

## Werk

**Titel:** Ebene äquiaffine und metrische Geometrien

**Autor:** WERNICKE, B.

**Jahr:** 1978

**PURL:** [https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?301416052\\_0007|log10](https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?301416052_0007|log10)

## Kontakt/Contact

[Digizeitschriften e.V.](#)  
SUB Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen

✉ [info@digizeitschriften.de](mailto:info@digizeitschriften.de)

## Ebene äquiaffine und metrische Geometrien

BERND WERNICKE

In der vorliegenden Arbeit werden spiegelungsgeometrische Axiomensysteme Papposscher Ebenen mit Fano-Axiom studiert. Dabei wird einmal die Verwendung eines Reduktionssatzes als Axiom untersucht, zum anderen wird ein Axiomensystem so entwickelt, daß auch ebene metrische Geometrien nach BACHMANN [1] und WOLFF [12] eingeordnet werden können.

KLOTZEK [3] gab eine Charakterisierung der Gruppe der äquiaffinen Abbildungen einer Papposschen Ebene mit Fano-Axiom als einer von Schrägspiegelungen an Geraden erzeugten Gruppe.

Für die gruppentheoretischen Untersuchungen in [3] ist die Gruppe, die von allen Schrägspiegelungen einer Papposschen Ebene mit Fano-Axiom erzeugt wird, Standardmodell. Die Wahl der Axiome wurde in erster Linie durch das Ziel der Arbeit bestimmt, eine Charakterisierung dieses Standardmodells zu erhalten. Die Charakterisierung wurde in [3] unter zusätzlicher Verwendung analytischer Hilfsmittel angegeben. Dabei wurde die besondere Stellung des Axioms

- (6) Zu Erzeugenden (Schrägspiegelungen)  $\alpha, \beta$  und zu Punkten  $P, Q$  mit  $P \mid \alpha, \beta$  gibt es eine Erzeugende  $\gamma$  mit  $P, Q \mid \gamma$  derart, daß  $\alpha\beta\gamma \in \Gamma$  oder  $\gamma^\alpha, \gamma^\beta \mid \gamma$  gilt (verallgemeinerter Dreispiegelungssatz für Erzeugende durch einen Punkt).

herausgearbeitet: In Desarguesschen Ebenen mit Fano-Axiom sind (6) und der affine Satz von PAPPUS-PASCAL äquivalent. Ebenso wurde die Stellung des Reduktionssatzes (Rd), der besagt, daß in der Ebene das Produkt von vier Erzeugenden (Schrägspiegelungen) gleich einem Produkt von zwei Erzeugenden ist,

- (Rd) Zu Erzeugenden  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  gibt es Erzeugende  $\varphi, \chi$  mit  $\alpha\beta\gamma\delta = \varphi\chi$ ,

klar fixiert. (Rd) für Schrägspiegelungen in Translationsebenen mit Fano-Axiom aufgeschrieben, ist dem affinen Satz von PAPPUS-PASCAL äquivalent. Dieser Reduktionssatz stellt durch seine Formulierung eine ausgesprochen gruppentheoretische Aussage dar, so daß es gerade nach den genannten Zusammenhängen nahe liegt, eine derartige Aussage als Axiom zu verwenden.

Um den verallgemeinerten Charakter des Schrägspiegelungskalküls gegenüber den von orthogonalen Spiegelungen erzeugten Gruppen hervortreten zu lassen, ist der

Aufbau der ebenen Geometrie hier so angelegt, daß in Abschnitt 4 im Rahmen einer Gabelung eine Einordnung aller klassischen Bewegungsgruppen nach BACHMANN [1] und WOLFF [12] möglich ist. Als gemeinsame Grundlage der elliptischen, euklidischen und hyperbolischen Geometrie sowie der Minkowskischen und der äquiaffinen Geometrie muß unser Ausgangsaxiomensystem, das Rumpf-Axiomensystem  $\mathfrak{R}$ ,

- a) die Frage über die Eindeutigkeit des Lotefällens,
- b) die Parallelenfrage,
- c) die Frage über die Existenz der Verbindungsgeraden zweier Punkte,
- d) die Frage über die Existenz von Scherungen

offen lassen.

Nachdem wir uns in Abschnitt 1 mit dem Axiomensystem der äquiaffinen Ebene und den nach der Grundannahme definierten Begriffen aus [3] vertraut gemacht haben, wird in Abschnitt 2 das Rumpf-Axiomensystem  $\mathfrak{R}$  vorgestellt. Es werden Folgerungen aus  $\mathfrak{R}$  bzw. aus einem um zwei Zusatzaxiome erweiterten System gezogen.

In Abschnitt 3 wird ein Axiomensystem der äquiaffinen Ebene studiert, das den Reduktionssatz (Rd) als Axiom enthält. Es zeigt sich, daß der in [3] verwendete verallgemeinerte Dreispiegelungssatz (6) für eine gruppentheoretische Charakterisierung Papposcher Ebenen mit Fano-Axiom durch den Reduktionssatz (Rd) ersetzt werden kann. Die Existenz einer Verbindungserzeugenden zu zwei gegebenen Punkten, die in (6) enthalten ist, wird dabei in ein Verbindbarkeitsaxiom integriert. Die Charakterisierung des Standardmodells erfolgt in diesem Aufbau ohne analytische Hilfsmittel, d. h. insbesondere, daß der affine Satz von PAPPOS-PASCAL im gruppentheoretischen Kalkül abgeleitet werden kann. Es wird auch gezeigt, daß die Erzeugenden und die Punkte die einzigen involutorischen Elemente in der erzeugten Gruppe sind. Damit gelingt es nachzuweisen, daß die Gruppe nicht zweispiegelig ist.

Weitere Untersuchungen in der äquiaffinen Ebene führen zum „verallgemeinerten Dreispiegelungssatz mit Einschränkung der Unverbindbarkeit“, der als Axiom (6̄) in Abschnitt 4 verwendet wird und im Zusammenhang mit dem Rumpf-Axiomensystem  $\mathfrak{R}$  die Fragen a) bis d) noch nicht entscheidet.

- (6̄) Zu Erzeugenden  $\alpha, \beta, \varphi$  und zu vier verschiedenen Punkten  $P, A, B, C$  mit  $P \mid \alpha, \beta, P \nmid \varphi$  und  $A, B, C \mid \varphi$  gibt es eine Erzeugende  $\gamma$  mit  $(\gamma \mid P, A$  oder  $\gamma \mid P, B$  oder  $\gamma \mid P, C)$  und  $\alpha\beta\gamma \in \Gamma$ .

Ausgehend vom Rumpf-Axiomensystem wird die am Schrägspiegelungskalkül orientierte Axiomatisierung in Abschnitt 4 so weiterentwickelt, daß neben einer neuen Kennzeichnung der äquiaffinen Ebenen im Rahmen einer Gabelung auch die elliptischen, euklidischen und hyperbolischen Bewegungsgruppen nach BACHMANN [1] und die Minkowskischen Ebenen nach WOLFF [12] eingeordnet und damit neu charakterisiert werden können. Nach Erkenntnissen einer Gabelung der ebenen absoluten Geometrie in [1] wird die Frage über die Eindeutigkeit des Lotefällens und die Parallelenfrage entschieden. Für die Einordnung Minkowskischer Ebenen erweist sich im Zusammenhang mit der Existenz unverbindbarer Punkte in dieser Geometrie der verallgemeinerte Dreispiegelungssatz (6̄) als grundlegendes Axiom. Die Frage über die Existenz von Scherungen wird dann direkt durch das Axiom (Se) bzw. die Negation ( $\sim$  Se) entschieden:

- (Se) Es gibt Erzeugende  $\alpha, \beta$  mit  $\alpha \neq \beta$  und  $(\alpha) = (\beta)$ , d. h., es gibt verschiedene achsengleiche Erzeugende.

Das Axiom (Se) besagt, daß es eine nichtidentische Scherung gibt.

Mit schon in [3, 1, 12] verwendeten Axiomen, wie die Aussage über die Existenz unvertauschbarer Scherungen ( $\sim E$ ), die Existenz der Verbindungsgeraden ( $E_x$ ) und der Dreispiegelungssatz ( $S_P$ ), erhalten wir die gewünschten Charakterisierungen.

Herrn B. KLOTZEK verdanke ich die Anregung zu dieser Arbeit. Ihm fühle ich mich für viele Hinweise zu besonderem Dank verpflichtet.

### 1. Ein Axiomensystem der äquiaffinen Ebene von B. Klotzek

In [2] und [3] wird für Pappossche Ebenen mit Fano-Axiom ein gruppentheoretisches Axiomensystem angegeben. Eine aus involutorischen Elementen erzeugte Gruppe, in der die Elemente des Erzeugendensystems den folgenden Axiomen genügen, charakterisiert die Gruppe der ebenen äquiaffinen Abbildungen einer Papposchen Ebene mit Fano-Axiom.

Grundannahme. Gegeben sei eine Gruppe  $G$ , die von einem gegenüber inneren Automorphismen von  $G$  invarianten, aus involutorischen Elementen bestehenden System  $\Gamma$  erzeugt wird.

Betrachtet wird eine Relation  $|$  zwischen involutorischen Gruppenelementen:

$$a | b \Leftrightarrow a, b, ab \text{ involutorisch.}$$

Mit  $a | b$  sind für involutorische Gruppenelemente  $a, b$  die folgenden Aussagen äquivalent:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } (ab)^2 = 1 \text{ und } ab \neq 1, & \text{c) } a^b = a \text{ und } a \neq b, \\ \text{b) } ab = ba \text{ und } a \neq b, & \text{d) } b^a = b \text{ und } a \neq b. \end{array}$$

Für Elemente des Erzeugendensystems  $\Gamma$  verwenden wir die Buchstaben  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ . Diejenigen Gruppenelemente, die sich in der Form  $\alpha\beta$  mit  $\alpha | \beta$  darstellen lassen, heißen *Punkte*, und wir bezeichnen sie mit  $A, B, C, \dots$ . Die Menge aller Punkte wird mit dem Symbol  $\mathfrak{P}$  belegt. Folgende Mengen werden für eine Erzeugende  $\alpha$  eingeführt:

$$\begin{aligned} \langle \alpha \rangle &= \{ \xi : \xi \in \Gamma \text{ und } \alpha | \xi \}, \\ (\alpha) &= \{ X : X \in \mathfrak{P} \text{ und } \alpha | X \}, \\ [\alpha] &= \{ \{ \xi \} : \xi \in \langle \alpha \rangle \}. \end{aligned}$$

Wir schließen uns den Bezeichnungen und der Sprechweise in [3] an und verwenden die Begriffe *zu  $\alpha$  konjugierte Erzeugende  $\xi$*  für  $\xi \in \langle \alpha \rangle$ , *Achse* bzw. *Gerade*  $(\alpha)$  und *Fahne*  $[\alpha]$  sowie die Relationen *konjugierten-, achsen- und fahngleich*, wie sie in [3] definiert werden. Für konjugiertengleiche Erzeugende  $\alpha, \beta$  wird statt  $\langle \alpha \rangle = \langle \beta \rangle$  auch  $\alpha \parallel \beta$  geschrieben.

Ein Gruppenelement  $a$  ist eine *Verschiebung* bzw. *Scherung* genau dann, wenn es Erzeugende  $\alpha, \beta$  mit  $a = \alpha\beta$  und  $\alpha \parallel \beta$  bzw.  $(\alpha) = (\beta)$  gibt. Gruppenelemente, die sich als Produkte  $\alpha\beta$  mit  $(\alpha) \in [\beta]$  oder  $(\beta) \in [\alpha]$  darstellen lassen, werden *Punktspiegelscherungen* genannt.

Die *Inzidenz* von Punkten und Geraden und die *Parallelität* von Geraden sowie die Begriffe *Fixelemente* und *Mittелеlemente* seien wie üblich erklärt.

Die inneren Automorphismen von  $G$  bilden  $\Gamma$  auf  $\Gamma$  und  $\mathfrak{P}$  auf  $\mathfrak{P}$  ab, wobei die Relation  $|$  erhalten bleibt. Bezeichnet  $\mathcal{G}$  die Menge der Geraden, dann können wir

feststellen, daß die inneren Automorphismen  $\mathcal{G}$  auf  $\mathcal{G}$  abbilden, wobei die Inzidenz erhalten bleibt.

