eine abelsche Mannigfaltigket ist, findet man eine alternierende Bilinearform E auf Γ_2, die den Riemannschen Periodenrelationen genügt. Nach geeigneter Wahl der Basis in Γ_2 hat E die Form $E = d_1 f_1^* \wedge f_3^* + d_2 f_2^* \wedge f_4^*$, wobei $d_1, d_2 \in \mathbf{Z}$, $d_1, d_2 > 0$ und $f_1^*, \ldots, f_4^*$ die zu $f_1, \ldots, f_4$ duale Basis ist. Es seien z^1, z^2 komplexe Koordinaten auf A_2, $dz = \begin{pmatrix} dz^1 \\ dz^2 \end{pmatrix}$, und P sei die Periodenmatrix von A_2. Dann gilt

$$\begin{pmatrix} dz \\ d\bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ \bar{P} \end{pmatrix} (f) \quad \text{mit} \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_4 \end{pmatrix}.$$

Es sei $(\psi, \bar{\psi})$ invers zu $\begin{pmatrix} P \\ \bar{P} \end{pmatrix}$ und $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$. Die Periodenrelationen von E lauten

$$\begin{pmatrix} {}^t\psi \\ {}^t\bar{\psi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix} (\psi, \bar{\psi}) = \begin{pmatrix} 0 & iH/2 \\ -iH/2 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei H die zu E assozierte positiv definite hermitesche Matrix ist. Wählt man die Koordinaten auf A_2 geeignet, so kann man erreichen, daß $P = (I_4, \pi)$ (I_4 Einheitsmatrix) ist. Die Periodenrelationen haben dann die Form

1. ${}^t\pi D = D\pi$,
2. $D \operatorname{Im} \pi > 0$.

Es sei $e_1, \ldots, e_4$ eine Basis von Γ_1 mit $\varphi_i(e_i) = f_i$, wobei $\varphi\colon \Gamma_1 \to \Gamma_2$ von $\alpha_3 \cdot \psi$ induziert wird. Da ψ_1 die Perioden erhält, berechnet man leicht die Periodenmatrix P' von A_1:

$$P' = (-{}^t\pi, I_4), \quad \psi' = \begin{pmatrix} \dfrac{i}{2}\, {}^t(\operatorname{Im} \pi)^{-1} \\[2ex] \dfrac{i}{2}\, \bar{\pi}^t(\operatorname{Im} \pi)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Es sei $E' = \psi_1^* E = -d_1 e_2^* \wedge e_4 - d_2 e_1^* \wedge e_3^*$. Da ψ_1 effektive Divisoren in effektive Divisoren überführt, muß E' den Periodenrelationen genügen. Die Relationen für E' und $D' = \begin{pmatrix} -d_2 & 0 \\ 0 & -d_1 \end{pmatrix}$ sind analog:

1'. $\bar{\pi} D' = D' {}^t\bar{\pi}$ (oder ${}^t\pi D = D\pi$),

2'. $(\operatorname{Im} \pi)\, D' > 0$.

Man sieht, daß sich die Relationen 2 und 2' widersprechen. Damit ist der Fall $\alpha_3 \cdot \psi \in G^0(\mathbf{R})$ ausgeschlossen.

Den Fall $\alpha_4 \cdot \psi \in G^0(\mathbf{R})$ behandelt man analog.

Manuskripteingang: 7. 4. 1975

VERFASSER:

HEINZ-JÖRG FITZNER, WERNER KLEINERT, HERBERT KURKE, GERHARD PFISTER und THOMAS ZINK, Sektion Mathematik der Humboldt-Universität Berlin bzw. Zentralinstitut für Mathematik der Akademie der Wissenschaften der DDR