Werk

Titel: Über zyklische Erweiterungen abelscher Gruppen

Autor: LANGEMANN, I.

Jahr: 1978

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?301416052_0007|log11

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Beiträge zur Algebra und Geometrie
7 (1978), 59–67

Über zyklische Erweiterungen abelscher Gruppen

IRMTRAUD LANGEMANN

In der vorliegenden Arbeit werden endliche Gruppen $\mathfrak{G}$ betrachtet, die zyklische Erweiterungen abelscher Gruppen sind und eine treue irreduzible Darstellung besitzen. Unter Darstellungen sollen stets Matrixdarstellungen über dem Körper der komplexen Zahlen verstanden werden. Eine Gruppe von dieser Beschaffenheit kann als gewisse Verallgemeinerung zyklischer Gruppen angesehen werden. So hat z. B. jede solche Gruppe ein zyklisches Zentrum, und jede abelsche Gruppe, die eine treue irreduzible Darstellung besitzt, ist zyklisch. Ebenso lassen sich bei den hier betrachteten Gruppen $\mathfrak{G}$ aus der Tatsache der Existenz einer treuen irreduziblen Darstellung Strukturaussagen gewinnen. Grundlage der Untersuchungen sind die Sätze von CLIFFORD über den Zerfall der Beschränkung einer irreduziblen Darstellung einer Gruppe auf einen Normalteiler dieser Gruppe.

1. Darstellungen zyklischer Erweiterungen abelscher Gruppen

Es sei $\mathfrak{G}$ eine Gruppe mit abelschem Normalteiler $\mathfrak{B}$ und zyklischer Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{B} = \langle a\mathfrak{B}\rangle$. $\mathfrak{G}$ heißt dann *zyklische Erweiterung* von $\mathfrak{B}$. Nach dem ersten Satz von CLIFFORD (siehe z. B. [1]) zerfällt die Beschränkung einer irreduziblen Darstellung von $\mathfrak{G}$ auf den Normalteiler $\mathfrak{B}$ nach geeigneter Transformation vollständig in irreduzible Bestandteile. Wir werden zeigen, daß diese irreduziblen Bestandteile für zyklische Erweiterungen abelscher Gruppen alle verschieden sind. Daran anschließend können wir angeben, wie man alle irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{G}$ erhält.

Satz 1. *Für jede irreduzible Darstellung $s \to A(s)$ $(s \in \mathfrak{G})$ von $\mathfrak{G}$ zerfällt deren Beschränkung $s \to A_{\mathfrak{B}}(s)$ $(s \in \mathfrak{B})$ auf $\mathfrak{B}$ stets in lauter verschiedene irreduzible Darstellungen von $\mathfrak{B}$.*

Beweis. Wir beweisen den Satz durch vollständige Induktion nach dem Grad n der irreduziblen Darstellung $s \to A(s)$ $(s \in \mathfrak{G})$. Für $n = 1$ ist die Aussage des Satzes klar. Es sei $n > 1$. Nach dem ersten Satz von CLIFFORD [1] zerfällt $s \to A_{\mathfrak{B}}(s)$ $(s \in \mathfrak{B})$ nach geeigneter Transformation von $A(s)$ (die wir uns bereits durchgeführt denken) in lauter Bestandteile ersten Grades, unter denen eine gewisse Anzahl k verschiedener vorkommen. Jeder Bestandteil kommt gleich oft, etwa l-mal vor (siehe Satz 2 von

Clifford [1]). Es ist also $n = k \cdot l$, und wir können

$$s \to A_{\mathfrak{B}}(s) = l\alpha_1(s) \dotplus \cdots \dotplus l\alpha_k(s) \quad (s \in \mathfrak{B})$$

schreiben. Wäre $k = 1$, so würde $A(\mathfrak{B})$ im Zentrum von $A(\mathfrak{G})$ liegen. Da $A(\mathfrak{B})$ unter $A(\mathfrak{G})$ eine zyklische Faktorgruppe besitzt, müßte $A(\mathfrak{G})$ abelsch sein, mithin den Grad 1 haben, was nicht sein sollte. Da also $k > 1$ ist, folgt $l < n$.
Die Gruppe $\mathfrak{G}_1$ aller Elemente von $\mathfrak{G}$, deren Darstellungsmatrizen $A(s)$ die Gestalt

$$A(s) = B(s) \dotplus B^*(s) \quad (s \in \mathfrak{G})$$

besitzen, wobei $B(s)$ eine quadratische Matrix vom Grad l ist, hat $s \to \mathfrak{B}(s)$ $(s \in \mathfrak{G}_1)$ als irreduzible Darstellung (siehe Satz 2 von Clifford [1]). $\mathfrak{G}_1$ umfaßt $\mathfrak{B}$ als Normalteiler. $\mathfrak{G}_1/\mathfrak{B}$ ist zyklisch. Wir wenden auf $\mathfrak{G}_1$ und die Darstellung $s \to B(s)$ $(s \in \mathfrak{G}_1)$ die Induktionsvoraussetzung an. Danach zerfällt die Darstellung $s \to B_{\mathfrak{B}}(s)$ $(s \in \mathfrak{B})$ in lauter inäquivalente irreduzible Darstellungen von $\mathfrak{B}$. Daher muß $l = 1$ sein.