Als Standardmodell des gruppentheoretischen Axiomensystems dient die von allen Schrägspiegelungen einer Papposschen Ebene mit Fano-Axiom erzeugte Gruppe.

**Axiome.**

- (1) *Es gibt Erzeugende  $\alpha, \beta$  und einen Punkt  $C$  mit  $\alpha \mid \beta$  und  $\alpha, \beta, \alpha\beta \nmid C$  (Dimensionsaxiom); Abb. 1.*
- (2) *Zu jeder Erzeugenden  $\alpha$  und zu jedem Punkt  $P$  gibt es eine Erzeugende  $\beta$  mit  $\alpha, P \mid \beta$  (1. Verbindbarkeitsaxiom); Abb. 2.*
- (3) *Für Erzeugende  $\alpha, \beta$  und Punkte  $P, Q$  folgt aus  $\alpha, \beta \mid P, Q$  stets erstens  $P = Q$  oder zweitens  $\alpha = \beta$  oder drittens  $X \mid \alpha \Rightarrow X \mid \beta$  und  $X \nmid \alpha \Rightarrow X^{\alpha\beta} \neq X^{\beta\alpha}$  für beliebige Punkte  $X$  (Scherungsaxiom); Abb. 3.*
- (4) *Aus  $\alpha, \beta \mid \gamma$  folgt  $\alpha \parallel \beta$  ( $\langle \alpha \rangle = \langle \beta \rangle$ ) für alle Erzeugende  $\alpha, \beta, \gamma$  (Kriterium für Konjugiertengleichheit); Abb. 4.*
- (5) *Aus  $\alpha, \beta, \gamma \mid \varphi$  folgt  $\alpha\beta\gamma \in \Gamma$  für alle Erzeugende  $\alpha, \beta, \gamma, \varphi$  (Dreispiegelungssatz für Erzeugende mit gemeinsamer Konjugierten); Abb. 5.*
- (6) *Zu Erzeugenden  $\alpha, \beta$  und zu Punkten  $P, Q$  mit  $P \mid \alpha, \beta$  gibt es eine Erzeugende  $\gamma$  mit  $P, Q \mid \gamma$  derart, daß  $\alpha\beta\gamma \in \Gamma$  oder  $\gamma^\alpha, \gamma^\beta \mid \gamma$  gilt (verallgemeinerter Dreispiegelungssatz für Erzeugende durch einen Punkt); Abb. 6.*
- (7) *Zu Erzeugenden  $\alpha, \beta$  gibt es Erzeugende  $\varphi, \chi$  mit  $\langle \alpha \rangle = \langle \varphi \rangle$  und  $\langle \beta \rangle = \langle \chi \rangle$  derart, daß  $\varphi \mid \chi$  oder  $\varphi \parallel \chi$  gilt (starkes Verbindbarkeitsaxiom); Abb. 7.*

Das Paar  $(G, \Gamma)$ , welches der Grundannahme und den Axiomen (1) bis (7) genügt, wird als *äquif affine Ebene* bezeichnet.

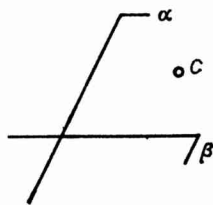


Abb. 1

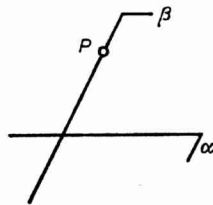


Abb. 2

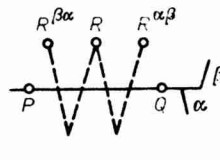


Abb. 3

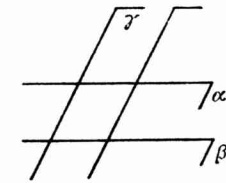


Abb. 4

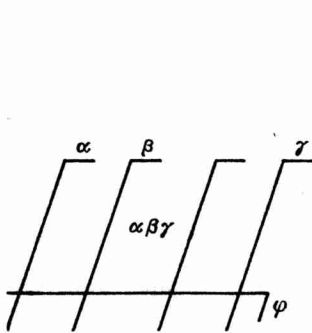


Abb. 5

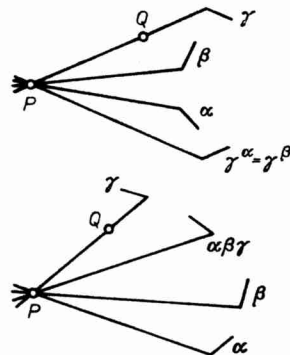


Abb. 6

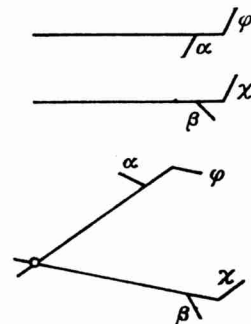


Abb. 7

## 2. Das Rumpf-Axiomensystem $\mathfrak{R}$ und erste Erweiterungen

In diesem Abschnitt werden wir zunächst von einem sehr allgemeinen gruppentheoretischen Axiomensystem ausgehen, welches uns als Grundstock für die Untersuchungen in den Abschnitten 3 und 4 dienen wird.

Ebenso wie in Abschnitt 1 setzen wir eine von involutorischen Elementen erzeugte Gruppe  $G$  mit der Invarianz des Erzeugendensystems  $\Gamma$  gegen innere Automorphismen voraus (Grundannahme). Im folgenden verwenden wir Begriffe, wie sie schon auf der Grundlage der Grundannahme in Abschnitt 1 definiert bzw. erläutert wurden; auch stützen wir uns auf die „axiomenfrei“ ableitbare Invarianz  $\Gamma$  und  $\mathfrak{A}$  sowie von  $\mathfrak{G}$  bei inneren Automorphismen von  $G$ , wobei die Relation  $|$  bzw. die Inzidenz erhalten bleibt. Das Rumpf-Axiomensystem  $\mathfrak{R}$  soll neben der Grundannahme das Dimensionsaxiom (1), das erste Verbindbarkeitsaxiom (2), das Scherungsaxiom (3), den Dreispiegelungssatz (5) und das gegenüber (4) abgeschwächte Axiom

(4') Aus  $\alpha, \beta | \gamma, \delta$  folgt  $\gamma = \delta$  oder  $\alpha \parallel \beta$  für alle Erzeugende  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  umfassen.

Eine Analyse der aus dem Axiomensystem in [3] hergeleiteten Sätze läßt uns folgende Ergebnisse verwenden, die nötigenfalls in [11] neu bewiesen wurden. Am Ende jeder Aussage wird hier auf [3] bzw. [11] verwiesen.

### 2.1. Folgerungen aus $\mathfrak{R}$

Unmittelbar aus den Axiomen (3) und (4') ergibt sich der Satz von der Achsen- und Konjugiertengleichheit:

(2.1) a) Es gilt  $\langle \alpha \rangle = \langle \beta \rangle$ , wenn es Punkte  $P$  und  $Q$  mit  $P \neq Q$  und  $\alpha, \beta | P, Q$  gibt.  
b) Es gilt  $\langle \alpha \rangle = \langle \beta \rangle$ , wenn es Erzeugende  $\gamma, \delta$  mit  $\gamma \neq \delta$  und  $\alpha, \beta | \gamma, \delta$  gibt [3, (4.1)].

(2.2) Es gibt nichtkollineare Punkte [3, (4.2)].

(2.3) Es gilt  $\alpha | \beta$  und  $P | \alpha, \beta$  genau dann, wenn  $P = \alpha\beta$  ist. Aus  $P | \alpha$  folgt  $\alpha P \in \Gamma$  und umgekehrt [3, (4.3)].

(2.4) Aus  $P \neq \alpha$  und  $P, \alpha | \beta, \gamma$  folgt  $\beta = \gamma$  [3, (4.5)].

Als Folgerung aus (2.4) und wegen der Definition der Strichrelation erhalten wir

(2.5) Aus  $\alpha | \beta, \beta | \gamma$  und  $\gamma | \alpha$  folgt  $\alpha\beta\gamma = 1$  und umgekehrt.

### 2.2. Die Verschärfung (4) von (4')

Im folgenden verschärfen wir im Rumpf-Axiomensystem  $\mathfrak{R}$  das Axiom (4') zu

(4) Aus  $\alpha, \beta | \gamma$  folgt  $\alpha \parallel \beta$  (Kriterium für Konjugiertengleichheit).

Aus dem Axiom (4) folgt die Negation ( $\sim P$ ) vom Axiom vom Polardreieit. Dieses Axiom lautet:

(P) Es gibt  $\alpha, \beta, \gamma$  mit  $\alpha\beta\gamma = 1$ .

Mit ( $\sim P$ ) gelten auch die Negationen folgender Aussagen

a) Es gibt  $\alpha, A$  mit  $\alpha = A$ .

b) Es gibt  $\alpha, \beta, \gamma$  mit  $\alpha | \beta, \beta | \gamma, \gamma | \alpha$ .

c) Es gibt  $A, B, C$  mit  $ABC = 1$ .

d) Es gibt  $A, B$  mit  $A | B$  (vgl. dazu (8.3), (4.8) in [3]).

Wir erhalten damit nach (2) und (2.4) zu einem Punkt  $P$  und einer Erzeugenden  $\alpha$  genau eine Erzeugende  $\beta = (\alpha, P)$  mit  $\alpha, P \mid \beta$ , die *Verbindung von  $P, \alpha$* .

Existiert zu zwei Punkten  $P, Q$  ein  $\varphi$  mit  $P, Q \mid \varphi$ , so ist nach (2.1 a) eine (*Verbindungs-*) Gerade  $g$  mit  $P, Q \in g$  eindeutig bestimmt, in Zeichen  $g = g_{PQ}$ .

(2.6) Jede Gerade enthält wenigstens drei verschiedene Punkte [11, (2.6)].

(2.7) Zu Geraden  $g, h$  gibt es höchstens eine Erzeugende  $\varphi$  mit  $g = (\varphi)$  und  $h \in [\varphi]$ ; aus  $(\varphi) = (\chi)$  und  $[\varphi] = [\chi]$  folgt  $\varphi = \chi$  [3, (4.11)].

(2.8) Ergänzung zu (5). Aus  $\alpha, \beta, \gamma \mid \varphi$  und  $\alpha\beta\gamma = \delta$  folgt  $\delta \mid \varphi$  [3, (5.3)].

(2.9) Das Produkt  $\alpha B \gamma$  ist genau dann ein Punkt, wenn es ein  $\varphi$  mit  $\varphi \mid \alpha, B, \gamma$  gibt. Aus  $\alpha, B, \gamma \mid \varphi$  und  $\alpha B \gamma = D$  folgt  $D \mid \varphi$  [3, (5.4)].

(2.10)  $A\beta C$  ist genau dann eine Erzeugende, wenn es ein  $\varphi$  mit  $\varphi \mid A, \beta, C$  gibt. Aus  $A, \beta, C \mid \varphi$  und  $A\beta C = \delta$  folgt  $\delta \mid \varphi$  [3, (5.5)].

(2.11)  $ABC$  ist stets ein Punkt [11, (2.11)].

(2.12) Zu  $P, \alpha$  gibt es genau ein  $\beta$  mit  $P \mid \beta$  und  $\alpha \parallel \beta$  [11, (2.12)].

(2.13) Zu  $A, B, C$  mit  $A, B \mid \chi$  gibt es ein  $\varphi$  mit  $\varphi \mid C$  und  $\varphi \parallel \chi$ , und es gilt  $ABC = D \mid \varphi$  [11, (2.13)].

### 2.3. Das schwache Verbindbarkeitsaxiom (7')

Wir nehmen nach der Verschärfung von (4') zu (4) in  $\mathfrak{R}$  für die weiteren Untersuchungen noch das Axiom (7') hinzu:

(7') Zu Erzeugenden  $\alpha, \beta$  gibt es einen Punkt  $P$  mit  $P \mid \alpha, \beta$  oder Erzeugende  $\varphi, \chi$  mit  $(\alpha) = (\varphi)$  und  $\beta, \varphi \mid \chi$  (schwaches Verbindbarkeitsaxiom).

