Beiträge zur Algebra und Geometrie
7 (1978), 79–90

Kategorizitätsbeweise in der Geometrie

PETER SCHREIBER

Das Anliegen einiger geometrischer Theorien besteht in der bis auf Isomorphie eindeutigen axiomatischen Charakterisierung einer ganz bestimmten, inhaltlich meist wohlbekannten geometrischen Struktur, z. B. des reellen n-dimensionalen euklidischen, hyperbolischen, affinen oder projektiven Raumes oder der Kugeloberfläche. In der vorliegenden Arbeit werden die zur Auswahl geeigneter Grundbegriffe (d. h. eigentlich: geeigneter formalisierter Sprachen) und zur Aufstellung kategorischer Axiomensysteme in der gewählten Sprache sowie zur Führung der Kategorizitätsbeweise benutzten Methoden, insbesondere die Rolle der Koordinatenmethode, vom Standpunkt der mathematischen Logik analysiert und verallgemeinert, und es werden daraus Schlußfolgerungen für rationelle Wege zum Aufbau einer kategorischen formalisierten Theorie gezogen und diese auf Beispiele angewendet. In den Abschnitten 1 bis 3 sind die für das Folgende benötigten Begriffe und Bezeichnungen in aller Kürze zusammengestellt. Diese Dinge werden in vielen Lehrbüchern der mathematischen Logik ausführlich behandelt, insbesondere in [4] und [5] in einer speziell auf Anwendungen in der Geometrie zugeschnittenen Weise.

1. Elementare Sprachen und deren Interpretation, Kategorizität

Eine formalisierte prädikatenlogische Sprache $\mathscr{S}$ ist bestimmt durch die Wahl von n Sorten von je abzählbar vielen Variablen (z. B. $p_0, p_1, p_2, \ldots$ für Punkte, $g_0, g_1, g_2, \ldots$ für Geraden), eine induktive Termdefinition mittels geeigneter Symbole für Operationen und eventuell gewisser Individuenkonstanten. (Als Beispiel einer Termdefinition in einer Sprache mit Punkt- und Geradenvariablen mittels zweier Operationssymbole L und S für Verbinden bzw. Schneiden diene:

(a) *Alle p_i sind Terme der Sorte Punkt, alle g_i sind Terme der Sorte Gerade;*

(b) *sind t_1, t_2 Terme der Sorte Punkt, so ist $L(t_1, t_2)$ ein Term der Sorte Gerade;*

(c) *sind t_1, t_2 Terme der Sorte Gerade, so ist $S(t_1, t_2)$ ein Term der Sorte Punkt;*

(d) *eine beliebige Zeichenreihe ist nur dann ein Term der Sorte Punkt bzw. Gerade, wenn sich dies auf Grund der Regeln* (a), (b), (c) *ergibt.*)

Sind für eine Sprache keine Individuenkonstanten und keine Operationssymbole vorgesehen, so sind die Variablen die einzigen Terme. Allgemein wird die Definition einer Sprache $\mathscr{S}$ abgeschlossen durch die Auszeichnung gewisser prädikativer Ausdrücke zur Bezeichnung der gewählten Grundrelationen, aufgebaut aus Termen jeweils anzugebender Sorte und gewissen verbindenden Bestandteilen (Relationssymbolen oder auch normiert benutzten Wörtern der Umgangssprache). Insbesondere sollen stets alle Termgleichungen $t_1 = t_2$ (t_1, t_2 Terme gleicher Sorte) prädikative Ausdrücke von $\mathscr{S}$ sein, ferner z. B. Zeichenreihen der Form $t_1t_2 \cong t_3t_4$ (t_1, t_2, t_3, t_4 Punktterme), der Form $t_1 \in t_2$ (t_1 Punktterm, t_2 Geradenterm) usw. Die n-sortige Sprache $\mathscr{S}$ besteht dann stets aus allen Zeichenreihen, die man aus den gewählten prädikativen Ausdrücken durch wiederholte aussagenlogische Verknüpfung und Quantifizierung erhalten kann. Verwendet man etwa die Zeichen $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ für *nicht, und, oder, wenn so* und *genau dann wenn* und $\bigwedge xH(x)$ bzw. $\bigvee xH(x)$ für *Für alle Dinge der Sorte x gilt $H(x)$* bzw. *Es gibt ein Ding der Sorte x, für welches $H(x)$ gilt,* so kann man in der hier als Beispiel mitgezogenen Sprache $\mathscr{S}$ u. a. formulieren:

$$\bigwedge g_0 \bigvee p_1p_2(\neg\, p_1 = p_2 \wedge p_1 \in g_0 \wedge p_2 \in g_0)$$

(zu lesen: Auf jeder Geraden liegen wenigstens zwei verschiedene Punkte),

$$\begin{aligned}\neg \bigvee g_0(p_1 \in g_0 \wedge p_2 \in g_0 \wedge p_3 \in g_0) \wedge p_4 \in L(p_1, p_2) \wedge p_5 \in L(p_2, p_3)\\ \wedge\, p_6 \in L(p_3, p_1) \wedge p_1p_4 \cong p_4p_2 \wedge p_2p_5 \cong p_5p_3 \wedge p_3p_6 \cong p_6p_1\\ \rightarrow S\big(L(p_3, p_4), L(p_2, p_6)\big) \in L(p_1, p_5).\end{aligned}$$

(Man überlege sich, daß diese schon relativ komplizierte Zeichenreihe bedeutet, daß sich die Seitenhalbierenden eines Dreiecks in einem gemeinsamen Punkt schneiden, falls man den prädikativen Teilausdrücken die „übliche" Bedeutung beilegt.) Im folgenden werden wir abkürzend $\bigvee\, !!xH(x)$ (Es gibt *genau* ein x mit der Eigenschaft $H(x)$) statt

$$\bigvee xH(x) \wedge \bigwedge x_1x_2\big(H(x_1) \wedge H(x_2) \rightarrow x_1 = x_2\big)$$

schreiben. Für weitere Einzelheiten der Definition und Benutzung formalisierter Sprachen sei auf [4] und [5] verwiesen. Es sei aber hier nochmals betont, daß das Wesentliche nicht die Verwendung von (mehr oder weniger) abkürzenden Symbolen ist (man kann auch in einer formalisierten Sprache getrost *und* statt $\wedge$ und *p liegt auf g* statt $p \in g$ schreiben), sondern die exakte Definition, welche und nur welche Zeichenreihen Terme bzw. Ausdrücke der betrachteten Sprache sind.
Eine ***n-sortige Struktur*** ist ein System der Form

$$(M_1, \ldots, M_n; R_1, \ldots, R_m; F_1, \ldots, F_k; c_1, \ldots, c_p),$$

wobei $M_1, \ldots, M_n$ nichtleere Mengen (die *Grundbereiche der Struktur*), $R_1, \ldots, R_m$ *Relationen im Bereich dieser Mengen*, d. h. Teilmengen von kartesischen Produkten der Form

$$\underbrace{M_{i_1} \times M_{i_2} \times \cdots \times M_{i_r}}_{(*)} \qquad (i_1, \ldots, i_r \leqq n),$$

$F_1, \ldots, F_k$ (im allgemeinen partielle) *Operationen im Bereich dieser Mengen*, d. h. eindeutige Abbildungen aus Mengen der Form (*) in eine der Mengen M_i, und schließlich $c_1, \ldots, c_p$ gewisse ausgezeichnete Elemente einiger der Mengen $M_1, \ldots, M_n$ sind. Dabei ist eventuell $n = 1$ (einsortige Struktur), $m = 0$ („algebraische" Struktur im engeren Sinn), $k = 0$ oder $p = 0$, jedoch sei $m + k > 0$.