Satz 2. *Jede irreduzible Darstellung $s \to A(s)$ $(s \in \mathfrak{G})$ von $\mathfrak{G}$ mit dem Kern $\mathfrak{K}$ kann durch eine lineare Darstellung eines geeigneten, $\mathfrak{B}$ umfassenden Normalteilers $\mathfrak{A}$ induziert werden, für den $\mathfrak{A}/\mathfrak{K}$ maximaler abelscher Normalteiler von $\mathfrak{G}/\mathfrak{K}$ ist.*

Da $\mathfrak{K}$ der Kern der irreduziblen Darstellung $s \to A(s)$ $(s \in \mathfrak{G})$ von $\mathfrak{G}$ ist, wird die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{K}$ durch $s\mathfrak{K} \to A(s)$ $(s \in \mathfrak{G})$ treu dargestellt. Satz 2 ist daher gleichbedeutend mit dem folgenden

Satz 3. *Jede treue irreduzible Darstellung von $\mathfrak{G}$ wird durch eine lineare Darstellung eines geeigneten, $\mathfrak{B}$ umfassenden maximalen abelschen Normalteilers $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{G}$ induziert.*

Beweis. $s \to A(s)$ $(s \in \mathfrak{G})$ sei treue irreduzible Darstellung von $\mathfrak{G}$. Die Beschränkung $s \to A_{\mathfrak{B}}(s)$ $(s \in \mathfrak{B})$ auf $\mathfrak{B}$ zerfällt gemäß Satz 1 nach geeigneter Transformation in lauter verschiedene Darstellungen vom Grad 1:

$$s \to A_{\mathfrak{B}}(s) = \alpha_1(s) \dotplus \cdots \dotplus \alpha_n(s) \quad (s \in \mathfrak{B}).$$

$\mathfrak{G}_1$ sei diejenige Untergruppe von $\mathfrak{G}$, die bei $s \to A(s)$ $(s \in \mathfrak{G})$ auf Matrizen der Form $b(s) \dotplus B^*(s)$ mit Grad $b(s) = 1$ abgebildet wird. Dann ist $s \to b(s)$ $(s \in \mathfrak{G}_1)$ eine Darstellung von $\mathfrak{G}_1$ vom Grad 1. Nach dem zweiten Satz von Clifford [1] wird $s \to A(s)$ $(s \in \mathfrak{G})$ durch die lineare Darstellung $s \to b(s)$ $(s \in \mathfrak{G}_1)$ von $\mathfrak{G}_1$ induziert, d. h., es ist

$$s \to A(s) = b^{\mathfrak{G}}(s) = \|b(a^i s a^{-j})\| \qquad (s \in \mathfrak{G}),$$

wenn $\mathfrak{G} = a\mathfrak{G}_1 + a^2\mathfrak{G}_1 + \cdots + a^n\mathfrak{G}_1$ die Nebenklassenzerlegung von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{G}_1$ ist und $b(a^i s a^{-j}) = 0$ gesetzt wird, falls $a^i s a^{-j} \notin \mathfrak{G}_1$ ist.
Wir müssen noch zeigen, daß $\mathfrak{G}_1$ maximaler abelscher Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist. Da $\mathfrak{G}_1 \supseteq \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ zyklisch ist, ist $\mathfrak{G}_1$ Normalteiler in $\mathfrak{G}$. Bei der induzierten Darstellung $s \to b^{\mathfrak{G}}(s)$ $(s \in \mathfrak{G})$ von $\mathfrak{G}$ treten als Darstellungsmatrizen für den Normalteiler $\mathfrak{G}_1$ nur Diagonalmatrizen auf. Aus der Treue dieser Darstellung folgt, daß $\mathfrak{G}_1$ abelsch ist. $\mathfrak{G}_1$ ist auch maximaler abelscher Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Es sei $\mathfrak{A}$ ein abelscher Normalteiler von $\mathfrak{G}$, der $\mathfrak{G}_1$ umfaßt. Dann zerfällt die Beschränkung $s \to A_{\mathfrak{A}}(s)$ $(s \in \mathfrak{A})$ auf $\mathfrak{A}$ nach geeigneter Transformation ebenfalls in lauter verschiedene Darstellungen ersten Grades:

$$s \to T^{-1}A_{\mathfrak{A}}(s)\,T = a_1(s) \dotplus \cdots \dotplus a_n(s) \qquad (s \in \mathfrak{A}).$$

$T^{-1}A_{\mathfrak{G}_1}(s)\,T$ $(s \in \mathfrak{G}_1)$ und $T^{-1}A_{\mathfrak{B}}(s)\,T$ $(s \in \mathfrak{B})$ zerfallen wegen $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{G}_1 \subseteq \mathfrak{A}$ auch in dieser Form. $\mathfrak{H}_1$ sei die Untergruppe aller $s \in \mathfrak{G}$ mit $T^{-1}A(s)\,T = c(s) \dotplus C^*(s)$, wobei $c(s)$ den Grad 1 hat. Dann ist $T^{-1}A(s)\,T = c^{\mathfrak{G}}(s)$ $(s \in \mathfrak{G})$, folglich $n = |\mathfrak{G} : \mathfrak{G}_1|$ $= |\mathfrak{G} : \mathfrak{H}_1|$. Dies liefert mit $\mathfrak{G} \supseteq \mathfrak{H}_1 \supseteq \mathfrak{A} \supseteq \mathfrak{G}_1$ die Beziehung $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{A} = \mathfrak{G}_1$.