Auf Grund der Eindeutigkeit des Lotefällens erhalten wir bereits ohne (7')

(2.14) Aus  $\alpha \parallel \beta$  folgt  $(\alpha) \parallel (\beta)$ .

Mit (7') ergibt sich

(2.15) Gilt  $g \parallel h$  für Geraden  $g, h$ , dann gibt es Erzeugende  $\alpha, \beta$  mit  $(\alpha) = g, (\beta) = h$  und  $\alpha \parallel \beta$ ; gilt  $g \parallel (\beta)$ , dann gibt es ein  $\alpha$  mit  $(\alpha) = g$  und  $\alpha \parallel \beta$  [3, (9.4)].

(2.16) Parallelitätskriterium. Es sei  $A \neq B, A, B \in g, C \in h$  und  $ABC = D$ . Dann gilt  $D \in h$  genau dann, wenn  $g \parallel h$  gilt [3, (9.5)].

(2.17) Es seien  $A, B, C$  nichtkollineare Punkte. Dann ist  $(ABCD)$  genau dann ein Parallelogramm, wenn  $ABC = D$  gilt [3, (9.6)].

(2.18) Zu  $g, P$  gibt es genau ein  $h$  mit  $P \in h$  und  $g \parallel h$  [11, (2.18)].

(2.19) Sind  $e$  und  $f$  die Verbindungsgeraden von  $P, R$  bzw.  $Q, S$  im Parallelogramm  $(PQRS)$ , so haben  $e$  und  $f$  genau einen gemeinsamen Punkt [3, vgl. (9.8)].

(2.20) Aus  $P^M = Q$  und  $P, Q \mid \varphi$  folgt  $M \mid \varphi$  [3, (6.1)].

(2.21) Zwei Punkte  $P, Q$  besitzen höchstens einen Mittelpunkt. Ist  $M$  Mittelpunkt und  $\mu$  Mittellinie von  $P, Q$ , dann gilt  $M \mid \mu$  [3, (6.2)].

(2.22) Fixpunktlema. Gilt  $F^{\alpha\beta} = F$  und  $F \not\mid \alpha$ , dann gibt es einen Punkt  $M$  mit  $M \mid \alpha, \beta$  und  $(M\alpha) = (M\beta)$ , d. h.,  $\alpha\beta = \alpha M \cdot \beta M$  ist eine Scherung [3, (6.10)] bzw. [11, (2.22)].

(2.23) Folgerung aus (2.22). Besitzt  $\alpha\beta$  zwei verschiedene Fixpunkte  $F, G$ , dann ist  $\alpha\beta$  Scherung. Hat  $\alpha\beta$  drei Fixpunkte, die nicht auf einer Geraden liegen, dann ist  $\alpha\beta = 1$  [3, (6.11)].

Als Ergänzung zu (2.23) erhalten wir

(2.24) Hat  $\alpha\beta$  zwei verschiedene Fixpunkte  $F, G$  und liegen  $P$  und  $P^{\alpha\beta}$  in einer Geraden  $g \notin g_{FG}$ , wobei  $P \notin g_{FG}$  gelten soll, so ist  $\alpha\beta = 1$  [11, (2.24)].

### 3. Der Reduktionssatz in einem Axiomensystem der äquifformen Ebene

Aus dem Rumpf-Axiomensystem  $\mathfrak{R}$  bzw. aus dem durch (4) und (7') erweiterten System  $\mathfrak{R}, (4), (7')$  konnten wir schon bis auf eine Ausnahme alle affinen Inzidenzaussagen sowie die Fano-Aussage für die Menge aller Punkte und die Menge aller Geraden ableiten. Nicht beweisbar ist bisher die Existenz der Verbindungsgeraden zwei gegebener Punkte. Zur Charakterisierung Papposcher Ebenen mit Fano-Axiom werden wir neben einer Verschärfung des schwachen Verbindbarkeitsaxioms (7') den Reduktionssatz (Rd) als Axiom verwenden.

#### 3.1. Gruppentheoretische Charakterisierung Papposcher Ebenen mit Fano-Axiom

Im folgenden setzen wir das Axiomensystem  $\mathfrak{R}, (4), (7')$  voraus und können uns somit auch auf die Ergebnisse aus Abschnitt 2 stützen. Das Axiom (7') verschärfen wir jetzt zu einem starken Verbindbarkeitsaxiom, das gegenüber dem Axiom (7) aus Abschnitt 1 zusätzlich die Existenz der Verbindungsgeraden enthält:

(7\*) Zu einer Erzeugenden  $\alpha$  und zu Punkten  $P, Q$  gibt es Erzeugende  $\varphi, \chi$  mit  $(\alpha) = (\varphi)$  und  $P, Q \mid \chi$  derart, daß  $\varphi \mid \chi$  oder  $\varphi \parallel \chi$  gilt.

Das so erhaltene Axiomensystem erweitern wir noch durch den Reduktionssatz

(Rd) Zu Erzeugenden  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  gibt es Erzeugende  $\varphi, \chi$  mit  $\alpha\beta\gamma\delta = \varphi\chi$ .

(3.1) Zu  $P, Q$  gibt es ein  $\varphi$  mit  $P, Q \mid \varphi$ .

Beweis. Es sei  $P = \alpha\beta$ . Nach (7\*) gibt es zu  $\alpha$  und zu  $P, Q$  eine Erzeugende  $\varphi$  mit  $P, Q \mid \varphi$ . ■

(3.2) Ergänzung zu (2.6). Jeder Punkt ist in wenigstens vier Geraden enthalten.

Beweis. Es sei  $P$  ein beliebiger Punkt,  $g$  eine Gerade mit  $P \notin g$ . Nach (2.6) gibt es drei verschiedene Punkte  $A, B, C$  in  $g$ ; mit (3.1) erhalten wir drei verschiedene Geraden  $g_{AP}, g_{BP}, g_{CP}$  durch  $P$ . Zu  $g, P$  gibt es  $\alpha, \beta$  mit  $(\alpha) = g$  sowie  $P \mid \beta$  und  $\alpha \parallel \beta$  nach (2.12). Wegen (2.14) ist  $(\alpha) \parallel (\beta)$ . Da  $P \nmid \alpha'$  gilt, ist  $(\beta)$  eine vierte Gerade durch  $P$ . ■

(3.3) Hauptsatz. Für  $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G})$  gelten unter Voraussetzung der Grundannahme und der Axiome (1) bis (5) und (7\*) die affinen Inzidenzaxiome einschließlich des Fano-Axioms.

Beweis. In (2.2); (3.1), (2.1a); (2.18) und (2.19) ist die Existenz nichtkollinearere Punkte, die Existenz und Eindeutigkeit der Verbindungsgeraden nachgewiesen sowie die Gültigkeit des euklidischen Parallelenaxioms und des Fano-Axioms gezeigt worden. ■



Mit (2.17) können durch Rechnen mit Punkten die kleinen Sätze von DESARGUES und PAPPUS-PASCAL leicht abgeleitet werden;  $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G})$  ist eine Translationsebene, und wir erhalten zur Eindeutigkeit in (2.21) auch die Existenz eines Mittelpunktes zwei gegebener Punkte.

(3.4) Zu  $\alpha, \beta$  gibt es  $\varphi, \chi$  mit  $(\alpha) = (\varphi)$  und  $(\beta) = (\chi)$  derart, daß  $\varphi \mid \chi$  oder  $\varphi \parallel \chi$  gilt (Axiom (7) in [3]).

Beweis. Nach (2.6) gibt es  $P, Q (\neq P)$  mit  $P, Q \mid \beta$ . Zu  $\alpha$  und  $P, Q$  existieren nach (7\*)  $\varphi, \chi$  mit  $(\alpha) = (\varphi)$  und  $P, Q \mid \chi$  derart, daß  $\varphi \mid \chi$  oder  $\varphi \parallel \chi$  gilt. Wegen  $P \neq Q$  folgt nach (2.1a) aus  $P, Q \mid \beta, \chi$  noch  $(\beta) = (\chi)$ . ■

(3.5) Folgerung. Zu Geraden  $g, h$  mit  $g \nparallel h$  gibt es eine Erzeugende  $\varphi$  mit  $g = (\varphi)$  und  $h \in [\varphi]$ . Sind  $A, B, C$  nichtkollineare Punkte, so gibt es ein  $\varphi$  mit  $A \mid \varphi$  und  $B^\varphi = C$ .

Als Folgerung aus (Rd) und (2.24) erhalten wir eine Eindeutigkeitsaussage, die für die von Schrägspiegelungen erzeugte Gruppe in Translationsebenen mit Fano-Axiom dem affinen Satz von PAPPUS-PASCAL äquivalent ist (vgl. [3]):

(3.6) Ist  $\alpha$  ein Produkt einer geraden Anzahl von Erzeugenden und gibt es nichtkollineare Punkte  $A, B, C$  und eine Gerade  $g$  mit  $A^\alpha = A, B^\alpha = B$  und  $C, C^\alpha \in g \nparallel g_{AB}$ , dann ist  $\alpha = 1$ .

(3.7) Gilt  $\alpha, \beta \mid P$  und  $Q \neq P$ , so ist  $Q^{\alpha\beta} \in g_{PQ}$  genau dann, wenn  $Q^{\beta\alpha} \in g_{PQ}$  ist; ist  $Q^{\alpha\beta} \notin g_{PQ}$ , dann ist die Verbindungsgerade von  $Q^{\alpha\beta}$  und  $Q^{\beta\alpha}$  nicht parallel zu  $g_{PQ}$ .

Beweis. Es gilt  $(Q^{\alpha\beta})^{\beta\alpha} = Q, P^{\beta\alpha} = P$  und damit der erste Teil der Behauptung. Es sei  $Q^{\alpha\beta} = Q', Q^{\beta\alpha} = Q''$  und  $Q', Q'' \notin g_{PQ}$ . Nach (3.5) gibt es eine Erzeugende  $\delta$  mit  $P \mid \delta$  und  $Q^\delta = Q''$  (Abb. 8).

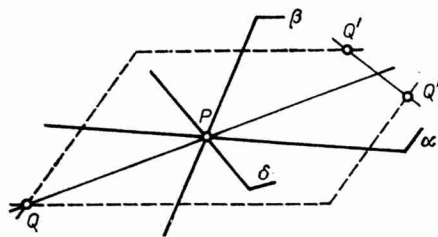


Abb. 8

Angenommen, es gilt  $Q', Q'' \in h \parallel g_{PQ}$ . Es sei  $N$  der Mittelpunkt von  $Q', Q''$ . Wegen  $Q', Q'' \notin g_{PQ}$  gilt  $h \neq g_{PQ}$  sowie  $g_{PQ'}$ ,  $g_{PN} \nparallel h$ , so daß es nach (3.5) Erzeugende  $\zeta, \eta$  mit  $(\zeta) = g_{PQ'}$ ,  $(\eta) = g_{PN}$  und  $h \in [\zeta], [\eta]$  gibt. Dann gilt  $P^{\beta\alpha\delta\zeta\eta} = P, Q^{\beta\alpha\delta\zeta\eta} = Q$  und  $Q'^{\beta\alpha\delta\zeta\eta} = Q''$ . Es sei  $\vartheta$  nach (3.5) durch  $g_{PQ} = (\vartheta)$  und  $g_{QQ'} \in [\vartheta]$  bestimmt. Nach (3.6) ist  $\beta\alpha\delta\zeta\eta\vartheta = 1$ . Damit erhalten wir  $Q'^{\vartheta} = Q'$  bzw.  $Q' \mid \vartheta$  im Widerspruch zu  $Q' \notin g_{PQ}$ . ■

(3.8) Zu  $\alpha, \beta$  und  $P, Q$  mit  $P \mid \alpha, \beta$  gibt es ein  $\gamma$  mit  $P, Q \mid \gamma$  derart, daß  $\alpha\beta\gamma \in \Gamma$  oder  $\gamma^\alpha, \gamma^\beta \mid \gamma$  gilt (Axiom (6) in [3]).