Eine *Interpretation* ω einer n-sortigen formalisierten Sprache ω ordnet jeder Variablensorte eine nichtleere Menge, jedem Relationssymbol eine Relation entsprechenden Typs im Bereich dieser Mengen, jedem Operationssymbol eine (im allgemeinen partielle) Operation im Bereich dieser Mengen und jeder Individuenkonstanten ein Element entsprechender Sorte zu, so daß die den Sprach-Grundbestandteilen zugeordneten Objekte insgesamt eine n-sortige Struktur bilden, die wir ebenfalls mit ω bezeichnen, soweit aus dem Zusammenhang hervorgeht, welcher Variablensorte welche Grundmenge, welchem Relationssymbol welche Relation usw. zugeordnet ist. In bezug auf eine Interpretation ω bzw. die durch sie gegebene Struktur nimmt jeder Term t der Sprache $\mathcal{S}$ den Charakter einer Operationsbezeichnung an, wobei die Zahl der verschiedenen in t vorkommenden Variablen die Stellenzahl der bezeichneten Operation $\omega(t)$ angibt. Insbesondere bezeichnet dann ein variablenfreier Term t ein bestimmtes Element $\omega(t)$ eines Grundbereichs der Struktur ω. Da wir ausdrücklich partielle Operationen zur Interpretation der Grundsymbole zulassen, ist auch $\omega(t)$ im allgemeinen eine nur partielle Operation bzw. für einen variablenfreien Term t eventuell $\omega(t)$ ein nicht definiertes Ding. Analog nimmt in bezug auf eine Interpretation ω ein beliebiger Ausdruck H den Charakter einer Relation $\omega(H)$ an, deren Stellenzahl und Typ von der Anzahl und Sorte der in H frei vorkommenden Variablen abhängt. Ist insbesondere H ein *abgeschlossener Ausdruck*, d. h. ein Ausdruck ohne freie Variablen, so ist $\omega(H)$ eine in bezug auf die Struktur ω wahre oder falsche Aussage.

Ist in bezug auf eine Interpretation ω von $\mathcal{S}$ für einen Ausdruck $H \in \mathcal{S}$ die Relation $\omega(H)$ identisch erfüllt (bzw. falls H abgeschlossen ist, die Aussage $\omega(H)$ wahr), so heißt H *allgemeingültig in* ω und ω ein *Modell von* H. Eine Interpretation ω ist ein Modell eines in der Sprache $\mathcal{S}$ formulierten *Axiomensystems* X (d. h. einer beliebigen Teilmenge X von $\mathcal{S}$), wenn ω Modell für alle $H \in X$ ist. Ein Ausdruck $H \in \mathcal{S}$ *folgt aus dem Axiomensystem* $X \subseteq \mathcal{S}$, wenn H in allen Modellen von X allgemeingültig ist, d. h., wenn jedes Modell von X auch Modell von H ist. Es bezeichne für $X \subseteq \mathcal{S}$

$$Fl_{\mathcal{S}}(X) := \{H \colon H \in S, \text{ und } H \text{ folgt aus } X\}.$$

Die Menge $Fl_{\mathcal{S}}(X)$, auch als *Folgerungshülle in* X (*bezüglich der Sprache* $\mathcal{S}$) bezeichnet, ist die durch die Sprache $\mathcal{S}$ und das in ihr formulierte Axiomensystem X erzeugte *axiomatische elementare Theorie*. Daher sind Axiomensysteme $X_1, X_2 \subseteq \mathcal{S}$ *semantisch äquivalent* (erzeugen die gleiche Theorie), wenn $Fl_{\mathcal{S}}(X_1) = Fl_{\mathcal{S}}(X_2)$ ist. Das ist genau dann der Fall, wenn $X_1 \subseteq Fl_{\mathcal{S}}(X_2)$ und $X_2 \subseteq Fl_{\mathcal{S}}(X_1)$ gilt.

Es seien ω_1, ω_2 zwei Interpretationen einer Sprache $\mathcal{S}$. Eine eineindeutige Abbildung φ der Vereinigung der Grundbereiche von ω_1 auf die Verteilung der Grundbereiche von ω_2 heißt ein *Isomorphismus von* ω_1 *auf* ω_2, wenn gilt:

(a) *φ bildet den Grundbereich jeder Sorte von Elementen von ω_1 auf den Grundbereich entsprechender Sorte von ω_2 ab.*

(b) *Ist R ein n-stelliges Relationssymbol von $\mathcal{S}$ und sind $\xi_1, \ldots, \xi_n$ Dinge entsprechender Sorten aus der Struktur ω_1, so gilt $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \omega_1(R)$ genau dann, wenn $\big(\varphi(\xi_1), \ldots, \varphi(\xi_n)\big) \in \omega_2(R)$.*

(c) *Ist F ein n-stelliges Operationssymbol von $\mathcal{S}$ und sind $\xi_1, \ldots, \xi_n$ Dinge entsprechender Sorten aus der Struktur ω_1, so existiert $\omega_1(F)\,(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ und ist gleich η genau dann, wenn $\omega_2(F)\,\big(\varphi(\xi_1), \ldots, \varphi(\xi_n)\big)$ existiert und gleich $\varphi(\eta)$ ist.*

(d) *Für jede Individuenkonstante c von $\mathcal{S}$ ist $\varphi\big(\omega_1(c)\big) = \omega_2(c)$.*

Durch Induktion über die Kompliziertheit der Terme bzw. Ausdrücke von $\mathcal{S}$ erhält man hieraus leicht: *Ist φ ein Isomorphismus von ω_1 auf ω_2, so trifft das in* (c) *für*

Operationsgrundsymbole F von $\mathcal{S}$ Geforderte für alle Terme und das in (b) *für Relationsgrundsymbole R von $\mathcal{S}$ Geforderte für alle Ausdrücke $H \in \mathcal{S}$ zu.* Ist insbesondere $H \in S$ ein abgeschlossener Ausdruck, so ist $\omega_1(H)$ eine wahre Aussage über die Struktur ω_1 genau dann, wenn $\omega_2(H)$ eine wahre Aussage über die Struktur ω_2 ist.
Ein Axiomensystem $X \subseteq \mathcal{S}$ heißt *kategorisch*, wenn X *semantisch widerspruchsfrei* ist (d. h. wenigstens ein Modell besitzt) und wenn je zwei Modelle von X zueinander isomorph sind. Aus einem wichtigen Satz der mathematischen Logik (Satz von TARSKI, vgl. [1, S. 119] und [2, S. 346], in der logischen Literatur gern auch als „Aufwärtsform" des Satzes von LÖWENHEIM-SKOLEM bezeichnet) folgt jedoch, daß ein Axiomensystem im bisher definierten Sinn höchstens dann kategorisch ist, wenn alle seine Modelle endlich sind. Daher muß sich jeder Versuch, die in der Einleitung genannten und andere unendliche geometrische Strukturen implizit durch kategorische Axiomensysteme zu charakterisieren, auf die im folgenden Abschnitt behandelten nichtelementaren Verallgemeinerungen der bisher eingeführten Begriffe beziehen.