Dabei ist $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{B}$ eindeutig bestimmt, weil $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ zyklisch ist.

K. Shoda hat allgemeine Kriterien [2] aufgestellt, unter denen eine monomiale Darstellung reduzibel ist. Die monomialen Darstellungen werden durch Darstellungen ersten Grades von Untergruppen induziert, falls sie transitiv sind [2]. Wir benötigen im folgenden diejenigen Spezialfälle dieser Kriterien, bei denen die Untergruppen Normalteiler sind. Diese Spezialfälle wollen wir zunächst formulieren.
Wir betrachten die durch die lineare Darstellung $s \to \zeta(s)$ $(s \in \mathfrak{B})$ von $\mathfrak{B}$ induzierte Darstellung $s \to A(s)$ $(s \in \mathfrak{G})$ von $\mathfrak{G}$, d. h. die Darstellung

$$s \to A(s) = \zeta^{\mathfrak{G}}(s) = \|\zeta(a^i s a^{-j})\| \qquad (s \in \mathfrak{G}),$$

wenn $\mathfrak{G} = a\mathfrak{B} + a^2\mathfrak{B} + \cdots + a^n\mathfrak{B}$ die Nebenklassenzerlegung von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{B}$ und $\zeta(a^i s a^{-j}) = 0$ zu setzen ist, falls $a^i s a^{-j} \notin \mathfrak{B}$ gilt. Die Darstellung $s \to \zeta(s)$ $(s \in \mathfrak{B})$ von $\mathfrak{B}$ habe den Kern $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{B}/\mathfrak{N}$ ist dann zyklisch. Das erzeugende Element von $\mathfrak{B}/\mathfrak{N}$ sei $z\mathfrak{N}$. Dann lautet das Reduzibilitätskriterium von Shoda:

Die durch die lineare Darstellung $s \to \zeta(s)$ $(s \in \mathfrak{B})$ von $\mathfrak{B}$ induzierte Darstellung $s \to \zeta^{\mathfrak{G}}(s)$ $(s \in \mathfrak{G})$ von $\mathfrak{G}$ ist genau dann reduzibel, wenn es ein in $\mathfrak{B}$ nicht enthaltenes Element g von $\mathfrak{G}$ gibt mit folgenden Eigenschaften:

R I $\quad g^{-1}\mathfrak{N}g \subseteq \mathfrak{N}$,

R II $\quad g^{-1}zg \in z\mathfrak{N}$.

Nun sind wir in der Lage, ein Kriterium für die Irreduzibilität einer induzierten Darstellung der hier betrachteten Gruppen $\mathfrak{G}$ anzugeben.

Satz 4. *In der Gruppe $\mathfrak{G}$ sei $\mathfrak{B}$ maximaler abelscher Normalteiler und $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ zyklisch. Dann ist jede durch eine lineare Darstellung $s \to \zeta(s)$ $(s \in \mathfrak{B})$ induzierte Darstellung $s \to A(s)$ $(s \in \mathfrak{G})$ von $\mathfrak{G}$ irreduzibel, sofern sie treu ist.*

Beweis. Wir nehmen an, die induzierte Darstellung $s \to A(s) = \zeta^{\mathfrak{G}}(s)$ $(s \in \mathfrak{G})$ von $\mathfrak{G}$ sei reduzibel, d. h., es existiert mindestens ein Element $g \notin \mathfrak{B}$ mit den Eigenschaften R I und R II. Wir betrachten die Menge $\mathfrak{V}$, die aus allen Elementen von $\mathfrak{G}$ mit den Eigenschaften R I und R II besteht. Diese Elemente bilden eine Gruppe, und es ist $\mathfrak{V} \supset \mathfrak{B}$. $\mathfrak{V}$ ist Normalteiler in $\mathfrak{G}$, weil $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ zyklisch ist. Für die Elemente $h \in \mathfrak{V}$ gilt wegen der Eigenschaft R II $h^{-1}zh \in z\mathfrak{N}$ oder $h^{-1}z^\lambda h \in z^\lambda\mathfrak{N}$. Die gegenseitige Kommutatorgruppe $[\mathfrak{B}, \mathfrak{V}]$ ist in $\mathfrak{N}$ enthalten, denn jedes Element aus $[\mathfrak{B}, \mathfrak{V}]$ hat die Form $z^{-\lambda}h^{-1}z^\lambda hn$ $(n \in \mathfrak{N})$.
Bei der durch $s \to \zeta(s)$ $(s \in \mathfrak{B})$ induzierten Darstellung wird ein Element aus $[\mathfrak{B}, \mathfrak{V}]$ auf die Einheitsmatrix abgebildet, weil $[\mathfrak{B}, \mathfrak{V}]$ in $\mathfrak{N}$ enthalten und Normalteiler in $\mathfrak{G}$ ist, d. h., $[\mathfrak{B}, \mathfrak{V}]$ liegt im Kern der induzierten Darstellung $s \to A(s)$ $(s \in \mathfrak{G})$, der laut Voraussetzung gleich $\mathfrak{E}$ ist. Weil $[\mathfrak{B}, \mathfrak{V}] = \mathfrak{E}$ und $\mathfrak{V}/\mathfrak{B}$ zyklisch ist, ist $\mathfrak{V}$ abelsch. Damit ist $\mathfrak{V}$ ein $\mathfrak{B}$ echt umfassender abelscher Normalteiler von $\mathfrak{G}$ im Widerspruch zur Voraussetzung des Satzes, daß $\mathfrak{B}$ maximaler abelscher Normalteiler sein soll. Also ist die induzierte Darstellung $s \to A(s) = \zeta^{\mathfrak{G}}(s)$ $(s \in \mathfrak{G})$ von $\mathfrak{G}$ irreduzibel.