Zusatz. Ist dabei  $Q \neq P$ , so folgt

- a) Gilt  $Q^\alpha \in g_{PQ}$  oder  $Q^{\alpha\beta} \notin g_{PQ}$ , dann gibt es ein  $\gamma$  mit  $P, Q \mid \gamma$  und  $\alpha\beta\gamma \in \Gamma$ .
- b) Gilt  $Q^\alpha \notin g_{PQ}$  und  $Q^{\alpha\beta} \in g_{PQ}$ , dann gibt es ein  $\gamma$  mit  $P, Q \mid \gamma$  und  $\gamma^\alpha, \gamma^\beta \mid \gamma$ .

Beweis. Es seien  $\alpha, \beta, P, Q$  mit  $P \mid \alpha, \beta$  gegeben. Gilt  $P = Q$ , so wähle man  $\gamma = \beta$ . Die Behauptung ist im Fall  $\alpha = \beta$  ebenfalls trivial. Es sei nun  $P \neq Q, \alpha \neq \beta$  und  $Q^{\alpha\beta} = Q', Q^{\beta\alpha} = Q''$ .

Fall 1.  $Q', Q'' \notin g_{PQ}$ . Nach (3.7) gilt  $g_{Q'Q''} \notin g_{PQ}$ . Es sei  $M$  der Mittelpunkt von  $Q, Q''$ . Dann gibt es Erzeugende  $\gamma, \delta$  mit  $(\gamma) = g_{PQ}$  und  $g_{Q'Q''} \in [\gamma]$  bzw.  $(\delta) = g_{PM}$  und  $g_{QQ''} \in [\delta]$ . Aus  $P^{\beta\alpha\gamma} = P, Q^{\beta\alpha\gamma} = Q$  und  $Q', Q'^{\beta\alpha\gamma} \in g_{Q'Q''} \notin g_{PQ}$  folgt  $\beta\alpha\delta\gamma = 1$  nach (3.6). Damit gilt  $\alpha\beta\gamma = \delta$  mit  $P, Q \mid \gamma$ .

Fall 2.  $Q', Q'' \in g_{PQ}$ . a) Es gelte  $Q^\alpha = Q$ . Mit  $\gamma = \alpha$  ist  $\alpha\beta\gamma = \beta^\alpha \in \Gamma$  nach der Grundannahme.

b) Es gelte  $Q^\alpha \in g_{PQ}$ , aber  $Q \neq Q^\alpha$ . Es sei  $\gamma = P\alpha$ . Es gilt  $P, Q \mid \gamma$  wegen  $Q^\alpha \in g_{PQ} \in [\alpha]$ . Wir erhalten  $\alpha\beta\gamma = \alpha\beta P\alpha \in \Gamma$  nach (2.3) und der Grundannahme.

c) Gilt  $Q^\alpha \notin g_{PQ}$ , so gewinnen wir eine Erzeugende  $\gamma$  durch  $g_{PQ} = (\gamma)$  und  $g_{PQ^\alpha} \in [\gamma]$ . Es gilt  $g_{PQ}^\alpha = g_{PQ^\alpha}, g_{PQ^\alpha}^\beta = g_{PQ}$  und  $g_{PQ}^\beta = g_{PQ^\alpha}$ ; mit der Eindeutigkeitsaussage (2.7) ergibt sich  $\gamma^\alpha, \gamma^\beta \mid \gamma$ .

Die durch die Fallunterscheidung erhaltenen Ergebnisse machen den Zusatz offensichtlich. ■

(3.9) Theorem. *Mit der Grundannahme bilden die Axiome (1) bis (5), (Rd) und (7\*) ein Axiomensystem der äquiaffinen Ebene.*

Beweis. In der im Abschnitt 1 gegebenen Definition der äquiaffinen Ebene sind die Grundannahme und die Axiome (1) bis (5) ebenfalls enthalten. In (3.4) und (3.8) wurden die restlichen Axiome (6) und (7) der Definition aus der Grundannahme und (1) bis (5), (Rd), (7\*) abgeleitet.

Umgekehrt folgen nach [3] die Axiome (Rd) und (7\*) aus der Grundannahme und den Axiomen (1) bis (7). ■

In unserem gruppentheoretischen Aufbau konnten wir für (P, G) die Gültigkeit der affinen Inzidenzaxiome, des Fano-Axioms und des kleinen Satzes von DESARGUES nachweisen. Unter wesentlicher Benutzung des Reduktionssatzes (Rd) wurde die Eindeutigkeitsaussage (3.6) abgeleitet. Damit haben wir die Grundlage für eine direkte und kurze Ableitung des affinen Satzes von PAPPOS-PASCAL ohne analytische Hilfsmittel. Bezüglich des Beweises verweisen wir auf die inzidenzgeometrischen Untersuchungen in [3, S. 128]. Dort wurde nachgewiesen, daß eine Translationsebene mit Fano-Axiom, in der (3.6) für die von Schrägspiegelungen erzeugte Gruppe gilt, eine Papposche Ebene mit Fano-Axiom ist.

### 3.2. Zum verallgemeinerten Dreispiegelungssatz

In den Untersuchungen zur Gabelung der ebenen Spiegelungsgeometrie in Abschnitt 4 spielt eine modifizierte Form des verallgemeinerten Dreispiegelungssatzes (3.8) als Axiom eine wesentliche Rolle. Diese Aussage (3.18) wird hier in äquiaffinen Ebenen abgeleitet.

Zunächst zitieren wir aus [3] Ergänzungen zu (3.8), die nachfolgend benötigt werden. Wir verweisen mit der Satznummer am Ende jeder Aussage auf [3].

(3.10) Aus  $\alpha, \beta, \gamma \mid P$  und  $\alpha\beta\gamma = \delta$  folgt  $\delta \mid P$  (5.8).

(3.11) Es sei  $(\alpha) = (\beta)$  und  $\alpha \neq \beta$ . Es gilt  $\alpha\beta\gamma \in \Gamma$  genau dann, wenn  $(\alpha) = (\beta) = (\gamma)$  oder  $(\alpha), (\beta) \in [\gamma]$  ist (7.3).

(3.12) Es sei  $(\alpha) \in [\beta]$  mit  $\alpha, \beta \mid P$  und  $\alpha \not\mid \beta$ . Es gilt  $\alpha\beta\gamma \in \Gamma$  genau dann, wenn  $(\alpha) = (\gamma)$  oder  $(\alpha) \in [\gamma]$  und  $\gamma \mid P$  ist (7.4).

(3.13) **Büschellemma 1.** Aus  $(\gamma_1) = (\gamma_2) = g$ ,  $g^{\alpha\beta} \neq g$  und  $\alpha\beta\gamma_1, \alpha\beta\gamma_2 \in \Gamma$  folgt  $\gamma_1 = \gamma_2$  (7.5).

(3.14) Gilt  $(\gamma^{\alpha\beta}) = (\gamma)$  und  $\alpha\beta\gamma \in \Gamma$ , so ist  $\alpha\beta$  Scherung oder Punktspiegelscherung. Aus  $\gamma^{\alpha\beta} = \gamma$  und  $\alpha\beta\gamma \in \Gamma$  folgt  $\alpha = \beta$  oder  $\alpha \mid \beta$  (7.6).

(3.15) **Büschellemma 2.** Aus  $(\gamma_1) = (\gamma_2)$ ;  $\gamma_1^\alpha, \gamma_1^\beta \mid \gamma_1$  und  $\gamma_2^\alpha, \gamma_2^\beta \mid \gamma_2$  folgt  $\gamma_1 = \gamma_2$  (7.7).

(3.16) Ist  $\alpha\beta$  weder Scherung noch Punktspiegelscherung, dann gibt es zu  $P, Q$  mit  $P \neq Q$  und  $\alpha, \beta \mid P$  genau ein  $\gamma$  mit  $\gamma \mid P, Q$  derart, daß entweder  $\alpha\beta\gamma \in \Gamma$  oder  $\gamma^\alpha, \gamma^\beta \mid \gamma$  gilt. Ist  $\alpha\beta$  Scherung oder Punktspiegelscherung, dann gibt es zu  $P, Q$  mit  $P \neq Q$  und  $\alpha, \beta \mid P$  ein  $\gamma$  mit  $\gamma \mid P, Q$  und  $\alpha\beta\gamma \in \Gamma$ ;  $\gamma$  ist dann eindeutig, wenn  $(\gamma)$  keine Fixgerade ist (7.8).

(3.17) Gibt es zu  $\alpha, \beta, P$  mit  $P \mid \alpha, \beta$  und  $\alpha\beta \neq \beta\alpha$  eine Erzeugende  $\xi$  mit  $P \mid \xi$  und  $\xi^\alpha, \xi^\beta \mid \xi$ , so sind  $\xi$  und  $P\xi$  die einzigen Fixerzeugenden von  $\alpha\beta$ .

**Beweis.** Es seien Erzeugende  $\alpha, \beta, \xi$  mit  $P \mid \alpha, \beta, \xi$ ,  $\alpha\beta \neq \beta\alpha$  und  $\xi^\alpha, \xi^\beta \mid \xi$  gegeben. Dann gilt  $P \mid \xi^\alpha, \xi^\beta$  sowie  $P = \xi\xi^\alpha = \xi\xi^\beta$  und folglich  $\xi^\alpha = \xi^\beta$  bzw.  $\xi^{\alpha\beta} = \xi$ . Also sind  $\xi$  und  $P\xi$  Fixerzeugende von  $\alpha\beta$ .

Angenommen, für  $\eta \neq \xi$ ,  $P\xi$  gilt ebenfalls  $\eta^{\alpha\beta} = \eta$ . Würde  $P \nmid \eta$  sein, so wäre  $\eta' = (\eta, P)$  Fixerzeugende von  $\alpha\beta$  und  $Q = \eta'\eta$  neben  $P$  ein weiterer Fixpunkt von  $\alpha\beta$ . Nach (2.23) wäre  $\alpha\beta$  eine Scherung, für die wir o. B. d. A.  $(\alpha) = (\beta)$  mit  $\alpha, \beta \mid P, Q$  nach (2.22) voraussetzen können. Wegen (3.11) müßte  $\alpha\beta\eta' \in \Gamma$  sein, und mit (3.14) würde  $\alpha\beta = \beta\alpha$  im Widerspruch zu einer Voraussetzung folgen, d. h., es gilt  $P \mid \eta$ .

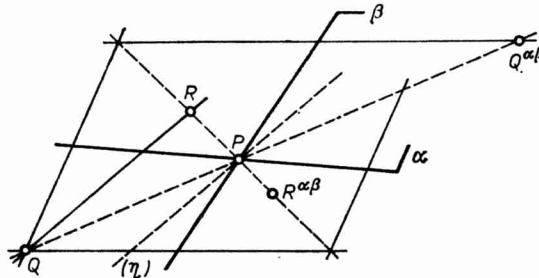


Abb. 9

Wir betrachten einen Punkt  $Q (\neq P)$  mit  $Q \mid \xi$ . Auf  $P\xi$  bestimmen wir einen Punkt  $R$ , so daß  $g_{QR} \parallel (\eta)$  gilt (Abb. 9). Es ist  $R \neq P$  bzw.  $R \nmid \xi$ , da o.B.d.A.  $(\eta) \neq (\xi)$  ist; ansonsten betrachte man  $P\eta$ .

Indirekt zeigen wir jetzt, daß  $g_{QR} \nparallel g_{QR}^{\alpha\beta}$  und damit  $\eta^{\alpha\beta} \neq \eta$  ist. Nach (3.5) gibt es Erzeugende  $\gamma, \delta$  mit  $P \mid \gamma$  und  $(Q^P)\gamma = R^{\alpha\beta}$  sowie  $P \mid \delta$  und  $(R^P)\delta = R^{\alpha\beta}$ . Wir erhalten

$$\begin{aligned} P^{P\gamma\delta\beta\alpha} &= P, \\ R^{P\gamma\delta\beta\alpha} &= R, \\ Q^{P\gamma\delta\beta\alpha} &= R^{P\gamma\beta\alpha} \in (\xi) \end{aligned}$$

und somit  $P\gamma\delta\beta\alpha = 1$  nach (3.6), speziell  $R^{P\gamma\beta\alpha} = Q$ .