2. Nichtelementare Sprachen und Theorien

Es sei $\mathcal{S}$ eine formalisierte Sprache und σ eine nichtleere Klasse von Interpretationen von $\mathcal{S}$. Dann heißt das Paar $(\mathcal{S}, \sigma)$ eine *nichtelementare Sprache.* Im konkreten Fall wird σ stets durch eine *Interpretationsvorschrift für $\mathcal{S}$* gegeben. Enthält die Sprache $\mathcal{S}$ z. B. Variablen x_i und M_j zweier Sorten und prädikativer Ausdrücke der Form $x_i\, e\, M_j$ so kann die Interpretationsvorschrift in der Festlegung bestehen, daß nach Wahl eines beliebigen nichtleeren Grundbereichs M für die Variablen x_i für die Variablen M_j die Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$ als Grundbereich zu wählen ist und das Symbol e durch die Elementrelation zu interpretieren ist. Die Klasse σ besteht aus allen Interpretationen von $\mathcal{S}$, die diesen Bedingungen genügen, während z. B. die zunächst mit der syntaktischen Struktur von $\mathcal{S}$ verträgliche Interpretation, die Variablen x_i als Männer und die Variablen M_j als Frauen und das Symbol e als Bestehen einer Ehe zwischen x_i und M_j zu deuten, durch die Interpretationsvorschrift aus der Klasse der „zulässigen" Interpretationen ausgeschlossen wird. Wir werden im folgenden auch die Vorschrift zur Definition einer Klasse σ von Interpretationen mit σ bezeichnen. Eine nichtelementare Sprache $(\mathcal{S}, \sigma)$ ist daher im wesentlichen eine mit gewissen Vorstellungen über die mögliche Bedeutung der Sprachgrundbestandteile versehene formalisierte Sprache.
Zu einer nichtelementaren Sprache $(\mathcal{S}, \sigma)$ gehört der durch

$$Fl_S^\sigma(X) := \{H : H \in S \textit{ und } H \textit{ allgemeingültig in allen } \omega \in \sigma \textit{ mit } \sigma \textit{ Modell von } X\}$$

analog zu $Fl_{\mathcal{S}}$ definierte *nichtelementare Folgerungsoperator* $Fl^\sigma_{\mathcal{S}}$. Für $X \subseteq \mathcal{S}$ ist $Fl^\sigma_{\mathcal{S}}(X)$ die in der nichtelementaren Sprache $(\mathcal{S}, \sigma)$ durch das Axiomensystem X erzeugte *nichtelementare Theorie.* Bezeichnet für eine beliebige Sprache $\mathcal{S}$ stets σ_0 die Klasse aller (im elementaren Fall zugelassenen) Interpretationen von $\mathcal{S}$, so erweist sich das elementare Folgern $Fl_{\mathcal{S}} = Fl^{\sigma_0}_{\mathcal{S}}$ als Spezialfall des nichtelementaren Folgerns. Ferner ist leicht zu beweisen, daß für Interpretationsklassen σ_1, σ_2 ein und derselben Sprache $\mathcal{S}$ mit $\sigma_1 \subseteq \sigma_2$ für beliebige $X \subseteq \mathcal{S}$ stets $Fl^{\sigma_2}_{\mathcal{S}}(X) \subseteq Fl^{\sigma_1}_{\mathcal{S}}(X)$ gilt, daß mithin eine Verkleinerung der Klasse der zulässigen Interpretationen („Verschärfung" der Interpretationsvorschrift) im gleichen Sinne wie eine Vergrößerung des Axiomensystems ein Anwachsen der Folgerungsmenge bewirkt. Insbesondere heißt eine nichtelementare Sprache $(\mathcal{S}, \sigma_1)$ *unwesentlich nichtelementar* bezüglich einer Sprache $(\mathscr{S}, \sigma_2)$, wenn ein Axiomensystem $Y \subseteq \mathscr{S}$ existiert, so daß $Fl^{\sigma_1}_{\mathscr{S}}(X) = Fl^{\sigma_2}_{\mathscr{S}}(X \cup Y)$ für alle $X \subseteq \mathscr{S}$ gilt. Ist dabei insbesondere $\sigma_2 = \sigma_0$, so nennen wir die Sprache $(\mathscr{S}, \sigma_1)$ schlechthin unwesentlich nichtelementar. Das nichtelementare σ_1-Folgern kann in diesem Fall durch elementares Folgern aus einem verstärkten Axiomensystem ersetzt werden. Das ist insbesondere dann der Fall, wenn die Klasse σ_1 genau die Klasse aller Modelle eines gewissen Axiomensystems $Y \subseteq \mathscr{S}$ ist (d. h. in der Terminologie von Tarski: wenn σ_1 eine *elementar charakterisierbare Klasse* ist, vgl. [7]). In diesem Sinne ist z. B. eine mit der Interpretationsvorschrift, ein gewisses n-stelliges Operationssymbol F_0 nur durch volle Operationen zu interpretieren, versehene nichtelementare Sprache unwesentlich nichtelementar, da die Klasse der zulässigen Interpretationen die Klasse aller Modelle des Axioms $\bigwedge x_1 \cdots x_n \bigvee x_0 F_0(x_1, \ldots, x_n) = x_0$ ist.