2. Zyklische Erweiterungen abelscher Gruppen als Untergruppen eines gewissen Kranzprodukts

Aus der Existenz einer treuen irreduziblen Darstellung einer Gruppe kann man gewisse Strukturaussagen über diese Gruppen bekommen. Wir werden zeigen: Wenn eine Gruppe $\mathfrak{G}$, die zyklische Erweiterung einer abelschen Gruppe $\mathfrak{B}$ ist, eine treue irreduzible Darstellung besitzt, dann läßt sie sich als Untergruppe eines gewissen Kranzprodukts von zwei zyklischen Gruppen darstellen.

Zunächst führen wir einige Bezeichnungen ein.

Es seien $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{Z}$ zwei Gruppen, $\mathfrak{C}'$ und $\mathfrak{Z}'$ Untergruppen von $\mathfrak{C}$ bzw. $\mathfrak{Z}$, die im Zentrum von $\mathfrak{C}$ bzw. $\mathfrak{Z}$ enthalten sind. n sei die Ordnung von $\mathfrak{C}/\mathfrak{C}'$ und $\mathfrak{C} = c_1\mathfrak{C}' + \cdots + c_n\mathfrak{C}'$ die Nebenklassenzerlegung von $\mathfrak{C}$ nach $\mathfrak{C}'$. Es existiere ein Isomorphismus σ von $\mathfrak{C}'$ auf $\mathfrak{Z}'$ mit

$$c' \to z' \qquad (c' \in \mathfrak{C}', z' \in \mathfrak{Z}').$$

Mit $\mathfrak{D}$ bezeichnen wir das direkte Produkt von n gleichen Exemplaren $\mathfrak{Z}$, es ist

$$\mathfrak{D} = \prod_{i=1}^{n} \mathfrak{Z}.$$

Jedes Element $d \in \mathfrak{D}$ hat die Form

$$d = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \quad \text{mit} \quad z_i \in \mathfrak{Z}.$$

Wir bilden alle Paare von Elementen aus $\mathfrak{C}$ mit Elementen aus $\mathfrak{D}$; sie haben die Form

$$(c; z_1, \ldots, z_n) \qquad (c \in \mathfrak{C}, z_i \in \mathfrak{Z}).$$

Diese Paare bilden mit der Multiplikationsregel

$$(c; z_1, \ldots, z_n)\,(\bar{c}; \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n)$$
$$= (c\bar{c}; z_{1\pi(\bar{c}^{-1})}\bar{z}_1, \ldots, z_{n\pi(\bar{c}^{-1})}\bar{z}_n) \qquad (\bar{c} \in \mathfrak{C}_1, \bar{z}_i \in \mathfrak{Z})$$

ein Gruppe $\mathfrak{P}^*$, wobei die $k\pi(c)$ $(k = 1, \ldots, n)$ sich ergeben aus der Permutationsdarstellung

$$c \to \pi(c) = \begin{pmatrix} c_1\mathfrak{C}' & \ldots & c_n\mathfrak{C}' \\ c_1\mathfrak{C}'c & \ldots & c_n\mathfrak{C}'c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1\mathfrak{C}' & \ldots & c_n\mathfrak{C}' \\ c_{1\pi(c)}\mathfrak{C}' & \ldots & c_{n\pi(c)}\mathfrak{C}' \end{pmatrix}$$

von $\mathfrak{C}$, die den Kern $\mathfrak{C}'$ hat.