Nach (2.13) und dem Parallelitätskriterium (2.16) gilt  $g_{QR} \parallel g_{QR}^P$ , und es ist dann weiter  $g_{QR}^P \parallel g_{QR}^{\alpha\beta}$  (nach Annahme) und  $g_{QR}^P \neq g_{QR}^{\alpha\beta}$ , da sonst  $\alpha\beta P = 1$  wegen (2.23) folgen würde. Da auch  $\alpha\beta \neq 1$  gilt, ist  $Q \neq Q^{\alpha\beta}$  oder  $R \neq R^{\alpha\beta}$ .

Mit  $R^{P\gamma} = Q^{\alpha\beta}$  folgt, daß  $(R^P Q^{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} Q^P)$  ein Parallelogramm ist. Es ist  $R^P Q^P = QR$ , so daß auch  $(QQ^{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} R)$  ein Parallelogramm wegen  $Q \neq Q^{\alpha\beta}$  oder  $R \neq R^{\alpha\beta}$  ist. Dies ist aber ein Widerspruch zu  $Q, Q^{\alpha\beta} \mid \xi$  und  $R, R^{\alpha\beta} \mid P\xi$ . ■

Die Sätze (3.8) und (3.17) ergeben zusammen

(3.18) Zu  $\alpha, \beta, \varphi$  und vier verschiedenen Punkten  $P, A, B, C$  mit  $P \mid \alpha, \beta, P \nmid \varphi$  und  $A, B, C \mid \varphi$  gibt es ein  $\gamma$  mit ( $\gamma \mid P, A$  oder  $\gamma \mid P, B$  oder  $\gamma \mid P, C$ ) und  $\alpha\beta\gamma \in \Gamma$ .

### 3.3. Die Frage nach der Zweispiegeligkeit

In (3.23) beweisen wir eine zu (3.6) entsprechende „Reduktionsaussage“ über gewisse Gruppenelemente in einer äquiaffinen Ebene  $(G, \Gamma)$ , die sich als Produkte einer ungeraden Anzahl von Erzeugenden darstellen lassen. Darauf aufbauend zeigt sich in (3.25), daß es neben den Erzeugenden und den Punkten in der Gruppe  $G$  keine weiteren involutorischen Elemente gibt. Damit läßt sich dann nachweisen, daß die Gruppe  $G$  nicht zweispiegelig ist, d. h., daß nicht jedes Element aus  $G$  als Produkt von zwei involutorischen Elementen darstellbar ist.

(3.23) Ist  $a$  ein Produkt einer ungeraden Anzahl von Erzeugenden und gibt es zwei verschiedene Fixpunkte  $P, Q$  von  $a$ , so gibt es eine Erzeugende  $\alpha$  mit  $a = \alpha$  und  $P, Q \mid \alpha$ .

Beweis. Wir wählen uns ein  $\beta$  mit  $\beta \mid P, Q$ . Nach (Rd) gibt es  $\varphi, \chi$  mit  $\alpha\beta = \varphi\chi$ , und nach (2.23) ist  $\varphi\chi$  eine Scherung. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $(\varphi) = (\chi)$ . Es gilt  $P, Q \mid \varphi, \chi, \beta$ , so daß  $(\varphi) = (\chi) = (\beta)$  ist. Nach (3.11) ist  $\varphi\chi\beta \in \Gamma$ , etwa  $\varphi\chi\beta = \alpha$ . Folglich gilt  $\alpha\beta = \varphi\chi = \alpha\beta$  bzw.  $a = \alpha$  und  $P, Q \mid \alpha$ . ■

(3.24) Ist  $\alpha\beta\gamma$  involutorisch, so gilt  $\alpha\beta\gamma \in \Gamma$ .

Beweis. Sind  $P, Q$  verschiedene Fixpunkte von  $\alpha\beta\gamma$ , so gilt  $\alpha\beta\gamma \in \Gamma$  nach (3.23). Es sei  $X^{\alpha\beta\gamma} \neq X$  für einen Punkt  $X$  und  $P = M(X, X^{\alpha\beta\gamma})$  der Mittelpunkt von  $X, X^{\alpha\beta\gamma}$ . Da  $\alpha\beta\gamma$  involutorisch ist, gilt  $\alpha\beta\gamma = \gamma\beta\alpha$ . Somit ist  $P^{\alpha\beta\gamma} = M(X^{\alpha\beta\gamma}, X) = P$ . Es gilt  $P^{\alpha\beta\gamma P} = P$  und  $X^{\alpha\beta\gamma P} = X$ . Wegen  $P \neq X$  gibt es nach (3.23) ein  $\delta$  mit  $\alpha\beta\gamma P = \delta$ . Weil  $\alpha\beta\gamma = \delta P$  involutorisch ist, gilt  $P \mid \delta$ . Nach (2.3) ist damit  $\alpha\beta\gamma = \delta P \in \Gamma$ . ■

Aus (Rd) und (3.24) folgt

(3.25) Jedes involutorische Gruppenelement ist ein Punkt oder eine Erzeugende.

Mit dieser Übersicht über alle involutorischen Elemente der Gruppe und mit Hilfe des Reduktionssatzes (Rd) läßt sich leicht zeigen, daß das Zentrum der Gruppe  $G$  nur aus dem Einselement besteht (dazu vgl. [1, S. 45]).

Es gilt aber (im Unterschied zu den Bewegungsgruppen ebener metrischer Geometrien)

(3.26) Die Gruppe  $G$  ist nicht zweispiegelig.

Beweis. Wir bestimmen Erzeugende  $\alpha, \beta, \gamma$  derart, daß  $\alpha\beta\gamma$  nicht als Produkt zweier involutorischer Elemente darstellbar ist. Nach (3.25) ist also zu zeigen, daß ein Produkt  $\alpha\beta\gamma$  existiert, zu welchem es keine Erzeugenden  $\varphi, \chi$  und keine Punkte  $P, Q$  mit  $\alpha\beta\gamma = \varphi\chi$  oder  $\alpha\beta\gamma = PQ$  oder  $\alpha\beta\gamma = P\varphi^1$  gibt.

<sup>1)</sup> Gibt es kein  $\varphi$  und kein  $P$  mit  $\alpha\beta\gamma = P\varphi$ , so gibt es trivialerweise auch kein  $\varphi'$  und kein  $P'$  mit  $\alpha\beta\gamma = \varphi'P'$ .

Zuerst zeigen wir, daß ein beliebiges Produkt  $\alpha\beta\gamma$  weder in der Form  $\varphi\chi$  noch in der Form  $PQ$  dargestellt werden kann. Angenommen, es gibt  $\varphi, \chi$  mit  $\alpha\beta\gamma = \varphi\chi$ . Dann gibt es nach (Rd) Erzeugende  $\alpha', \beta', \gamma'$  mit  $1 = \alpha\beta\gamma\chi\varphi = \alpha'\beta'\gamma'$  im Widerspruch zu  $(\sim P)$ . Gäbe es  $P, Q$  mit  $\alpha\beta\gamma = PQ$ , so würden auch hier nach (Rd) Erzeugende  $\alpha', \beta', \gamma'$  mit  $1 = \alpha\beta\gamma QP = \alpha'\beta'\gamma'$  im Widerspruch zu  $(\sim P)$  existieren.

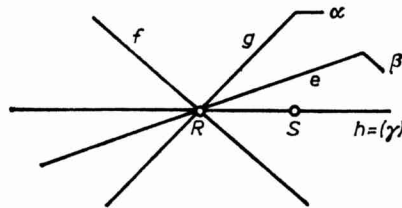


Abb. 10

Wir geben nun ein Produkt  $\alpha\beta\gamma$  an, für das es kein  $P$  und kein  $\varphi$  mit  $\alpha\beta\gamma = P\varphi$  gibt. Durch einen gegebenen Punkt  $R$  betrachten wir vier verschiedene Geraden  $e, f, g, h$ , deren Existenz durch (3.2) abgesichert ist. Wir definieren  $\alpha, \beta$  als Erzeugende mit  $(\alpha) = g$  und  $h \in [\alpha]$  bzw.  $(\beta) = e$  und  $f \in [\beta]$ . Danach ist  $\alpha\beta$  weder Scherung noch Punktspiegelscherung (Abb. 10).

Es sei  $S (\neq R) \in h$ . Nach (3.16) gibt es zu  $\alpha, \beta, R, S$  genau eine Erzeugende  $\gamma$  mit  $\gamma \mid R, S$  derart, daß entweder  $\alpha\beta\gamma \in \Gamma$  oder  $\gamma^a, \gamma^b \mid \gamma$  gilt.

Ist  $\gamma^a, \gamma^b \mid \gamma$ , so gilt  $\alpha\beta\gamma \notin \Gamma$ .

Im Fall  $\alpha\beta\gamma \in \Gamma$  betrachten wir das Produkt  $\alpha\beta\gamma'$  mit  $(\gamma') = (\gamma)$  und  $\gamma' \neq \gamma$ . Ein derartiges  $\gamma'$  existiert, da es nach (2.7) und (3.5) zu  $h = g_{RS}$  mindestens drei verschiedene Erzeugende mit der Achse  $h$  gibt. Nach (3.16) ist dann aber  $\alpha\beta\gamma' \notin \Gamma$ .

Es gibt also stets Erzeugende  $\alpha, \beta, \gamma$  mit  $R \mid \alpha, \beta, \gamma$  und  $\alpha\beta\gamma \notin \Gamma$ . Angenommen, zu einem solchen Produkt  $\alpha\beta\gamma$  gibt es  $\varphi, P$  mit  $\alpha\beta\gamma = P\varphi$ . Da  $R \mid \alpha, \beta, \gamma$  ist, gilt  $R^{\alpha\beta\gamma} = R = R^{P\varphi}$ . Daraus folgt  $R^\varphi = R^P$ , und wir erhalten  $P \mid \varphi$  nach (2.21). Folglich ist  $\alpha\beta\gamma = P\varphi \in \Gamma$  nach (2.3) im Widerspruch zu  $\alpha\beta\gamma \notin \Gamma$ . ■

Anhang. Wie in [11, S. 27] nachgewiesen wurde, kann ein Spezialfall des Satzes (3.23) zur Charakterisierung Papposscher Ebenen mit Fano-Axiom verwendet werden. In Desarguesschen Ebenen mit Fano-Axiom ist der affine Satz von PAPPUS-PASCAL der folgenden Aussage äquivalent:

*Hat das Produkt  $\alpha\beta\gamma$  von drei Schrägspiegelungen zwei verschiedene Fixpunkte, so ist  $\alpha\beta\gamma$  gleich einer Schrägspiegelung.*

#### 4. Äquiaffine Ebenen, elliptische, euklidische und hyperbolische Ebenen sowie Minkowskische Ebenen

Die Basis unserer Untersuchungen zur ebenen Spiegelungsgeometrie ist hier das in Abschnitt 2 angegebene Rumpf-Axiomensystem  $\mathfrak{R}$ , das durch die Grundannahme und die Axiome (1), (2), (3), (4'), (5) bestimmt ist. Wir erhalten durch Hinzunahme weiterer Axiome im Rahmen einer Gabelung eine neue axiomatische Beschreibung der äquiaffinen Ebenen sowie eine neue Charakterisierung bzw. Einordnung sowohl der elliptischen, euklidischen und hyperbolischen Bewegungsgruppen nach BACHMANN [1] als auch der Minkowskischen Ebenen nach WOLFF [12].

Aus dem Rumpf-Axiomensystem ist die Aussage über die Existenz einer Erzeugenden, die zwei gegebene Punkte verbindet, nicht ableitbar.

Im Hinblick auf das Studium der Minkowskischen Ebenen formulieren wir als Zusatzaxiom einen verallgemeinerten Dreispiegelungssatz, der nicht wie das Axiom (6) in Abschnitt 1 stets eine Verbindung zweier Punkte postuliert, sondern nur eine Einschränkung der Unverbindbarkeit enthält:

- (6) Zu Erzeugenden  $\alpha, \beta, \varphi$  und zu vier verschiedenen Punkten  $P, A, B, C$  mit  $P \mid \alpha, \beta, P \nmid \varphi$  und  $A, B, C \mid \varphi$  gibt es eine Erzeugende  $\gamma$  mit ( $\gamma \mid P, A$  oder  $\gamma \mid P, B$  oder  $\gamma \mid P, C$ ) und  $\alpha\beta\gamma \in \Gamma$  (verallgemeinerter Dreispiegelungssatz mit Einschränkung der Unverbindbarkeit).