Ein σ-Modell eines Axiomensystems $X \subseteq \mathscr{S}$ ist ein Modell ω im vorher definierten Sinn, das der Bedingung $\omega \in \sigma$ genügt. Ein Axiomensystem $K \subseteq \mathscr{S}$ heißt *σ-kategorisch*, wenn X ein σ-Modell besitzt und je zwei σ-Modelle zueinander isomorph sind. (Falls „das" σ-Modell von X unendlich ist, müssen dann also nach dem Satz von Tarski weitere hierzu nicht isomorphe Modelle existieren, die jedoch keine σ-Modelle sind.) Wohlbekannte Beispiele zeigen, daß bei Benutzung geeigneter nichtelementarer Sprachen $(\mathscr{S}, \sigma)$ sehr wohl die Charakterisierung unendlicher Strukturen durch kategorische Axiomensysteme möglich ist. Insbesondere machen wir im folgenden ohne Beweis Gebrauch von der Möglichkeit, den geordneten Körper der reellen Zahlen in einer zusätzlich mit Variablen für Mengen von reellen Zahlen und der $\in$-Relation versehenen nichtelementaren Sprache durch ein kategorisches Axiomensystem zu charakterisieren. Eine dafür geeignete Sprache $\mathscr{S}_r$ enthält Variablen x_i für reelle Zahlen, Variablen M_j für Mengen von reellen Zahlen, Symbole $+$ und $\cdot$ zur Verknüpfung von Zahltermen und prädikative Ausdrücke der Formen $t_1 \leqq t_2$ (t_1, t_2 Zahlterme) und $t_i \in M_j$ (t_i Zahlterm). Die von M_j und $\in$ verschiedenen Bestandteile genügen zur Formulierung eines Axiomensystems für geordnete Körper, und das Stetigkeitsaxiom kann man etwa wie folgt formulieren:

$$\begin{aligned} &\bigwedge M_1\big(\bigvee x_1\, x_1 \in M_1 \wedge \bigvee x_2 \bigwedge x_1(x_1 \in M_1 \to x_1 \leqq x_2) \\ &\quad \to \bigvee x_0\big(\bigwedge x_1(x_1 \in M_1 \to x_1 \leqq x_0) \wedge \bigwedge x_2\big(\bigwedge x_1(x_1 \in M_1 \to x_1 \leqq x_2) \\ &\quad \to x_0 \leqq x_2\big)\big)\big). \end{aligned} \tag{1}$$

Es sei σ_r die Klasse aller Interpretationen von $\mathscr{S}_r$, bei denen nach Wahl eines beliebigen Grundbereichs für die Variablen x_i die Variablen M_j als beliebige Teilmengen dieses Grundbereichs und das Symbol $\in$ als Elementrelation interpretiert werden. In der nichtelementaren Sprache $(\mathscr{S}_r, \sigma_r)$ ist das aus den Axiomen eines geordneten Körpers und dem Stetigkeitsaxiom (1) bestehende Axiomensystem X_r σ_r-kategorisch.

3. Definitorische Spracherweiterungen

Sind $(\mathscr{S}_1, \sigma_1)$ und $(\mathscr{S}_2, \sigma_2)$ nichtelementare (eventuell also elementare!) Sprachen, so heißt $(\mathscr{S}_2, \sigma_2)$ eine *Erweiterung* von $(\mathscr{S}_1, \sigma_1)$, wenn gilt:

(a) $\mathscr{S}_1 \subseteq \mathscr{S}_2$;

(b) *die Einschränkung ω_1 einer beliebigen Interpretation $\omega_2 \in \sigma_2$ auf die Grundbestandteile von $\mathscr{S}_1$ ist ein Element von σ_1.*

Dabei heißt $(\mathscr{S}_2, \sigma_2)$ *Erweiterung erster Art*, falls $\mathscr{S}_2$ die gleichen Variablensorten enthält wie $\mathscr{S}_1$, also nur zusätzliche Relations-, Operations- oder Individuensymbole bezüglich der gleichen Sorten von Grunddingen. Andernfalls, d. h. falls $\mathscr{S}_2$ mindestens eine zusätzliche Variablensorte enthält, heißt $(\mathscr{S}_2, \sigma_2)$ eine *Erweiterung zweiter Art* von $(\mathscr{S}_1, \sigma_1)$. Sind $(\mathscr{S}_1, \sigma_1)$ und $(\mathscr{S}_2, \sigma_2)$ elementare Sprachen, so entfällt die Bedingung (b), da sie dann automatisch erfüllt ist. Als Beispiel zum Begriff der Erweiterungssprache sei erwähnt, daß die Sprache $(\mathscr{S}_r, \sigma_r)$ eine Erweiterung zweiter Art der elementaren Teilsprache $(\mathscr{S}_0, \sigma_0)$ zur Beschreibung beliebiger geordneter Körper ist, die nur aus den Bestandteilen x_i, $+$, $\cdot$, $\leqq$ aufgebaut ist.
Alle bisher in der mathematischen Praxis benutzten Definitionsformen ordnen sich der folgenden Definition des Begriffs *definitorische Spracherweiterung* unter:
Eine Erweiterung $(\mathscr{S}_2, \sigma_2)$ einer Sprache $(\mathscr{S}_1, \sigma_1)$ heißt *definitorisch*, wenn gilt:

(a) *Jede Interpretation $\omega_1 \in \sigma_1$ von $\mathscr{S}_1$ läßt sich zu einer Interpretation $\omega_2 \in \sigma_2$ von $\mathscr{S}_2$ fortsetzen, und zwar bis auf Isomorphie auf nur eine Weise*, d. h., sind $\omega', \omega'' \in \sigma_2$ Fortsetzungen von $\omega \in \sigma_1$, so existiert ein Isomorphismus von ω' auf ω'', der die den Grundbestandteilen von $\mathscr{S}_1$ zugeordneten Objekte invariant läßt.

(b) *Zu jedem Ausdruck $H \in \mathscr{S}_2$, in dem höchstens Variablen aus $\mathscr{S}_1$ frei vorkommen, existiert ein Ausdruck $[H] \in \mathscr{S}_1$, der die gleichen freien Variablen enthält, so daß bei jeder Interpretation die Ausdrücke H und $[H]$ die gleiche Relation darstellen* (gleichbedeutend: $H \leftrightarrow [H] \in Fl^{\sigma_2}_{\mathscr{S}_2}(\emptyset)$).

Während (a) zum Ausdruck bringt, daß bei einer beliebigen Interpretation der Grundsprache die Bedeutung definitorisch eingeführter Sprachbestandteile im wesentlichen (d. h. bis auf Isomorphie) eindeutig mitfixiert ist, enthält (b) den Aspekt der prinzipiellen Entbehrlichkeit der Definitionen, d. h. die Tatsache, daß Ausdrücke, die unter Verwendung definitorisch eingeführter Sprachbestandteile formuliert sind, in gleichbedeutende Ausdrücke der Grundsprache zurückübersetzt werden können. Dies betrifft jedoch (im Fall definitorischer Erweiterungen zweiter Art) nur solche Ausdrücke, in denen keine definitorisch eingeführten Variablen frei vorkommen. Es ist klar, daß man eine Relation zwischen Dingen neuer Sorte nicht ohne Variablen für die Dinge dieser Sorte ausdrücken kann. Aus (b) folgt weiter, daß eine definitorische Erweiterung $(\mathscr{S}_2, \sigma_2)$ in bezug auf ihre Grundsprache $(\mathscr{S}_1, \sigma_1)$ stets unwesentlich nichtelementar ist: Die die definitorisch eingeführten Sprachbestandteile charakterisierende Interpretationsvorschrift, die σ_1 zu σ_2 verschärft, kann gleichwertig durch das Axiomensystem

$$\{H \leftrightarrow [H] : H \in \mathscr{S}_2, \textit{ und alle in } H \textit{ frei vorkommenden Variablen sind aus } \mathscr{S}_1\}$$

ersetzt werden. In allen bisher untersuchten Fällen ist dieses Axiomensystem unnötig umfangreich. Zur Charakterisierung endlich vieler definitorisch eingeführter Sprachbestandteile genügen anscheinend immer endlich viele „Einführungsaxiome". In [3, 4, 5] wird an zahlreichen Beispielen die Einordnung gebräuchlicher Definitionsmethoden in das hier zugrunde gelegte allgemeine Konzept behandelt, darunter auch solcher (insbesondere zweiter Art), die zwar in der Mathematik benutzt, jedoch von der Metamathematik bisher nicht untersucht bzw. gerechtfertigt wurden. Als Folgerung aus der allgemeinen Definition der definitorischen Spracherweiterung nennen wir:

Ist $(\mathscr{S}_2, \sigma_2)$ eine definitorische Erweiterung von $(\mathscr{S}_1, \sigma_1)$ und $X \subseteq \mathscr{S}_1$ ein σ_1-kategorisches Axiomensystem, so ist X $(\subseteq \mathscr{S}_2)$ auch σ_2-kategorisch.