Mit $\mathfrak{M}$ bezeichnen wir alle Elemente aus $\mathfrak{P}^*$ der Form

$$(c'; z'^{-1}, \ldots, z'^{-1})$$

mit $c' \in \mathfrak{C}'$, $z' \in \mathfrak{Z}'$ und $c' \to z'$ beim Isomorphismus σ. $\mathfrak{M}$ ist Normalteiler in $\mathfrak{P}^*$, wie man leicht nachrechnet. Die Faktorgruppe $\mathfrak{P}^*/\mathfrak{M}$ wird als *Kranzprodukt* der Gruppen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{Z}$ mit den durch σ vereinigten Untergruppen $\mathfrak{C}'$ und $\mathfrak{Z}'$ bezeichnet; wir schreiben

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}^*/\mathfrak{M} = \mathfrak{C} \underset{\sigma}{\sim} \mathfrak{Z}$$

$\mathfrak{U}$ sei eine Untergruppe von $\mathfrak{C} \underset{\sigma}{\sim} \mathfrak{Z}$. Wir wollen $\mathfrak{U}$ später durch folgende Eigenschaften charakterisieren:

Eigenschaft 1. Es gibt in $\mathfrak{U}$ mindestens ein Element der Form $(c_i; z_1, \ldots, z_n)\,\mathfrak{M}$ zu jedem Repräsentanten c_i der Zerlegung von $\mathfrak{C}$ nach $\mathfrak{C}'$.

Eigenschaft 2. Für $(e; z_1, \ldots, z_n)\,\mathfrak{M} \in \mathfrak{U}$ sind die (homomorphen) Projektionen $(e; z_1, \ldots, z_n) \to z_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ sämtlich voneinander verschieden.

Satz 7. *Jede Gruppe $\mathfrak{G}$ mit abelschem Normalteiler $\mathfrak{B}$ und zyklischer Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$, die eine treue irreduzible Darstellung besitzt, ist isomorph zu einer Untergruppe mit den Eigenschaften 1 und 2 eines Kranzproduktes aus zwei zyklischen Gruppen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{Z}$ mit vereinigter Untergruppe. Umgekehrt besitzt jede Untergruppe mit den Eigenschaften 1 und 2 eines Kranzprodukts zweier zyklischer Gruppen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{Z}$ mit vereinigter Untergruppe einen abelschen Normalteiler mit zyklischer Faktorgruppe und eine treue irreduzible Darstellung.*

Beweis. $s \to A(s)$ $(s \in \mathfrak{G})$ sei treue irreduzible Darstellung von $\mathfrak{G}$ des Grades n. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $\mathfrak{B}$ maximaler abelscher Normalteiler, und die Darstellung $s \to A(s)$ $(s \in \mathfrak{G})$ wird durch eine lineare Darstellung von $\mathfrak{B}$ induziert (vgl. Satz 3). Die Beschränkung $s \to A_{\mathfrak{B}}(s)$ $(s \in \mathfrak{B})$ zerfällt wegen Satz 1 nach geeigneter Transformation, die wir uns bereits durchgeführt denken, in lauter inäquivalente irreduzible Darstellungen von $\mathfrak{B}$, die das Element $s \in \mathfrak{B}$ auf eine r-te Einheitswurzel abbilden, wobei r der Exponent von $\mathfrak{B}$ ist. Die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{B} = \langle a\mathfrak{B}\rangle$ hat die Ordnung n; es sei $a^n = b$ $(b \in \mathfrak{B})$. Bei $s \to A(s)$ $(s \in \mathfrak{G})$ werde b abgebildet auf die Matrix $B = \beta E$, wobei β primitive l-te Einheitswurzel $(l = \operatorname{ord} b,\ l \mid r)$ ist (B muß Skalarmatrix sein, da b im Zentrum von $\mathfrak{G}$ enthalten ist).
Wir bilden nun ein Kranzprodukt $\mathfrak{P}$ mit vereinigter Untergruppe aus dem ersten Faktor $\mathfrak{C} = \langle a\rangle$ und dem zweiten Faktor $\mathfrak{Z} = \langle\zeta\rangle$, wobei ζ primitive r-te Einheitswurzel ist. Die Untergruppen $\mathfrak{C}' = \langle a^n\rangle$ und $\mathfrak{Z}' = \langle\beta\rangle$ seien durch den Isomorphismus σ von $\mathfrak{C}'$ auf $\mathfrak{Z}'$ vereinigt, der a^n auf β abbildet. $\mathfrak{M}$ ist dann derjenige Normalteiler von $\mathfrak{P}^*$, der aus allen Elementen der Form $(a^{nj}; \beta^{-j}, \ldots, \beta^{-j})$ $(j = 1, \ldots, l)$ besteht. Die Elemente des Kranzprodukts $\mathfrak{P} = \mathfrak{C} \underset{\sigma}{\sim} \mathfrak{Z} = \langle a\rangle \sim \langle\zeta\rangle/\mathfrak{M}$ haben die Form

$$(a^k; \zeta_1, \ldots, \zeta_n)\,\mathfrak{M} \qquad (k \text{ ganz rational, } \zeta_i \in \langle\zeta\rangle).$$