#### 4.1. Das Scherungsaxiom (Se)

Im folgenden ergänzen wir das Rumpf-Axiomensystem  $\mathfrak{R}$  durch die Axiome (4), (6) und (7'); die Aussagen (4) und (7') wurden in Abschnitt 2 schon als Zusatzaxiome für  $\mathfrak{R}$  angegeben. Alle in Abschnitt 2 enthaltenen Sätze können wir hier verwenden. Das neu entstandene Axiomensystem  $\mathfrak{R}, (4), (6), (7')$  bezeichnen wir mit  $\mathfrak{R}'$ .

Wir gabeln nun das Axiomensystem  $\mathfrak{R}'$  mit dem Axiom (Se) (Existenz einer nicht-identischen Scherung) und seiner Negation ( $\sim$  Se).

In natürlicher Weise läßt sich dann eine weitere Gabelung einerseits bei  $\mathfrak{R}'$ , (Se) mit dem Axiom ( $\sim$  E) (Existenz unvertauschbarer Scherungen) und (E), andererseits bei  $\mathfrak{R}'$ , ( $\sim$  Se) mit dem Axiom (Ex) (Existenz der Verbindungsgeraden) und ( $\sim$  Ex) untersuchen. Im Anhang auf S. 56 wird in einem Graphen die Verwendung der Axiome für den Aufbau von ebenen Geometrien verdeutlicht.

Wir formulieren erste Zusatzaxiome:

- (Se) Es gibt Erzeugende  $\alpha, \beta$  mit  $\alpha \neq \beta$  und  $(\alpha) = (\beta)$ .  
 ( $\sim$  Se) Aus  $(\alpha) = (\beta)$  folgt  $\alpha = \beta$  für alle Erzeugende  $\alpha, \beta$ .  
 ( $\sim$  E) Es gibt Erzeugende  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  mit  $(\alpha) = (\beta), (\gamma) = (\delta)$  und  $\alpha\beta \cdot \gamma\delta \neq \gamma\delta \cdot \alpha\beta$ .  
 (E) Aus  $(\alpha) = (\beta)$  und  $(\gamma) = (\delta)$  folgt  $\alpha\beta \cdot \gamma\delta = \gamma\delta \cdot \alpha\beta$  für alle Erzeugende  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ .  
 (Ex) Zu Punkten  $P, Q$  gibt es eine Erzeugende  $\varphi$  mit  $P, Q \mid \varphi$ .  
 ( $\sim$  Ex) Es gibt Punkte  $P, Q$  mit  $P, Q \mid \varphi$  für keine Erzeugende  $\varphi$ .

Wir ziehen zunächst einige Folgerungen aus dem durch Hinzunahme des Scherungsaxioms (Se) erweiterten Axiomensystem  $\mathfrak{R}'$ . Vorbereitend beweisen wir eine Ergänzung zu (6), die allein wegen ( $\sim$  P) gilt.

- (4.1) Aus  $\alpha, \beta, \gamma \mid P$  und  $\alpha\beta\gamma = \delta$  folgt  $\delta \mid P$ .

Beweis. Mit den Voraussetzungen gilt  $\delta P = \alpha\beta\gamma P = P\alpha\beta\gamma = P\delta$ , so daß  $\delta \mid P$  nach ( $\sim$  P) folgt. ■

- (4.2) Wird das Axiomensystem  $\mathfrak{R}'$  um das Axiom (Se) erweitert, dann gibt es zu  $P, Q$  stets ein  $\varphi$  mit  $P, Q \mid \varphi$ , d. h., es gilt das Axiom (Ex).

Beweis. Nach dem Axiom (Se) gibt es  $\alpha, \beta$  mit  $(\alpha) = (\beta)$  und  $\alpha \neq \beta$ . Wegen (2.18) und (2.15) können wir  $P \mid \alpha, \beta$  voraussetzen sowie  $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$  mit  $Q \in (\bar{\alpha}) = (\bar{\beta})$  und  $\bar{\alpha} \parallel \alpha, \bar{\beta} \parallel \beta$  bestimmen (Abb. 11).

Es sei  $Q \nmid \alpha$ , ansonsten wäre mit  $P, Q \mid \alpha$  die Behauptung bewiesen. Wir setzen  $\alpha' = (\alpha, Q)$  und  $\beta'' = (\beta, Q)$  und erhalten  $\alpha'\alpha = A$  und  $\beta''\beta = B$  mit  $A \neq B$ , da  $\alpha\beta \neq 1$  ist. Gilt  $A = P$  oder  $B = P$ , so ist die gesuchte Erzeugende gefunden.

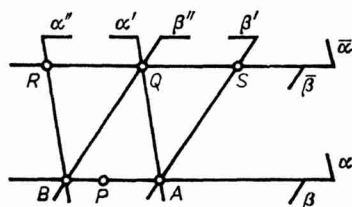


Abb. 11

Gilt  $A \neq P$  und  $B \neq P$ , so betrachten wir  $\alpha'' = (\alpha, B)$ ,  $\beta' = (\beta, A)$  und setzen  $\alpha''\bar{\alpha} = R$  und  $\beta'\bar{\beta} = S$ . Da  $\alpha\beta = \alpha'\beta' = \alpha''\beta'' \neq 1$  ist, erhalten wir  $R \neq Q$  und  $S \neq Q$ . Weiterhin gilt  $R \neq S$ , da sonst

$$\begin{aligned} QAB &= \bar{\alpha}\alpha' \cdot \alpha''\alpha \cdot \alpha\alpha'' = \bar{\alpha}\alpha'' = R \\ &= S = \bar{\beta}\beta' = \bar{\beta}\beta'' \cdot \beta''\beta \cdot \beta\beta' = QBA \end{aligned}$$

bzw.  $AB = BA$  mit  $A \neq B$  im Widerspruch zu  $(\sim P)$  gelten würde.

Nach (6) gibt es zu  $\alpha, \beta, P, Q, R, S$  ein  $\gamma$  mit  $(\gamma \mid P, Q$  oder  $\gamma \mid P, R$  oder  $\gamma \mid P, S)$  und  $\alpha\beta\gamma \in \Gamma$ .

Im Fall  $\gamma \mid P, Q$  sind wir fertig.

Gilt  $\gamma \mid P, R$ , so ist mit  $\alpha\beta\gamma \in \Gamma$  auch  $\beta\alpha\gamma \in \Gamma$ , etwa  $\beta\alpha\gamma = \delta$  mit  $P \mid \delta$  nach (4.1).

Es gilt  $\alpha\beta = \gamma\delta$  und  $R^\delta = R^{\beta\delta} = R^{\alpha\beta} = R^{\alpha''\beta''} = R^{\beta\beta''} = R^Q$ . Folglich ist  $Q \mid \delta$  nach (2.21) und somit  $P, Q \mid \delta$ .

Ist schließlich  $\gamma \mid P, S$ , so sei  $\alpha\beta\gamma = \delta$ , wobei  $P \mid \delta$  nach (4.1) ist. Mit  $\beta\alpha = \gamma\delta$  erhalten wir  $S^\delta = S^{\gamma\delta} = S^{\beta\alpha} = S^{\beta'\alpha'} = S^{\bar{\alpha}\alpha'} = S^Q$ , und es gilt nach (2.21) auch  $Q \mid \delta$ . ■

Aus dem Beweis von (4.2) ergibt sich sofort der folgende Zusatz:

(4.3) Ist  $\alpha\beta$  Scherung und  $P \mid \alpha, \beta$ , so gibt es zu jedem  $Q$  ein  $\gamma$  mit  $P, Q \mid \gamma$  und  $\alpha\beta\gamma \in \Gamma$ .

(4.4) Es sei  $(\alpha) = (\beta)$  und  $\alpha \neq \beta$ . Aus  $(\alpha) = (\beta) = (\gamma)$  oder  $(\alpha), (\beta) \in [\gamma]$  folgt  $\alpha\beta\gamma \in \Gamma$  und umgekehrt.

Beweis. a) Es sei  $(\alpha), (\beta) \in [\gamma]$ . Wir betrachten Punkte  $P, Q$  mit  $P \mid \alpha, \beta, \gamma$  und  $Q \neq P, Q \mid \gamma$ , die nach der Definition von Gerade und Fahne sowie wegen (2.6) existieren. Nach (4.3) gibt es zu  $P \mid \alpha, \beta$  und  $Q$  ein  $\gamma'$  mit  $\gamma' \mid P, Q$  und  $\alpha\beta\gamma' \in \Gamma$ . Zunächst gilt  $(\gamma') = (\gamma)$ . Es sei  $\alpha\beta\gamma' = \delta$ . Das Produkt  $\beta\alpha = \gamma'\delta$  ist eine nichtidentische Scherung, bei der  $(\alpha) = (\beta)$  nach (2.23) die punktweise feste Gerade ist. Nach dem Fixpunktlema (2.22) gibt es einen Punkt  $M$  mit  $M \mid \gamma', \delta$  und  $(M\gamma') = (M\delta) = (\alpha) = (\beta)$ , d. h.  $(\alpha), (\beta) \in [\gamma']$ . Somit gilt  $\gamma' = \gamma$  nach (2.7) und folglich  $\alpha\beta\gamma \in \Gamma$ .

Ist  $(\alpha) = (\beta) = (\gamma)$ , so betrachten wir einen Punkt  $P$  mit  $P \mid \alpha, \beta, \gamma$ . Mit der Erzeugenden  $P\gamma$  führen uns die eben gemachten Überlegungen zu  $\alpha\beta \cdot P\gamma \in \Gamma$ , und wir erhalten ebenfalls  $\alpha\beta\gamma \in \Gamma$ .

b) Zum Beweis des zweiten Teils gehen wir wie in [3, (7.3)] vor: Es sei  $\alpha\beta\gamma \in \Gamma$ . Nach (2.6) gibt es Punkte  $P, Q$  mit  $P \neq Q$  und  $\alpha, \beta \mid P, Q$ . Mit  $\alpha\beta\gamma = \delta$  gilt  $(P\gamma)^{\beta\alpha} = P^\delta = P^{\alpha\beta\gamma} = P^\gamma$  und  $(Q\gamma)^{\beta\alpha} = Q^\gamma$ , so daß wegen  $\alpha \neq \beta$  nach (2.23) sogar  $P^\gamma, Q^\gamma \mid \alpha, \beta$  ist. Falls  $(\alpha) = (\beta) \neq (\gamma)$  gilt, ist  $P^\gamma \neq P$  oder  $Q^\gamma \neq Q$ , etwa  $P^\gamma \neq P$ ; nach (2.9) gibt es ein  $\gamma'$  mit  $\gamma' \mid \gamma, P, P^\gamma$ , d. h.  $(\gamma') = (\alpha) = (\beta)$  bzw.  $(\alpha) = (\beta) \in [\gamma]$ . ■



Für  $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G})$  haben wir schon in Abschnitt 2 die Existenz nichtkollinearer Punkte, die Eindeutigkeit der Verbindungsgeraden sowie die Gültigkeit des euklidischen Parallelenaxioms und des Fano-Axioms nachgewiesen. Aus dem durch (Se) erweiterten Axiomensystem  $\mathfrak{R}'$  konnten wir in (4.2) die Existenz der Verbindungsgeraden zwei gegebener Punkte ableiten und erhalten damit den

(4.5) **Hauptsatz.** *Aus dem Axiomensystem  $\mathfrak{R}'$ , (Se) folgen für  $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G})$  die affinen Inzidenzaxiome und das Fano-Axiom.*

Wir bemerken auch hier nur, daß mit (2.17) unmittelbar die kleinen Sätze von DESARGUES und PAPPUS-PASCAL für  $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G})$  nachgewiesen werden können. Folglich ist  $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G})$  eine Translationsebene, in der wir neben der Eindeutigkeit (vgl. (2.21)) auch die Existenz eines Mittelpunktes zwei gegebener Punkte erhalten.

#### 4.2. Äquiaffine Ebenen

Wir untersuchen jetzt das System, welches aus dem Axiomensystem  $\mathfrak{R}'$  (Grundannahme, Axiome (1) bis (5), (6) und (7')) durch Erweiterung mit dem Scherungsaxiom (Se) und dem Axiom ( $\sim E$ ) (Existenz unvertauschbarer Scherungen) entsteht.