Dieser Satz bedeutet z. B. angewendet auf die Axiomatisierung der ebenen euklidischen Geometrie: Man betrachte die euklidische Ebene zunächst im Sinne HILBERTS als eine Struktur der Form $(P, G; Inz, Zwi, Kong)$ mit einer Grundmenge P von „Punkten", einer Grundmenge G von „Geraden", einer Inzidenzrealtion $Inz \subseteq P \times G$, einer Zwischenrelation $Zwi \subseteq P^3$ und einer Kongruenzrelation $Kong \subseteq P^4$, und man hat in einer geeigneten (notwendig nichtelementaren) Sprache $(\mathscr{S}_e, \sigma_e)$ ein kategorisches Axiomensystem formuliert, dessen bis auf Isomorphie einziges Modell „die" reelle euklidische Ebene ist. Führt man nun nachträglich definitorisch Winkel, Kreise, Strecken, Strahlen und weitere Sorten von Dingen sowie eine Vielzahl von Relationen und Operationen im Bereich der ursprünglichen und der neu eingeführten Dinge ein (z. B. Punkt—Kreis-Inzidenz, Kongruenz von Winkeln, Parallelität von Geraden, die Operationen des Verbindens von Punkten, Schneidens von Geraden, Schlagens von Kreisen, Fällens von Loten, Ziehens von Parallelen usw.), so sind die Interpretationen der so erweiterten Sprache $(\mathscr{S}_E, \sigma_E)$ Strukturen der Form

$$(P, G, M_3, M_4, \ldots; Inz, Zwi, Kong, R_4, R_5, \ldots; F_1, F_2, F_3, \ldots),$$

und es wäre denkbar, daß es unter allen Strukturen dieser Form, welche σ_E-Interpretationen von $\mathscr{S}_E$ sind, ein zum „Standardmodell" nicht isomorphes Modell des Axiomensystems X gibt. Unser Satz sagt aus, daß dies nicht möglich ist, wenn man sich auf Definitionen beschränkt, die den hier aufgestellten Grundbedingungen (a) und (b) genügen.

Im folgenden wird auch die ziemlich triviale Umkehrung des obigen Satzes benötigt:

Ist $(\mathscr{S}_2, \sigma_2)$ eine definitorische Erweiterung von $(\mathscr{S}_1, \sigma_1)$ und $X \subseteq \mathscr{S}_1$ (also erst recht $X \subseteq \mathscr{S}_2$) ein σ_2-kategorisches Axiomensystem, so ist X auch σ_1-kategorisch.

Beweis. Da X ein σ_2-Modell besitzt, ist dessen Einschränkung auf $\mathscr{S}_1$ ein σ_1-Modell von X. Sind ω_1' und ω_2'' beliebige σ_1-Modelle von X, so existieren (bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte) Fortsetzungen $\omega_2', \omega_2'' \in \sigma_2$ von ω_1' bzw. ω_1'' auf $\mathscr{S}_2$. Nach Voraussetzung der σ_2-Kategorizität von X gibt es daher einen Isomorphismus von ω_2' auf ω_2''; dessen Einschränkung auf die Teilsprache $\mathscr{S}_1$ ist ein Isomorphismus von ω_1' auf ω_1''.

4. Koordinatensysteme

Es sei $\mathscr{T} = Fl^c_{\mathscr{S}}(X)$ eine (im allgemeinen nichtelementare) Theorie. Die Sprache $\mathscr{S}$ dieser Theorie (eventuell bereits eine definitorische Erweiterung einer prinzipiell zur Formulierung von $\mathscr{T}$ ausreichenden Grundsprache) enthalte u. a. eine Sorte von Variablen, etwa a_i, und zu den Sätzen von $\mathscr{T}$ mögen solche gehören, die bezüglich gewisser Relationen, Operationen und Individuenkonstanten ein „arithmetisches" Axiomensystem für die mit a_i bezeichneten Dinge bilden. Diese Voraussetzungen sind z. B. erfüllt, wenn man auf Grund der ursprünglich „geometrischen" Axiome einer formalisierten ebenen Geometrie nach entsprechender definitorischer Erweiterung der ursprünglichen Sprache zeigen kann, daß die als Äquivalenzklassen kongruenter Punktepaare eingeführten „abstrakten Längen" a_i bezüglich geometrisch definierter Addition, Multiplikation und Größenvergleichs die Grundeigenschaften der nichtnegativen Elemente eines geordneten Körpers erfüllen.

Weiterhin möge für jede Sorte j von ursprünglichen (d. h. nicht definitorisch eingeführten) Dingen eine Schar von n_j Operationen F_j^i $(1 \leqq i \leqq n_j)$ zur Sprache $\mathscr{S}$ gehören, die — eventuell in Abhängigkeit von gewissen Parametern $p_1, \ldots, p_k$ beliebiger Sorte — insgesamt jedem Ding x der Sorte j ein n_j-Tupel

$$\left(F_j^1(p_1, \ldots, p_k, x), \ldots, F_j^{n_j}(p_1, \ldots, p_k, x)\right)$$

von Dingen der Sorte a_i als Koordinaten zuordnen, und zu den Sätzen von $\mathcal{T}$ gehöre die Aussage, daß diese Gesamtabbildung eine eineindeutige Abbildung von dem Grundbereich der Sorte j auf eine in der Sprache $\mathcal{S}$ beschreibbare Menge von n_j-Tupeln von Dingen a_i ist, falls die Parameter $p_1, \ldots, p_k$ einer gewissen erfüllbaren Bedingung $H(p_1, \ldots, p_k)$ genügen. Bezeichnen wir zur Abkürzung den Ausdruck

$$\left(F_j^1(p_1, \ldots, p_k, x) = a_1 \wedge \cdots \wedge F_j^{n_j}(p_1, \ldots, p_k, x) = a_{n_j}\right)$$

mit H_j' und ist $\{(a_1, \ldots, a_{n_j})/H_j''(a_1, \ldots, a_{n_j})\}$ die Menge aller n_j-Tupel, die als Koordinaten von Dingen der Sorte j auftreten, so kann man die geforderten Bedingungen wie folgt in der Sprache $\mathcal{S}$ formulieren:

$$\begin{aligned} &\bigvee p_1 \cdots p_k H(p_1, \ldots, p_k) \wedge \bigwedge p_1 \cdots p_k\big(H(p_1, \ldots, p_k) \\ &\to \big(\bigwedge x \bigvee a_1 \cdots a_{n_j}\big(H_j''(a_1, \ldots, a_{n_j}) \wedge H_j'\big) \wedge \bigwedge a_1 \cdots a_{n_j}\big(H_j''(a_1 \cdots a_{n_j}) \\ &\to \bigvee !!x H_j'\big)\big)\big). \end{aligned} \tag{2}$$