Wir können einen Isomorphismus γ von $\mathfrak{G}$ auf eine Untergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{P}$ herstellen. Dabei wird das Element $a^k b_1$ aus $\mathfrak{G}$ (k ganz rational, $b_1 \in \mathfrak{B}$) auf $(a^k; \zeta_1, \ldots, \zeta_n)\,\mathfrak{M} \in \mathfrak{P}$ abgebildet, wenn b_1 bei der Darstellung $s \to A(s)$ $(s \in \mathfrak{G})$ abgebildet wird auf die Matrix

$$B_1 = \begin{pmatrix} \zeta_1 & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \zeta_n \end{pmatrix}.$$

Diese Abbildung γ ist eindeutig. Es sei $a^k b_1 = a^l b_2$ ($b_1, b_2 \in \mathfrak{B}$; k, l ganz rational), also $b_2 = a^{k-l} b_1 = a^{in} b_1$. Bei γ wird $a^k b_1$ wegen $(a^{-k+l}; \beta^i, \ldots, \beta^i) \in \mathfrak{M}$ abgebildet auf

$$\begin{aligned}(a^k; \zeta_1, \ldots, \zeta_n)\,\mathfrak{M} &= (a^k; \zeta_1, \ldots, \zeta_n)\,(a^{-k+l}; \beta^i, \ldots, \beta^i)\,\mathfrak{M} \\ &= (a^l; \zeta_1\beta^i, \ldots, \zeta_n\beta^i)\,\mathfrak{M},\end{aligned}$$

und $\zeta_j\beta^i = \tau_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ sind die Diagonalelemente der Bildmatrix von $b_2 = a^{in} b_1$ bei der Darstellung $s \to A(s)$ von $\mathfrak{G}$.
Das Produkt der Elemente $a^k b_1$ und $a^l b_2$ aus $\mathfrak{G}$, also $a^k b_1 a^l b_2 = a^{k+l} a^{-l} b_1 a^l b_2$, wird durch γ abgebildet auf $(a^{k+l}; \xi_1\tau_1, \ldots, \xi_n\tau_n)\,\mathfrak{M}$, wobei $a^{-l} b_1 a^l$ durch $s \to A(s)$ abgebildet wird auf die Diagonalmatrix $A(a^{-l})\,B_1 A(a^l)$ mit den Diagonalelementen

ξ_j $(j = 1, \dots, n)$. Da $s \to A(s)$ $(s \in \mathfrak{G})$ durch eine lineare Darstellung $s \to \delta(s)$ $(s \in \mathfrak{B})$ von $\mathfrak{B}$ induziert wird, hat $A(a)$ die Gestalt

$$A(a) = \begin{pmatrix} & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ \delta(a^n) & & & \end{pmatrix}.$$

Daher gilt $\xi_j = \zeta_{j\pi(a^{-1})}$ $(j = 1, \dots, n)$. Das Produkt der Bilder von $a^k b_1$ und $a^l b_2$ bei γ ist

$$(a^k; \zeta_1, \dots, \zeta_n)\,\mathfrak{M}(a^l; \tau_1, \dots, \tau_n)\,\mathfrak{M} = (a^{k+l}; \zeta_{1\pi(a^{-l})}\tau_1, \dots, \zeta_{n\pi(a^{-l})}\tau_n)\,\mathfrak{M}.$$