(4.6) Zu  $\alpha, \beta$  gibt es  $\varphi, \chi$  mit  $(\alpha) = (\varphi)$  und  $(\beta) = (\chi)$  derart, daß  $\varphi \mid \chi$  oder  $\varphi \parallel \chi$  gilt (Axiom (7), vgl. Abschnitt 1).

Der Beweis kann aus [3], Anhang zum Abschnitt 10, entnommen werden; er stützt sich auf ( $\sim E$ ), (2.15), (4.3) und (4.4).

(4.7) **Folgerung.** Zu Geraden  $g, h$  mit  $g \nparallel h$  gibt es eine Erzeugung  $\varphi$  mit  $g = (\varphi)$  und  $h \in [\varphi]$ . Sind  $A, B, C$  nichtkollineare Punkte, so gibt es ein  $\varphi$  mit  $A \mid \varphi$  und  $B^\varphi = C$ .

(4.8) Zu  $\alpha, \beta$  und zu  $P, Q$  mit  $P \mid \alpha, \beta$  gibt es ein  $\gamma$  mit  $P, Q \mid \gamma$  derart, daß  $\alpha\beta\gamma \in \Gamma$  oder  $\gamma^\alpha, \gamma^\beta \mid \gamma$  gilt (Axiom (6), vgl. Abschnitt 1).

**Beweis.** Es sei  $Q$  ein Punkt mit  $Q \nmid \alpha, \beta$ , was  $Q^\alpha \neq Q$  und  $Q^\beta \neq Q$  impliziert. Wir betrachten  $\alpha' = (\alpha, Q)$ . Gilt  $P \mid \alpha'$ , so genügt  $\gamma = \alpha'$  der Behauptung.

Es sei nun  $P \nmid \alpha'$ . Nach (2.6) gibt es weitere Punkte  $R, S$  mit  $R, S \mid \alpha'$  und  $R \neq S \neq Q \neq R$ . Zu  $\alpha, \beta$  und  $P, Q, R, S$  gibt es nach (6) ein  $\gamma$  mit  $(\gamma \mid P, Q$  oder  $\gamma \mid P, R$  oder  $\gamma \mid P, S)$  und  $\alpha\beta\gamma \in \Gamma$ . Ist  $\gamma \mid P, Q$ , so sind wir fertig.

Gibt es aber kein  $\gamma$  mit  $\gamma \mid P, Q$  und  $\alpha\beta\gamma \in \Gamma$ , so gilt auch, daß es kein  $\delta$  mit  $\delta \mid P, Q^\alpha$  und  $\alpha\beta\delta \in \Gamma$  gibt. Denn gäbe es ein derartiges  $\delta$ , so würde im Widerspruch zur Voraussetzung  $\alpha\beta\delta^\alpha = (\beta\alpha\delta)^\alpha \in \Gamma$  und  $P, Q \mid \delta^\alpha$  folgen. Ebenso gibt es dann kein  $\delta$  mit  $\delta \mid P, Q^\beta$  und  $\alpha\beta\delta \in \Gamma$ .

Nach (4.2) existieren  $\varphi, \chi$  mit  $\varphi \mid P, Q$  und  $\chi \mid P, Q^\alpha$ . Es ist  $Q^\beta \mid \chi$ . Andernfalls würde die Gerade  $g$  durch  $P$  und  $Q^\beta$  nach (7') mit  $(\alpha')$  einen von  $Q$  und  $Q^\alpha$  verschiedenen Punkt gemeinsam haben oder  $g \parallel (\alpha')$  sein. Im ersten Fall gäbe es nach (6) ein  $\chi'$  mit  $\chi' \mid P, Q^\beta$  und  $\alpha\beta\chi' \in \Gamma$ . Würde  $g \parallel (\alpha')$  gelten, dann wäre die  $\alpha$ -Konjugierte  $\alpha''$  durch  $P$  eine Verbindung von  $P$  und  $Q^\beta$  mit  $\alpha\beta\alpha'' \in \Gamma$ . Beides widerspricht der aus der Teilvoraussetzung gemachten Feststellung, daß es kein  $\delta$  mit  $\delta \mid P, Q^\beta$  und  $\alpha\beta\delta \in \Gamma$  gibt. Die Punkte  $P, Q, Q^\alpha$  sind nichtkollinear, so daß wir gemäß (4.7) ein  $\gamma$  durch  $(\varphi) = (\gamma)$  und  $(\chi) \in [\gamma]$  bestimmen können. Da jeder innere Automorphismus  $\mathfrak{G}$  auf  $\mathfrak{G}$  abbildet, erhalten wir mit (2.7) die Relation  $\gamma^\alpha, \gamma^\beta \mid \gamma$ . ■

In [3] wurde nachgewiesen, daß  $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G})$  bezüglich einer erzeugten Gruppe  $(G, \Gamma)$ , die der Grundannahme und den Axiomen (1) bis (5) sowie (4.6) und (4.8) genügt, eine Pappossche Ebene mit Fano-Axiom ist. — Das Paar  $(G, \Gamma)$  wurde als äquiaffine



Ebene bezeichnet. — Andererseits gelten die in unserer axiomatischen Charakterisierung der erzeugten Gruppe neu verwendeten Axiome  $(\delta)$ ,  $(Se)$  und  $(\sim E)$  in einer äquiaffinen Ebene. Zu  $(\delta)$  verweisen wir auf (3.18). Das Axiom  $(Se)$  erhält man unmittelbar aus (3.2) und (3.5). Die Aussage  $(\sim E)$  ist äquivalent mit der Aussage über die Existenz von zwei nichtidentischen Scherungen mit sich schneidenden punktweise festen Achsen (vgl. [3]); diese Existenz begründet man ebenfalls mit (3.2) und (3.5). Wir bemerken noch, daß  $(Se)$  aus  $(\sim E)$  folgt.

Unser Ergebnis lautet damit

**(4.9) Theorem.**  *$(G, \Gamma)$  ist genau dann eine äquiaffine Ebene, wenn die Grundannahme und die Axiome (1) bis (5),  $(\delta)$ ,  $(7')$  und  $(\sim E)$  gelten.*

Im Anschluß an den Hauptsatz (4.5) wollen wir nun hier für  $(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$  den affinen Satz von PAPPUS-PASCAL mit Hilfe der im gruppentheoretischen Kalkül gefolgerten Sätze ableiten. Nach (4.9) können wir uns dabei auch auf alle Ergebnisse der Abschnitte 2 und 3 stützen. Zusätzlich benötigen wir den Hilfssatz, daß aus  $g^a = g$  stets  $(\alpha) = g$  oder  $g \in [\alpha]$  folgt. Diese Aussage wird leicht mit (2.6) und (2.9) erschlossen (vgl. (7.1) in [3]).

Vorbereitend beweisen wir

**(4.10)** Ist  $\varphi$  Fixerzeugende von  $\alpha\beta$  und gilt  $\alpha\beta \neq \beta\alpha$  und  $\alpha, \beta \mid P$ , so ist  $\varphi \mid P$  und  $P\varphi$  eine Fixerzeugende von  $\alpha\beta$  (und es gibt keine weitere Fixerzeugende von  $\alpha\beta$ ). Es gilt weiterhin  $\varphi^a = \varphi^\beta = P\varphi$ , d. h.  $\varphi^a, \varphi^\beta \mid \varphi$ .

**Zusatz.** Dabei gilt für eine Erzeugende  $\gamma$

$$\alpha\beta\gamma \in \Gamma \Leftrightarrow \varphi^\gamma = P\varphi.$$

**Beweis.** Angenommen, es gilt  $P \nmid \varphi$ . Mit  $\varphi' = (\varphi, P)$  erhalten wir dann ebenfalls eine Fixerzeugende von  $\alpha\beta$ , und  $Q = \varphi\varphi'$  ist ein von  $P$  verschiedener weiterer Fixpunkt von  $\alpha\beta$ . Nach (2.23) ist  $\alpha\beta$  eine Scherung. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei  $(\alpha) = (\beta)$  mit  $\alpha, \beta \mid P, Q$  nach (2.22). Aus (4.4) ergibt sich, daß  $\alpha\beta\varphi' \in \Gamma$  ist. Da  $\varphi'^{a\beta} = \varphi'$  und  $\alpha\beta\varphi' \in \Gamma$  gilt, erhalten wir nach (3.14)  $\alpha = \beta$  oder  $\alpha \mid \beta$  bzw.  $\alpha\beta = \beta\alpha$  im Widerspruch zur Voraussetzung.

Da  $\varphi$  Fixerzeugende von  $\alpha\beta$  und  $\alpha, \beta \mid P$  ist, gilt trivialerweise  $(P\varphi)^{a\beta} = P\varphi$ .

Aus  $\varphi^{a\beta} = \varphi$  folgt  $\varphi^a = \varphi^\beta$ , und es gilt  $(\varphi^a)^{a\beta} = \varphi^\beta = \varphi^a$  sowie  $(\varphi^\beta)^{a\beta} = \varphi^\beta$ . Wäre  $\varphi^a = \varphi^\beta = \varphi$ , so würde  $(\varphi = \alpha$  oder  $\varphi \mid \alpha)$  und  $(\varphi = \beta$  oder  $\varphi \mid \beta)$  folgen. Mit  $\alpha, \beta, \varphi \mid P$  folgt daraus  $\alpha\beta = \beta\alpha$  — ein Widerspruch zur Voraussetzung. Es gilt also  $\varphi^a = \varphi^\beta \neq \varphi$ .

Wir nehmen nun an, daß auch  $\varphi^a = \varphi^\beta \neq P\varphi$  gilt. Auf Grund dieser Verschiedenheit erhalten wir mindestens drei verschiedene Fixgeraden  $g, h, k$  von  $\alpha\beta$  durch  $P$ . Es seien  $Q$  und  $R'$  zwei von  $P$  verschiedene Punkte mit  $Q \in g$  und  $R' \in h$ . Ist  $g_{QR'}$  parallel zu  $k$ , so betrachten wir einen von  $P$  und  $R'$  verschiedenen dritten Punkt  $R$  in  $h$ , der nach (2.6) existiert. Andernfalls sei  $R = R'$ . Wir erhalten eine Gerade  $g_{QR}$ , die einen Punkt  $S$  mit  $k$  gemeinsam hat und  $P$  nicht enthält. Es gilt  $Q \neq R \neq S \neq P$ . Zu  $\alpha, \beta, P, Q, R, S$  gibt es nach  $(\delta)$  ein  $\gamma$  mit  $(\gamma \mid P, Q$  oder  $\gamma \mid P, R$  oder  $\gamma \mid P, S)$  und  $\alpha\beta\gamma \in \Gamma$ . Es gilt also  $(\gamma^{a\beta}) = (\gamma)$  und  $\alpha\beta\gamma \in \Gamma$ . Daraus folgt nach (3.14), daß  $\alpha\beta$  Scherung oder Punktspiegelscherung ist. Als Scherung bzw. Punktspiegelscherung hat  $\alpha\beta$  mehr als eine Fixgerade durch  $P$ . Nach (2.24) folgt damit  $\alpha = \beta$  oder  $\alpha \mid \beta$ , was im Widerspruch zu  $\alpha\beta \neq \beta\alpha$  steht.

**Beweis des Zusatzes.** Es sei  $\alpha\beta\gamma = \delta$ . Aus  $\alpha, \beta \mid P$  folgt  $P^{a\beta} = P^{\delta\gamma} = P$ . Wäre  $\gamma \nmid P$ , so würde  $\delta\gamma = \alpha\beta$  nach (2.22) eine Scherung sein, die mit  $\varphi$  eine Fixerzeugende hat. Nach (2.24) müßte  $\alpha\beta = 1$  im Widerspruch zu  $\alpha\beta \neq \beta\alpha$  gelten.

Es ist  $\gamma \mid P$  sowie  $\delta \mid P$  nach (4.1). Da  $\varphi$  Fixerzeugende von  $\alpha\beta$  ist und  $\alpha\beta \neq \beta\alpha$  gilt, ist  $\varphi$  Fixerzeugende auch von  $\delta\gamma$  und  $\delta\gamma \neq \gamma\delta$ . Mit  $\gamma, \delta \mid P$  folgt aus dem Satz  $\varphi' = \varphi^\delta = P\varphi$ .