Beispiele:

1. *Affine Parallelkoordinaten in der affinen Ebene*

Die Parameter p_1, p_2, p_3 sind hier Punktvariablen, $H(p_1, p_2, p_3)$ ist ein Ausdruck der Bedeutung „p_1, p_2, p_3 *nicht kollinear*", n_j ist gleich 2 für Punkte und gleich 3 für Geraden. H_j'' ist für Punkte ($j = 1$) ein beliebiger identisch wahrer Ausdruck, da jedes Paar (a_1, a_2) von reellen Zahlen als Koordinaten eines Punktes auftritt. Als Koordinaten einer Geraden benutzen wir die Koeffizienten a, b, c einer sie beschreibenden linearen Gleichung $ax + by + c = 0$, wobei zum Zwecke der Eineindeutigkeit entweder $b = 1$ oder $b = 0$ und $a = 1$ sein soll. Diese an das Tripel $(a, b, c) = (a_1, a_2, a_3)$ gestellte Bedingung ist gerade durch den Ausdruck H_2'' ($j = 2$: Sorte Geraden) zum Ausdruck zu bringen. Für einen beliebigen Punkt p ist $F_1^1(p_1, p_2, p_3, p)$ zu definieren als die reelle Maßzahl des Punktes

$$S\left(\mathit{Parallele}\ (p, L(p_1, p_3)), L(p_1, p_2)\right)$$

bezüglich des 0-Punktes p_1 und des 1-Punktes p_2, analog $F_1^2(p_1, p_2, p_3, p)$ durch Vertauschung von p_2 und p_3.

2. *Kartesische Koordinaten in der euklidischen Ebene*

Dieses Beispiel unterscheidet sich von Beispiel 1 nur durch die Abänderung des Ausdrucks $H(p_1, p_2, p_3)$, welcher jetzt aussagt: „$p_1p_2 \cong p_1p_3$ *und* $p_1p_2p_3$ *rechtwinklig bei* p_1 *und* $p_1 \neq p_2$".

3. *Polarkoordinaten in der euklidischen Ebene*

Vorausgesetzt sei, daß Winkelgrößen definitorisch als reelle Zahlen, also ebenfalls durch Variablen a_i zu bezeichnen, eingeführt wurden. Ein Koordinatensystem wird wieder durch drei nicht kollineare Punkte p_1, p_2, p_3 gegeben, wobei p_1 Ursprung, p_2 Einspunkt auf dem Anfangsstrahl sein soll und p_3 diejenige Halbebene mit Winkelkoordinaten unter $\pi/2$ auszeichnet. Es ist nun $H_1''(a_1, a_2)$ ein Ausdruck der Bedeutung „$(a_1 > 0$ *und* $0 \leqq a_2 < \pi)$ *oder* $(a_1 = 0$ *und* $a_2 = 0)$", d. h., wir ordnen, um Eineindeutigkeit zu erzwingen, dem Koordinatenursprung p_1 willkürlich die Winkelkoordinate 0 zu. Als Koordinaten einer Geraden g dienen der Abstand a_1 zwischen g und p_1 und der Winkel a_2 zwischen dem Lot von p_1 auf g und dem Strahl p_1p_2. Daher ist $H_2''(a_1, a_2)$ ein Ausdruck der Bedeutung „$a_1 \geqq 0$ *und* $0 \leqq a_2 < \pi$".

4. *Polarkoordinaten in der hyperbolischen Ebene*
Dieses Beispiel stimmt bis zum gegenwärtigen Punkt der Betrachtung völlig mit Beispiel 3 überein.

Zusammenfassend definieren wir jetzt:
Ein *Koordinatensystem-Typ bezüglich der n-sortigen Theorie* $\mathcal{T}$ ist ein System der Form

$$\left(H(p_1, \ldots, p_k); F_1^1, \ldots, F_1^{n_1}; F_2^1, \ldots, F_2^{n_2}, \ldots, F_n^1, \ldots, F_n^{j_n}; H_1'', \ldots, H_n''\right),$$

bestehend aus in der Sprache $\mathcal{S}$ von $\mathcal{T}$ formulierten Ausdrücken $H(p_1, \ldots, p_k)$, $H_1'', \ldots, H_n''$ und in dieser Sprache definierbaren (bzw. eventuell von vornherein vorhandenen) Operationen $F_1^1, \ldots, F_n^{j_n}$[1]), so daß in $\mathcal{T}$ der Ausdruck (2) allgemeingültig ist für $j = 1, \ldots, n$. Dabei geben die in $H(p_1, \ldots, p_k)$ insgesamt frei vorkommenden Variablen Anzahl und Sorte der Objekte an, durch die in einem Modell von $\mathcal{T}$ jeweils ein konkretes Koordinatensystem des betrachteten Typs definiert wird, vorausgesetzt, daß diese Objekte die Bedingung $H(p_1, \ldots, p_k)$ erfüllen. Wie bereits bemerkt, beschreibt H_j'' $(j = 1, \ldots, n)$ die Menge derjenigen n_j-Tupel, die als Koordinaten von Dingen der Sorte j auftreten, und $F_j^i(p_1, \ldots, p_k, x)$ ist die i-te Koordinate des Dinges x der Sorte j bezüglich des Koordinatensystems $(p_1, \ldots, p_k)$.
Nach Wahl eines bestimmen Koordinatensystem-Typs entspricht jeder in der Sprache $\mathcal{S}$ von $\mathcal{T}$ definierbaren Relation bzw. Operation eine Relation bzw. Operation im Bereich der Koordinaten. Zum Beispiel gilt in der ebenen affinen Geometrie bezüglich des Typs der Parallelkoordinatensysteme

$$\bigwedge p_1p_2p_3\left(p_1p_2p_3 \text{ nicht kollinear} \rightarrow \bigwedge pg(p \in g \leftrightarrow \underbrace{ax + by + c = 0}_{H_\in(x,\, y,\, a,\, b,\, c)})\right)$$

und

$$\bigwedge p_1p_2p_3\Big(p_1, p_2, p_3 \text{ nicht kollinear} \rightarrow \bigwedge pg_1g_2\Big(S(g_1, g_2) = p \leftrightarrow$$
$$x = \underbrace{\frac{c_2b_1 - c_1b_2}{a_1b_2 - a_2b_1}}_{F_S^1(a_1,\, b_1,\, c_1,\, a_2,\, b_2,\, c_2)} \wedge y = \underbrace{\frac{c_1a_2 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}}_{F_S^2(a_1,\, b_1,\, c_1,\, a_2,\, b_2,\, c_2)}\Big)\Big),$$

wobei zwecks besserer Lesbarkeit abkürzend gesetzt wurde:

x für $F_1^1(p_1, p_2, p_3, p)$ (in Worten: die x-Koordinate von p bezüglich des Koordinatensystems (p_1, p_2, p_3)),

y für $F_1^2(p_1, p_2, p_3, p)$,

a für $F_2^1(p_1, p_2, p_3, g)$, b für $F_2^2(p_1, p_2, p_3, g)$, c für $F_2^3(p_1, p_2, p_3, p)$,

a_1 für $F_2^1(p_1, p_2, p_3, g_1)$ usw.