Somit ist γ homomorph.
Wir zeigen noch, daß der Kern des Homomorphismus γ nur aus dem Einselement besteht. Die Elemente von $\mathfrak{G}$ schreiben wir in der Form $a^k b_1$ mit $0 \leqq k < n$. γ bildet $a^k b_1$ ab auf $(a^k; \zeta_1, \dots, \zeta_n)\,\mathfrak{M}$. Ist dieses Bildelement das Einselement $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{P}$, so folgt $a^k = a^{n\nu}$ und $\zeta_i = \beta^{-\nu}$ mit geeignetem ν. Das ergibt $k \equiv n\nu$ (ord a). Da n ein Teiler der Ordnung von a ist, folgt $n \mid k$, und wegen $0 \leqq k < n$ ist $k = 0$, also $a^k = e$. $(e; \beta^{-\nu}, \dots, \beta^{-\nu})$ ist aber genau dann in $\mathfrak{M}$ enthalten, wenn $\beta^{-\nu} = 1$ ist. Das bedeutet, b_1 wird bei der Darstellung $s \to A(s)$ $(s \in \mathfrak{G})$ auf die Einheitsmatrix abgebildet; es ist $b_1 = e$ wegen der Treue der Darstellung. Aus $(a^k; \zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathfrak{M}$ folgt also $a^k b_1 = e$.
Die Untergruppe $\mathfrak{U}$ hat die Eigenschaft 1, wie man sofort aus der Erklärung des Isomorphismus γ sieht. $\mathfrak{U}$ hat ebenfalls die Eigenschaft 2, denn die Beschränkung $s \to A_{\mathfrak{B}}(s)$ $(s \in \mathfrak{B})$ von $s \to A(s)$ $(s \in \mathfrak{G})$ auf $\mathfrak{B}$ zerfällt nach Satz 1 in lauter inäquivalente Darstellungen $s \to \zeta_i(s)$ $(s \in \mathfrak{B};\ i = 1, \dots, n)$ von $\mathfrak{B}$.
Umgekehrt seien die beiden zyklischen Gruppen $\mathfrak{C} = \langle c \rangle$ und $\mathfrak{Z} = \langle z \rangle$ gegeben. $\mathfrak{U}$ sei eine Untergruppe des Kranzprodukts $\mathfrak{P} = \mathfrak{C} \mathbin{\overset{\sigma}{\sim}} \mathfrak{Z}$ mit den durch den Isomorphismus σ vereinigten Untergruppen $\mathfrak{C}' = \langle c' \rangle$ und $\mathfrak{Z}' = \langle z' \rangle$ von $\mathfrak{C}$ bzw. $\mathfrak{Z}$. Der Isomorphismus σ bilde c' auf z' ab. $\mathfrak{U}$ habe die Eigenschaften 1 und 2.
Die Ordnung von $\mathfrak{C}/\mathfrak{C}'$ sei n, und die Nebenklassenzerlegung von $\mathfrak{C}$ nach $\mathfrak{C}'$ sei $\mathfrak{C} = c\mathfrak{C}' + \cdots + c^n\mathfrak{C}'$, wir setzen $c^n = c'$. Wir bilden $\mathfrak{U}$ auf $\mathfrak{C}/\mathfrak{C}'$ ab, und zwar durch die Abbildung δ, die $(c^k; z_1, \dots, z_n)\,\mathfrak{M}$ auf $c^k\mathfrak{C}'$ abbildet. δ ist eindeutig und homomorph. Der Kern $\mathfrak{H}$ von δ besteht aus allen Elementen, die auf $\mathfrak{C}'$ abgebildet werden, also aus allen $(c'^{\nu}; z_1, \dots, z_n)\,\mathfrak{M}$ $(c'^{\nu} \in \mathfrak{C}')$. $\mathfrak{H}$ ist abelsch, weil $\pi(c'^{\nu})$ $(c'^{\nu} \in \mathfrak{C}')$ die identische Permutation ist. $\mathfrak{U}/\mathfrak{H}$ ist isomorph zu $\mathfrak{C}/\mathfrak{C}'$, also ist $\mathfrak{U}/\mathfrak{H}$ zyklisch.
Jetzt müssen wir noch zeigen, daß $\mathfrak{U}$ eine treue irreduzible Darstellung besitzt.
Die Abbildung $s \to \varrho(s)$ $(s \in \mathfrak{Z}$, $\varrho(s)$ aus der Gruppe der m-ten Einheitswurzeln, wenn m die Ordnung von $\mathfrak{Z}$ ist) sei treue Darstellung von $\mathfrak{Z}$. Das Produkt des Isomorphismus σ, der $\mathfrak{C}'$ auf $\mathfrak{Z}'$ abbildet, mit der auf $\mathfrak{Z}'$ beschränkten Darstellung $s \to \varrho(s)$ $(s \in \mathfrak{Z}')$ ergibt eine treue lineare Darstellung $s \to \varrho\big(\sigma(s)\big)$ $(s \in \mathfrak{C}')$ von $\mathfrak{C}'$. Bei der durch diese Darstellung von $\mathfrak{C}'$ induzierten Darstellung von $\mathfrak{C} = \langle c \rangle$ wird dem Element c die Matrix

$$P(c) = \begin{pmatrix} & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ \varrho' & & & \end{pmatrix}$$

zugeordnet $\big(\varrho' = \varrho(\sigma(c'))\big)$.

Die Abbildung φ, die jedem Element $(c^k; z_1, \ldots, z_n)\,\mathfrak{M}$ aus $\mathfrak{U}$ die Matrix

$$P(c^k)\begin{pmatrix} \varrho(z_1) & & & \\ & \varrho(z_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varrho(z_n) \end{pmatrix} \tag{1}$$

zuordnet, ist eine treue irreduzible Darstellung, wie jetzt gezeigt werden soll.
Es werde bei φ ein weiteres Element $(c^l; \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n)\,\mathfrak{M}$ aus $\mathfrak{U}$ abgebildet auf

$$P(c^l)\begin{pmatrix} \varrho(\bar{z}_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \varrho(\bar{z}_n) \end{pmatrix}.$$

Ist $(c^k; z_1, \ldots, z_n)\,\mathfrak{M} = (c^l; \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n)\,\mathfrak{M}$, so gilt $c^k = c^l c'^{\nu}$ und $z_i = \bar{z}_i z'^{-\nu}$. Es folgt $P(c^k) = P(c^l)\,P(c'^{\nu})$ und $\varrho(z_i) = \varrho(\bar{z}_i)\,\varrho'^{-\nu}$ und damit die Gleichheit der Bildmatrizen bei φ.
Das Produkt

$$(c^k; z_1, \ldots, z_n)\,\mathfrak{M} \cdot (c^l; z_1, \ldots, z_n)\,\mathfrak{M} = (c^{k+l}; z_{1\pi(c^{-l})} z_1, \ldots, z_{n\pi(c^{-l})} z_n)\,\mathfrak{M}$$