Nun sei  $\varphi' = P\varphi$ . Es gilt  $P\varphi' = (\varphi'\varphi)\varphi = \varphi\varphi' = P$  sowie  $\gamma \mid P$  nach  $(\sim P)$ . Zu  $\varphi$  bzw.  $P\varphi$  gibt es keine achsengleiche Erzeugende  $\varphi_1$  bzw.  $\varphi_2$  mit  $\alpha\beta\varphi_1, \alpha\beta\varphi_2 \in \Gamma$ . Wegen (3.14) wäre ansonsten  $\alpha\beta$  Scherung oder Punktspiegelscherung mit zwei verschiedenen Fixgeraden, und folglich wäre  $\alpha = \beta$  oder  $\alpha \mid \beta$  nach (2.24) im Widerspruch zu  $\alpha\beta \neq \beta\alpha$ .

Nach (6) gibt es also zu  $\alpha, \beta, \gamma$  eine Erzeugende  $\gamma'$  mit  $(\gamma') = (\gamma)$  und  $\alpha\beta\gamma' \in \Gamma$ . Mit  $\alpha\beta \neq \beta\alpha, \alpha, \beta, \gamma' \mid P$  und  $\alpha\beta\gamma' \in \Gamma$  sowie  $\varphi^{\alpha\beta} = \varphi$  schließen wir nach dem Satz (4.10) auf  $\varphi' = P\varphi$ . Die Scherung  $\gamma\gamma'$  läßt  $(\gamma)$  punktweise fest, und für einen von  $P$  verschiedenen Punkt  $Q$  mit  $Q \mid \varphi$  gilt  $Q, Q\varphi' \in (\varphi) \nmid (\gamma)$ . Damit ist  $\gamma\gamma' = 1$  nach (2.24) und folglich  $\alpha\beta\gamma \in \Gamma$ . ■

**(4.11) Hauptsatz.** Für  $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G})$  gilt der affine Satz von Pappos-Pascal.

Beweis. Es seien  $A_1B_2A_3B_1A_2B_3$  ein Sechseck und  $g, h$  Geraden mit dem Schnittpunkt  $O$  derart, daß  $A_1, A_2, A_3 \in g \setminus h, B_1, B_2, B_3 \in h \setminus g, g_{A_1B_2} \parallel g_{A_2B_1}$  und  $g_{A_2B_3} \parallel g_{A_3B_2}$  gilt (Abb. 12). Nach (4.7) gibt es Erzeugende  $\alpha, \beta, \gamma$  mit  $O \mid \alpha, \beta, \gamma$  und  $A_1^\alpha = B_2, A_2^\beta = B_3$  sowie  $A_3^\gamma = B_1$ . Es gibt weiterhin Erzeugende  $\gamma_1, \gamma_2$  mit  $(\gamma_1) = g, h \in [\gamma_1]$  und  $(\gamma_2) = h, g \in [\gamma_2]$ . Es gelten die Relationen  $\gamma_i^\alpha, \gamma_i^\beta, \gamma_i^\gamma \mid \gamma_i$  für  $i = 1, 2$ . Wir erhalten  $\gamma_i^\alpha\gamma_i = O = \gamma_i^\beta\gamma_i$  bzw.  $\gamma_i^\alpha = \gamma_i^\beta$  und folglich  $\gamma_i^{\alpha\beta} = \gamma_i$  für  $i = 1, 2$ .

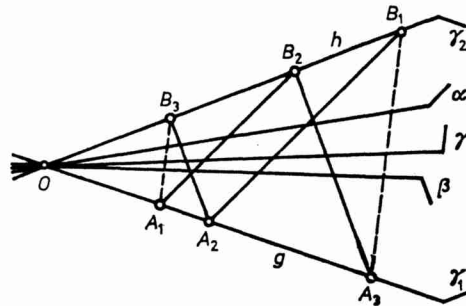


Abb. 12

Gilt  $\alpha\beta \neq \beta\alpha$ , so sind  $\gamma_1, \gamma_2$  nach (4.10) die einzigen Fixerzeugenden von  $\alpha\beta$ , und es gilt  $\gamma_1 = \gamma_2$ . Nach dem Zusatz in (4.10) folgt  $\alpha\beta\gamma \in \Gamma$ .

Gilt  $\alpha\beta = \beta\alpha$ , so ist  $\alpha = \beta$  oder  $\alpha \mid \beta$ , und wir erhalten ebenfalls  $\alpha\beta\gamma \in \Gamma$ .

Damit folgt aus  $A_1^{\alpha\beta\gamma} = B_1$  stets  $A_1 = B_1^{\alpha\beta\gamma} = B_3^\gamma$ . Es ist  $g_{A_1B_2}^\alpha = g_{A_1B_2}$ ; wegen  $g_{A_1B_2} \neq (\gamma)$  gilt  $g_{A_1B_2} \in [\gamma]$  und somit  $g_{A_1B_2} \parallel g_{A_1B_2}$ . ■

Der Reduktionssatz in der erzeugten Gruppe  $(G, \Gamma)$ , der in Abschnitt 3 zum Axiom erhoben wurde, kann an dieser Stelle mit spiegelungsgeometrischen Methoden auf der Basis unseres Axiomensystems abgeleitet werden. Dazu verweisen wir auf einen Gedankengang aus [8]. Die in (4.10) enthaltene Aussage, daß es zu Erzeugenden  $\alpha, \beta$  mit  $\alpha, \beta \mid P$  und  $\alpha\beta \neq \beta\alpha$  höchstens zwei Geraden  $g, h$  durch  $P$  mit  $g = (\gamma), h = (\delta), \gamma^\alpha, \gamma^\beta \mid \gamma$  und  $\delta^\alpha, \delta^\beta \mid \delta$  gibt, wurde dort unbewiesen verwendet.

**4.3. Elliptische, euklidische und hyperbolische Ebenen sowie Minkowskische Ebenen**

Wir setzen jetzt das Rumpf-Axiomensystem  $\mathfrak{R}$  (Grundannahme, (1), (2), (3), (4'), (5)) voraus und berichten über Untersuchungen aus [11].

Allein durch Hinzunahme des Axioms vom Polardreieck

(P) *Es gibt  $\alpha, \beta, \gamma$  mit  $\alpha\beta\gamma = 1$*

zum Rumpf-Axiomensystem werden schon die elliptischen Ebenen gekennzeichnet. Die Charakterisierung erfolgt hier gegenüber [3, (4.6)] ohne das Axiom (6); die in (6) enthaltene Möglichkeit der Verbindung zweier Punkte durch eine Erzeugende wird nicht benötigt (vgl. [11, (4.12)]).

Für die Charakterisierung der euklidischen, hyperbolischen und Minkowskischen Ebenen (nach BACHMANN und WOLFF) ziehen wir noch die folgenden Zusatzaxiome heran (vgl. [1, 12] und [11]):

(S<sub>P</sub>) *Aus  $\alpha, \beta, \gamma \mid P$  folgt  $\alpha\beta\gamma \in \Gamma$  für alle Erzeugende  $\alpha, \beta, \gamma$ .*

(~ 7') *Es gibt Erzeugende  $\alpha, \beta$  mit  $(\alpha) \cap (\beta) = \emptyset$  derart, daß für alle Erzeugende  $\varphi$  mit  $(\varphi) = (\alpha)$  stets  $\langle \varphi \rangle \cap \langle \beta \rangle = \emptyset$  gilt (Erzeugende  $\alpha, \beta$  bzw. dazugehörige Geraden  $(\alpha), (\beta)$  mit dieser Eigenschaft nennen wir auch unverbindbar).*

(H) *Gilt  $\alpha, \beta, \gamma \mid P$  und sind  $\alpha, \varphi$  und  $\beta, \varphi$  und  $\gamma, \varphi$  unverbindbar, so ist  $\alpha = \beta$  oder  $\beta = \gamma$  oder  $\gamma = \alpha$ .*

Bezüglich der Beweise für die folgenden Hauptsätze verweisen wir auf [11].

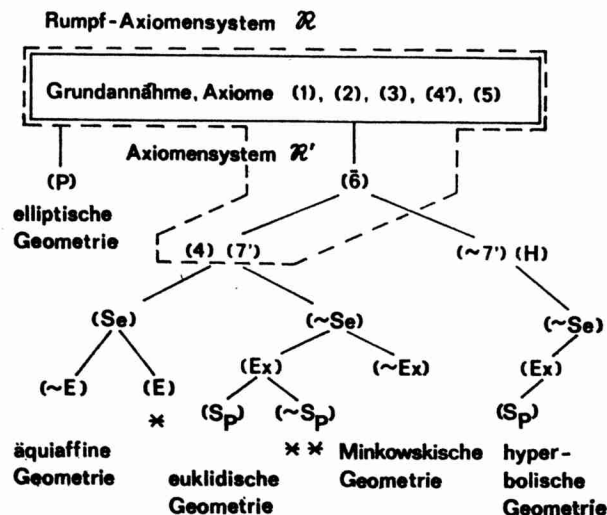
(4.12) Hauptsätze. a) *Ein Paar  $(G, \Gamma)$  ist genau dann eine euklidische Bewegungsgruppe, wenn die Grundannahme und die Axiome (1) bis (5), (7'), (~ Se), (Ex) und (S<sub>P</sub>) gelten.*

b) *Ein Paar  $(G, \Gamma)$  ist genau dann eine Bewegungsgruppe einer Minkowskischen Ebene, wenn die Grundannahme und die Axiome (1) bis (5), (6), (7'), (~ Se) und (~ Ex) gelten.*

c) *Das um Axiom (P) erweiterte Rumpf-Axiomensystem  $\mathfrak{R}$  kennzeichnet die elliptischen Bewegungsgruppen.*

d) *Wird das Rumpf-Axiomensystem  $\mathfrak{R}$  um die Axiome (~ Se), (Ex), (S<sub>P</sub>) und (~ 7'), (H) erweitert, so erhalten wir eine Charakterisierung der hyperbolischen Bewegungsgruppen.*

Anhang. Übersicht über den Aufbau der betrachteten Geometrien



Für die Axiomensysteme \* bzw. \*\* liegen als Modelle gewisse parabolische bzw. hyperbolische Untergruppen äquiaffiner Ebenen vor (vgl. [3, 4]).

## LITERATUR

- [1] BACHMANN, F.: Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff. Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1973.
- [2] KLOTZEK, B.: Äquiaffine Spiegelungsgeometrie. Dissertation, PH Potsdam 1965.
- [3] KLOTZEK, B.: Ebene äquiaffine Spiegelungsgeometrie. Math. Nachr. 55 (1973), 89—131.
- [4] KLOTZEK, B., und E. QUAISER: Büschel, Unterstrukturen und Orthogonalitätsrelationen in äquiaffinen Ebenen. Math. Nachr. 58 (1973), 337—371.
- [5] LENZ, H.: Grundlagen der Elementarmathematik, 3. Aufl. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin/Hanser Verlag, München 1975.
- [6] LENZ, H.: Vorlesungen über projektive Geometrie. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig 1965.
- [7] LINGENBERG, R.: Metrische Geometrie und  $S$ -Gruppen. Jahresber. DMV 69 (1966), 9—50.
- [8] OTTENBERG, R.: Der Reduktionssatz im gruppentheoretischen Aufbau einer äquiaffinen Geometrie. Staatsexamensarbeit, PH Potsdam 1967.
- [9] PICKERT, G.: Projektive Ebenen. Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1955.
- [10] SCHÜTTE, K.: Gruppentheoretisches Axiomensystem einer verallgemeinerten euklidischen Geometrie. Math. Ann. 132 (1956), 43—62.
- [11] WERNICKE, B.: Über einige gruppentheoretische Axiome im Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff. Dissertation, PH Potsdam 1976.
- [12] WOLFF, H.: Minkowskische und absolute Geometrie. Math. Ann. 171 (1967), 144—193.

Manuskripteingang: 5. 7. 1976

## VERFASSER:

BERND WERNICKE, Sektion Mathematik/Physik der Pädagogischen Hochschule „Karl Liebknecht“ Potsdam