Analytische Geometrie bezüglich eines bestimmten Koordinatensystem-Typs in einer bestimmten geometrischen Theorie ist demnach nichts anderes als die Ermittlung derjenigen Relationen bzw. Operationen im Bereich der Koordinaten, die zu gegebenen Relationen bzw. Operationen in der analogen Beziehung stehen wie in unserem Beispiel der Ausdruck $H_\in$ zur Inzidenzrelation $\in$ und die Operationen F_S^1, F_S^2 zur

[1]) Es genügt hier, Namen für die Koordinatenfunktionen F_j^i anzugeben, da deren Eigenschaften, insbesondere die Art und Weise ihrer Verknüpfung mit den das Koordinatensystem definierenden Parametern $p_1, \ldots, p_k$ in den Sätzen der betrachteten Theorie festgelegt sind.

Operation S des Schneidens von Geraden. Insbesondere kann man mit gutem Recht als *Grundaufgaben* einer beliebigen analytischen Geometrie die Ermittlung derjenigen Relationen bzw. Operationen im Bereich der Koordinaten ansehen, die den Grundbegriffen der Sprache entsprechen, in der die betrachtete Theorie formuliert ist.[1]) Man kann zeigen, daß die Lösung einer beliebigen Aufgabe einer analytischen Geometrie routinemäßig auf die Lösung der Grundaufgaben zurückgeführt werden kann. Die besondere Handlichkeit der auf kartesische Koordinatensysteme bezogenen analytischen euklidischen Geometrie hat in der Vergangenheit den Gedanken an die Verwendung anderer Koordinatensysteme kaum aufkommen lassen. Neben anderen Problemen (vgl. etwa [4, Kap. 9.3]) erfordert jedoch die Zielstellung der vorliegenden Arbeit eine Besinnung auf das Wesen der analytischen Methode.

5. Arithmetische Modelle und Kategorizität

Wir setzen nun zusätzlich voraus, daß die in Abschnitt 4 betrachteten (meist definitorisch eingeführten) „arithmetischen" Objekte a_i auf Grund gewisser in der Theorie $\mathcal{T} = Fl^{\sigma}_{\mathcal{S}}(X)$ über sie geltender Sätze bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt sind (z. B. als *die* rationalen oder *die* reellen oder *die* nichtnegativen reellen Zahlen). Anders formuliert bedeutet dies, daß für eine gewisse definitorische Erweiterung $(\mathcal{S}_2, \sigma_2)$ von $(\mathcal{S}, \sigma)$ ein gewisses (nur auf die Variablensorte a_i bezogenes) kategorisches Axiomensystem Y in $Fl^{\sigma_2}_{\mathcal{S}_2}(X)$ enthalten ist. Es sei $\mathcal{S}_1$ die zur Formulierung von Y benötigte Teilsprache von $\mathcal{S}_2$, σ_1 die Klasse aller Einschränkungen von Elementen von σ_2 auf $\mathcal{S}_1$. Dann ist $(\mathcal{S}_2, \sigma_2)$ eine (nicht notwendig definitorische) Erweiterung von $(\mathcal{S}_1, \sigma_1)$. Unsere Voraussetzung läßt sich dann dahin präzisieren, daß $Y \subseteq \mathcal{S}_1$ σ_1-kategorisch sein soll.
Es sei $\mathfrak{A}$ das bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte σ_1-Modell von Y, d. h. eine einsortige Struktur mit dem Grundbereich A. Wir konstruieren hieraus ein „arithmetisches" Modell für X: Für $j = 1, \ldots, n$ definieren wir den Grundbereich M_j der Dinge j-ter Sorte als die Menge aller n_j-Tupel von Elementen von A, die die durch H''_j dargestellte Relation erfüllen. Aus (2) folgt dann sofort: In einem beliebigen σ-Modell $\mathfrak{M}$ von X ist in bezug auf ein beliebiges Koordinatensystem des betrachteten Typs die Abbildung φ, die jedem Objekt von $\mathfrak{M}$ (j-ter Sorte) das n_j-Tupel seiner Koordinaten aus M_j zuordnet, eine eineindeutige Abbildung des entsprechenden Grundbereichs von $\mathfrak{M}$ auf M_j. Man bilde nun aus den (als Grundaufgabe der analytischen Geometrie ermittelten) Relationen und Operationen im Bereich der Mengen M_j eine Struktur $\mathfrak{M}_a$. Daß dann φ ein Isomorphismus von $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{M}_a$ ist, kann man geradezu als äquivalente bzw. elegante Formulierung der Grundaufgabe betrachten.
$\mathfrak{M}_a$ heißt das *arithmetische Modell von X* (bzw. *von $\mathcal{T}$*) *bezüglich des betrachteten Koordinatensystem-Typs*. Die Beispiele 2 und 3 lassen ahnen, daß die arithmetischen Modelle ein und derselben Theorie bezüglich verschiedener Koordinatensytem-Typen recht verschieden aussehen können, so daß es niemals gerechtfertigt ist, von „dem" arithmetischen Modell einer geometrischen Theorie schlechthin zu sprechen. Da wir bei der Definition des Begriffs der nichtelementaren Sprache nicht gefordert haben, daß die Klasse σ der zulässigen Interpretationen mit einer beliebigen Inter-

[1]) Eine praktikable Lösung der Grundaufgaben einer so allgemein aufgefaßten analytischen Geometrie im Rahmen der formalisierten Sprache erfordert unter Umständen komplizierte definitorische Erweiterungen des „arithmetischen Anteils" dieser Sprache, z. B. die Einführung von Bezeichnungen für trigonometrische Funktionen, vgl. [6].

pretation auch alle dazu isomorphen enthalten soll[1]), kann der kuriose Fall eintreten, daß ein arithmetisches Modell nicht zulässig ist. Das bedeutet insbesondere, daß die Konstruktion des arithmetischen Modells in diesem Fall keinen Beweis der σ-Widerspruchsfreiheit der betrachteten geometrischen Theorie liefert. Wegen der Transitivität der Isomorphie erhalten wir jedoch auf dem Umweg über ein arithmetisches Modell trotzdem die Isomorphie zweier beliebiger zulässiger Modelle, d. h. die σ-Kategorizität unter der Voraussetzung der σ-Widerspruchsfreiheit.

Insgesamt ergibt sich folgender Weg für einen Kategorizitätsbeweis unter Benutzung der Koordinatenmethode:

1. Wahl der Grundsprache $(\mathscr{S}, \sigma)$ und eines Axiomensystems $X \subset \mathscr{S}$.
2. Definitorische Einführung der als Koordinaten dienenden arithmetischen Objekte und der sie charakterisierenden Relationen und Operationen.
3. Herleitung eines kategorischen Systems von Sätzen über den Koordinatenbereich aus dem Axiomensystem X unter Verwendung der Definitionen.
4. Definition eines Koordinatensystem-Typs und der Abbildungen, die jedem Grundding ein Koordinaten-Tupel zuordnen. Nachweis der Existenz eines Koordinatensystems des betrachteten Typs.
5. Beweis der Eineindeutigkeit der Koordinatenabbildungen und Bestimmung ihres Wertebereichs.
6. Lösung der Grundaufgaben der analytischen Geometrie bezüglich des gewählten Koordinatensystem-Typs und der gewählten Grundsprache $(\mathscr{S}, \sigma)$.

Auf Grund der vorangehenden „ein-für-alle-Mal"-Betrachtungen kann man den Beweis der σ-Kategorizität eines Axiomensystems X nach Durchführung der genannten sechs Schritte als abgeschlossen betrachten. Will man diesen Weg durch geschickte Wahl der Grundsprache und des Axiomensystems möglichst vereinfachen, so bieten sich folgende Möglichkeiten an, die teilweise auch unabhängig voneinander genutzt werden können. Der so unter Umständen recht gewaltsame Kategorizitätsbeweis bleibt auf Grund der in Abschnitt 3 genannten Sätze über die Fortpflanzung der Kategorizität bei definitorischen Spracherweiterungen für die in üblicher Weise aufgebaute Theorie erhalten.

a) Man nehme Variablen für die als Koordinaten dienenden Objekte (in der Regel reelle Zahlen) in die Grundsprache auf. Während die grundlegenden Eigenschaften dieser Objekte beim üblichen Weg aus ihrer definitorischen Einführung gefolgert werden, sind sie jetzt als Teil des zugrunde gelegten Axiomensystems X zu formulieren, wobei man aber meist bereits als kategorisch bekannte Axiomensysteme für diese arithmetischen Objekte einfach abschreiben kann. Durch diesen Kunstgriff entfallen die meist mühsamen Schritte 2. und 3.

b) Man nehme die Koordinatenabbildungen F^i_j oder geeignete Bausteinoperationen dafür[2]) unter die Grundbegriffe von $\mathscr{S}$ auf und verkürze durch geeignete Axiome

[1]) Für eine beliebige nichtleere Klasse σ von Interpretationen einer Sprache $\mathscr{S}$ sei σ' die Klasse aller Interpretationen, die zu einem Element von σ isomorph sind. Dann ist $Fl^{\sigma}_{\mathscr{S}} = Fl^{\sigma'}_{\mathscr{S}}$, so daß man sich vom Standpunkt der Logik bei der Definition des Begriffs nichtelementare Sprache auf Klassen der Form σ' beschränken könnte. Es kann jedoch aus außerlogischen bzw. außermathematischen Gründen wünschenswert sein, gewisse Interpretationen auszuschließen, z. B. weil die zu ihrer „Konstruktion" verwendeten Methoden nicht akzeptiert werden.

[2]) Als geeigneter Baustein für affine Parallelkoordinaten kann z. B. eine Funktion $m(p_0, p_1, p_2)$ dienen, die für $p_0 \neq p_1$ jedem Punkt p_2 der Geraden $L(p_0, p_1)$ in bekannter Weise seine reelle Maßzahl bezüglich des 0-Punktes p_0 und des 1-Punktes p_1 zuordnet. Davon ausgehend können die eigentlichen Koordinatenabbildungen wie in Beispiel 1 definiert werden.

so weit wie möglich den Nachweis der Existenz und Eineindeutigkeit der Koordinaten für alle Sorten von Grunddingen. Dadurch entfällt bzw. vereinfacht sich 4. und 5.

c) Man trachte danach, mit möglichst wenigen Sorten von Grunddingen auszukommen. Dadurch vereinfacht sich 4. und 5. Es sei bemerkt, daß Hinweis a) hierzu nicht im Widerspruch steht, da ein inhaltlich bereits vorliegender Koordinatensystem-Typ auf die als Koordinaten dienenden Objekte in trivialer Weise ausgedehnt werden kann, indem man jedes dieser Objekte sich selbst als Koordinate zuordnet.

d) Man trachte danach, mit möglichst wenigen Grundrelationen und -operationen auszukommen. Dadurch vereinfacht sich 6.

Ist es insbesondere möglich bzw. sachgemäß, eine gewisse geometrische Struktur als einen speziellen metrischen Raum zu charakterisieren,[1]) d. h., erhält man eine prinzipiell für die betrachtete Theorie hinreichend ausdrucksfähige Sprache, indem man die bereits beschriebene Sprache $(\mathscr{S}_r, \sigma_r)$ für die reellen Zahlen lediglich durch Punktvariablen p_i und ein Operationssymbol l für die Abstandsfunktion ergänzt, so reduziert sich nach Einführung eines geeigneten Koordinatensystem-Typs Schritt 6. auf die Herleitung einer Formel, die den Abstand $l(p_1, p_2)$ zweier Punkte p_1, p_2 in den Koordinaten dieser Punkte ausdrückt. Dieses Programm wird in [6] für die sphärische Geometrie ausgeführt.

LITERATUR

[1] ASSER, G.: Einführung in die mathematische Logik II. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1972.

[2] RASIOWA, H., and R. SIKORSKI: The Mathematics of Metamathematics, PWN, Warszawa 1963.

[3] SCHREIBER, P.: Definitorische Erweiterungen formalisierter Geometrien. Grundlagen der Geometrie und algebraische Methoden. Vorträge auf dem Internationalen Kolloquium in Potsdam 1973.

[4] SCHREIBER, P.: Theorie der geometrischen Konstruktionen. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1975.

[5] SCHREIBER, P.: Grundlagen der Mathematik. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1977.

[6] SCHREIBER, P.: Axiomatischer Aufbau der sphärischen Geometrie. Beiträge zur Algebra und Geometrie *9* (1979).

[7] TARSKI, A.: Some notions and methods on the borderline of algebra and metamathematics. Proc. Internat. Congr. Math. 1950, Vol. I, pp. 705—720.

Manuskripteingang: 20. 9. 1976

VERFASSER:

PETER SCHREIBER, Sektion Mathematik der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald

[1]) Dies trifft insbesondere für solche geometrischen Strukturen wie die hyperbolische Ebene oder die Kugeloberfläche zu, in denen eine ausgezeichneten Längeneinheit existiert.