wird bei φ abgebildet auf die Matrix

$$P(c^{k+l})\begin{pmatrix} \varrho(z_{1\pi(c^{-l})})\,\varrho(\bar{z}_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \varrho(z_{n\pi(c^{-l})})\,\varrho(\bar{z}_n) \end{pmatrix}$$

$$= P(c^k)\,P(c^l)\,P(c^{-l})\begin{pmatrix} \varrho(z_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \varrho(z_n) \end{pmatrix} P(c^l)\begin{pmatrix} \varrho(\bar{z}_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \varrho(\bar{z}_n) \end{pmatrix}$$

$$= P(c^k)\begin{pmatrix} \varrho(z_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \varrho(z_n) \end{pmatrix} P(c^l)\begin{pmatrix} \varrho(\bar{z}_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \varrho(\bar{z}_n) \end{pmatrix}.$$

Der Kern des Homomorphismus φ besteht nur aus dem Einselement. Ist nämlich die Matrix (1) gleich E, dann sind die beiden Faktoren in (1) invers zueinander, und $P(c^k)$ ist Diagonalmatrix. Deshalb liegt c^k in $\mathfrak{C}'$, es ist $c^k = c'^{\nu}$, $P(c^k) = \varrho'^{\nu} E$ und $\varrho(z_i^{-1}) = \varrho'^{\nu}$. Wegen der Treue der Darstellung $s \to \varrho(s)$ $(s \in \mathfrak{Z})$ folgt $z'^{\nu} = z_i^{-1}$ mit dem oben definierten z' $\big(\sigma(c') = z'\big)$. Daher wird $c^k = c'^{\nu}$ bei σ abgebildet auf z_i^{-1} $(i = 1, \ldots, n)$, und $(c^k; z_1, \ldots, z_n)\,\mathfrak{M}$ ist gleich dem Einselement $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{U}$.
Damit haben wir nachgewiesen, daß φ eine treue Darstellung von $\mathfrak{U}$ ist.

Zum Nachweis der Irreduzibilität benutzen wir folgendes Kriterium:
Eine endlichdimensionale vollständig reduzible Darstellung einer Gruppe ist dann und nur dann irreduzibel, wenn jeder auf dem Darstellungsraum erklärte und mit allen Darstellungsoperatoren vertauschbare Operator ein Vielfaches des Einsoperators ist.
Zunächst betrachten wir alle Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} \varrho(z_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \varrho(z_n) \end{pmatrix}.$$

Solche Matrizen kommen tatsächlich unter den Darstellungsmatrizen von φ vor, denn $P(e)$ ist die Einheitsmatrix. Dieses Matrixsystem zerfällt in Bestandteile ersten Grades, die wegen der Eigenschaft 2 von $\mathfrak{U}$ alle verschieden sind. Wir benutzen den allgemeinen Satz:
Ein Matrixsystem der Form $k_1 A_1 \dotplus \cdots \dotplus k_l A_l$, wobei die A_i $(i = 1, \ldots, l)$ inäquivalente und irreduzible Matrixsysteme durchlaufen, ist genau mit allen Matrizen der Form $T = T_1 \dotplus \cdots \dotplus T_l$ vertauschbar, wobei T_i $(i = 1, \ldots, l)$ aus $k_i \cdot k_i$ Teilmatrizen besteht, die alle Skalarmatrizen sind.
In unserem Fall tritt jedes A_i nur einmal auf und ist vom Grad 1. Obiges Matrixsystem ist also genau mit allen Diagonalmatrizen elementweise vertauschbar.
Jetzt betrachten wir alle Diagonalmatrizen

$$\begin{pmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_n \end{pmatrix},$$

die mit allen Matrizen der Darstellung φ elementweise vertauschbar sind. Da $\mathfrak{U}$ die Eigenschaft 1 hat, enthält $\mathfrak{U}$ auch Elemente, bei denen in der ersten Komponente das erzeugende Element c von $\mathfrak{C}$ auftritt. Dann lautet die Vertauschbarkeitsforderung

$$P(c)\begin{pmatrix} \varrho_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \varrho_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_n \end{pmatrix} P(c)\begin{pmatrix} \varrho_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \varrho_n \end{pmatrix}$$

bzw.

$$P(c)\begin{pmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_n \end{pmatrix} P(c),$$

woraus durch Rechnung $t_1 = \cdots = t_n$ folgt.
Obiges Matrixsystem ist also genau mit den Skalarmatrizen vertauschbar. Da dieses Matrixsystem vollständig reduzibel ist, weil es eine Darstellung einer endlichen Gruppe über dem komplexen Zahlkörper ist, folgt aus obigem Kriterium die Irreduzibilität von φ.

LITERATUR

[1] HUPPERT, B.: Lineare auflösbare Gruppen. Math. Z. *67* (1957), 479–518.
[2] VAN DER WAERDEN, B. L.: Gruppen von linearen Transformationen. Ergebn. Math. 4/2 (1935).

Manuskripteingang: 20. 7. 1976

VERFASSER:

IRMTRAUD LANGEMANN, Sektion Mathematik der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock