

## Werk

**Titel:** Bemerkung über deltoidnahe" und „ trapeznahe" asymmetrische Vierecke mit zwei ei...

**Autor:** K.; Richter, P.; KRÖTENHEERDT

**Jahr:** 1977

**PURL:** [https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?301416052\\_0006|log8](https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?301416052_0006|log8)

## Kontakt/Contact

[Digizeitschriften e.V.](#)  
SUB Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen

✉ [info@digizeitschriften.de](mailto:info@digizeitschriften.de)

## Bemerkung über „deltoidnahe“ und „trapeznahe“ asymmetrische Vierecke mit zwei einbeschriebenen Kreisen

OTTO KRÖTENHEERDT und PETER RICHTER

### 1. Problemstellung

Bei der Bestimmung flächenkleinster Vierecke, die zwei gegebene sich von außen berührende Kreise im Inneren enthalten, führten die Untersuchungen in [2], S. 180, auf sogenannte *trapeznahe* und *deltoidnahe* asymmetrische Vierecke. Die beiden gegebenen Kreise seien  $K_1$  mit dem Mittelpunkt  $M_1$  und dem Radius  $r_1$  und  $K_2$  mit dem Mittelpunkt  $M_2$  und dem Radius  $r_2$ ; o. B. d. A. sei  $r_1 \geq r_2$  vorausgesetzt. Mit Hilfssatz 3 in [2] konnte gezeigt werden:

Für jedes  $r_2$  aus dem Intervall  $q_1 \cdot r_1 < r_2 \leq q_3 \cdot r_1$  ( $q_1 \approx 0,414$ ,  $q_3 \approx 0,62$ ) und nur für diese aus der Menge aller möglichen  $r_2$ -Werte gibt es mindestens ein asymmetrisches Viereck derart, daß genau eine Vierecksseite auf einer gemeinsamen Tangente an  $K_1$  und  $K_2$  liegt, während eine der verbleibenden drei Seiten mit ihrem Mittelpunkt den Kreis  $K_2$  und jede der restlichen zwei Seiten mit ihrem Mittelpunkt den Kreis  $K_1$  berührt. Für jedes  $r_2$  aus  $q_1 \cdot r_1 < r_2 \leq q_2 \cdot r_1$  ( $q_2 \approx 0,592$ ) und für  $r_2 = q_3 \cdot r_1$  gibt es genau ein derartiges Viereck, und für jedes  $r_2$  aus  $q_2 \cdot r_1 < r_2 < q_3 \cdot r_1$  gibt es genau zwei derartige Vierecke, wenn man jeweils von einem spiegelbildlich zur Geraden durch  $M_1$  und  $M_2$  gelegenen Viereck absieht.

(Erläuterungen zu den Konstanten  $q_1$ ,  $q_2$  und  $q_3$  findet man in [2]).

Diejenigen asymmetrischen Vierecke des Intervalls  $q_1 \cdot r_1 < r_2 \leq q_3 \cdot r_1$ , die bei fallendem  $r_2$  stetig ineinander übergehen und im Grenzfall  $r_2 = q_1 \cdot r_1$  zu einem gleichschenkligen Trapez entarten, heißen *trapeznahe* asymmetrische Vierecke (vgl. Abb. 1, 2 und 4). Diejenigen asymmetrischen Vierecke des Intervalls  $q_2 \cdot r_1 < r_2 < q_3 \cdot r_1$ , die bei fallendem  $r_2$  stetig ineinander übergehen und im Grenzfall  $r_2 = q_2 \cdot r_1$  zu einem Deltoid entarten, heißen *deltoidnahe* asymmetrische Vierecke (vgl. Abb. 3 und 5).

Bei den durchgeführten Untersuchungen spielten eine Kurve  $s'_1$  und eine von  $r_2$  abhängige Kurvenschar  $s'_2(r_2)$  eine Rolle. Man denke sich dazu eine gemeinsame äußere Tangente  $g_1$  an  $K_1$  und  $K_2$  und auf  $g_1$  eine „positive“ Orientierung derart gegeben, daß beim positiven Durchlaufen von  $g_1$  erst die Berührung mit  $K_2$  und dann die Berührung mit  $K_1$  erfolgt. Die Kurve  $s'_1$  wurde erklärt als der geometrische Ort der Endpunkte all derjenigen Streckenzüge, die auf  $g_1$  „hinter“ dem Berührungspunkt mit  $K_1$  beginnen und die aus zwei Strecken bestehen, von denen die erste nicht auf  $g_1$  liegt und von denen jede mit ihrem Mittelpunkt  $K_1$  berührt. Für jedes  $r_2$  wurde eine Kurve  $s'_2(r_2)$  erklärt als der geometrische Ort der Endpunkte all der-

jenigen Strecken, die auf  $g_1$  „vor“ dem Berührungspunkt mit  $K_2$  beginnen, die nicht auf  $g_1$  liegen und die mit ihrem Mittelpunkt  $K_2$  berühren. Durch die positive Orientierung von  $g_1$  werden „positive“ Durchlaufrichtungen für  $s_1'$ , für die Kreislinien und für den Rand der zu betrachtenden Vierecke  $ABCD$ , deren Seite  $AB$  auf  $g_1$  liegen möge, induziert.

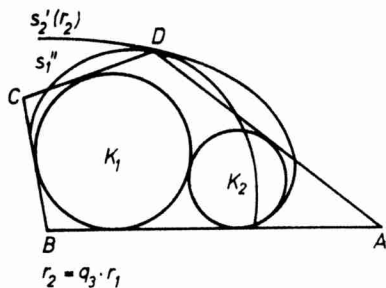


Abb. 1

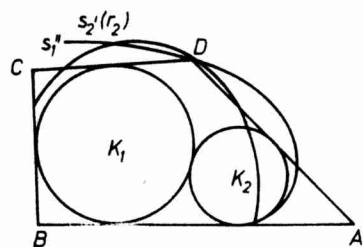


Abb. 2

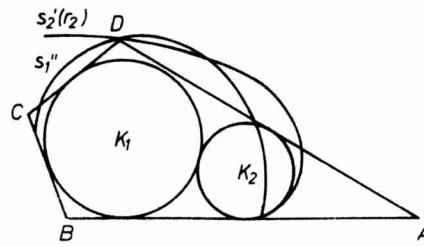


Abb. 3

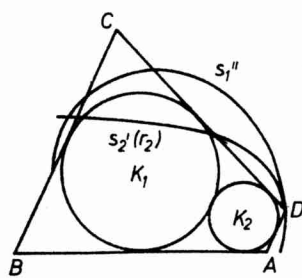


Abb. 4

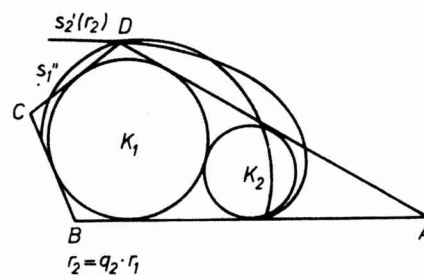


Abb. 5

In [2] wurde ein Prozeß beschrieben, mit dessen Hilfe die trapeznahen asymmetrischen Vierecke in flächenkleinere Vierecke, die aber auch noch  $K_1$  und  $K_2$  im Inneren enthalten, deformiert werden konnten. Ein entsprechender Sachverhalt für deltoidnahe asymmetrische Vierecke konnte bisher lediglich durch umfangreichere Rechnungen, die unveröffentlicht geblieben sind, bestätigt werden. Wir hatten gehofft,

allgemein beweisen zu können, daß bei speziellen Klassen axialsymmetrischer konvexer Bereiche (einschließlich der konvexen Hülle zweier sich von außen berührender Kreise) die flächenkleinsten unbeschriebenen Vierecke stets axialsymmetrische Vierecke sind (für beliebige axialsymmetrische konvexe Bereiche ist eine entsprechende Aussage falsch, wie man an Beispielen zeigen kann; eine entsprechende Aussage für zentralsymmetrische konvexe Bereiche ist in jedem Fall richtig, wie in [1], S. 159, gezeigt wird). Mit dem erhofften Beweis hätte für unseren speziellen geometrischen Sachverhalt leicht gefolgert werden können, daß die gesuchten flächenkleinsten Vierecke unter den Deltoiden oder unter den gleichschenkligen Trapezen zu finden sind; damit wäre eine Sonderbetrachtung der trapeznahen und der deltoidnahen asymmetrischen Vierecke überflüssig geworden. Da der erwähnte Beweis jedoch bisher nicht erbracht werden konnte, wollen wir im folgenden für trapeznahe und deltoidnahe asymmetrische Vierecke einen einheitlichen geometrischen Prozeß angeben, mit dessen Hilfe gezeigt werden kann, daß diese asymmetrischen Vierecke nicht als flächenkleinste Vierecke, welche  $K_1$  und  $K_2$  im Inneren enthalten, in Betracht kommen.

## 2. Eine flächentreue Abbildung

Zum Beweis der Sätze 1 und 2 in Abschnitt 3 verwenden wir eine flächentreue Abbildung, die wir *Spiegelung an den Berührungspunkten der rechtsseitigen Tangenten bezüglich eines festen Kreises  $K$*  nennen und die wir mit  $a_r(K)$  bezeichnen wollen.

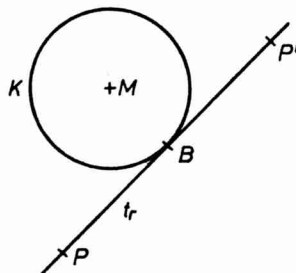


Abb. 6

Zur Definition dieser Abbildung denken wir uns einen festen Kreis  $K$  in der euklidischen Ebene  $\varepsilon$  gegeben.

Die Abbildung  $a_r(K)$  sei nun diejenige Abbildung von  $\varepsilon$  auf sich, die

- jeden Punkt von  $K$  und jeden Punkt innerhalb  $K$  festläßt und
- jeden Punkt  $P$  außerhalb  $K$  auf der „rechtsseitigen“ Tangente  $t_r$  von  $P$  an  $K$  in den Spiegelpunkt  $P'$  von  $P$  bezüglich des Berührungspunktes  $B$  von  $t_r$  mit  $K$  abbildet (vgl. Abb. 6).

(In entsprechender Weise wird eine „Spiegelung an den Berührungspunkten der linksseitigen Tangenten bezüglich eines festen Kreises  $K$ “ erklärt und mit  $a_l(K)$  bezeichnet. — Die Begriffe „rechtsseitig“ und „linksseitig“ unterliegen einer Willkür, sie können aber entsprechend dem üblichen Sprachgebrauch gewählt werden.)

Wir nennen nun einige Eigenschaften der Abbildung  $a_r(K)$ , die unmittelbar aus der Definition gefolgert werden können:

1. Die inverse Abbildung von  $a_r(K)$  ist  $a_l(K)$ .
2. Jeder zu  $K$  konzentrische Kreis  $K_1$  außerhalb  $K$  geht in sich über; er wird um den gemeinsamen Mittelpunkt  $M$  um einen Winkel der Größe  $2 \arccos \frac{a}{r_1}$  gedreht, wobei mit  $a$  der Radius von  $K$  und mit  $r_1$  der Radius von  $K_1$  bezeichnet sein möge.
3. Auf jedem beliebigen Kreis um  $M$  mit dem Radius  $r_1$  geht jeder Kreisbogen der Länge  $b(r_1)$  in einen Kreisbogen der Länge  $b'(r_1) = b(r_1)$  über (vgl. Abb. 7). (Der Kreis  $K$  und jeder Kreis um  $M$  im Inneren von  $K$  sind Fixpunktkreise.)

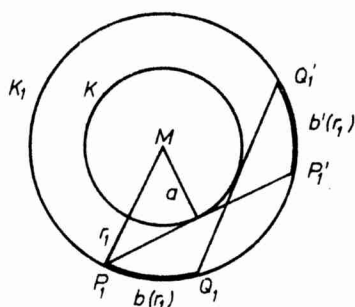


Abb. 7

4. Die Abbildung ist flächentreu; denn für jedes Flächenstück  $F$  und das zugehörige Bild  $F'$  ist bei Verwendung eines Polarkoordinatensystems mit dem Pol in  $M$

$$|F| = \int_{r_1}^{r_2} b(r) dr \quad \text{und} \quad |F'| = \int_{r_1}^{r_2} b'(r) dr$$

und somit wegen der Eigenschaft 3 schließlich

$$|F| = |F'|.$$

5. Läßt man den gegebenen Kreis  $K$  zu einem Punkt entarten — dieser Punkt sei  $M$  —, dann ist  $a_r(M) = a_l(M)$ , und diese Abbildung ist eine Punktspiegelung der Ebene  $\varepsilon$  an dem Spiegelungspunkt  $M$ , d. h. eine Drehung der Ebene  $\varepsilon$  um  $M$  um einen Winkel der Größe  $\pi$ .

Wenn wir uns beim Beweis der Sätze 1 und 2 in Abschnitt 3 auf die flächentreue Abbildung  $a_r(K)$  berufen, so beschränken wir diese Abbildung jeweils nur auf ein spezielles Flächenstück  $F$  und das zugehörige Bild  $F'$  und schließen daraus auf  $|F| = |F'|$ . Wir hätten selbstverständlich statt  $a_r(K)$  auch  $a_l(K)$  anwenden können; in diesem Fall hätten wir  $a_l(K)$  auf das Flächenstück  $F'$  und das zugehörige Bild  $F$  beschränken müssen.

### 3. Ergebnisse und Beweise

**Satz 1.** *Jedes trapeznahe asymmetrische Viereck besitzt einen größeren Flächeninhalt als jedes flächenkleinste Viereck, welches die gegebenen Kreise  $K_1$  und  $K_2$  im Inneren enthält.*

**Beweis.** Wir betrachten ein beliebiges trapeznahes asymmetrisches Viereck  $A_t B_t C_t D_t$  und das zum gleichen  $r_2$ -Wert gehörende gleichschenklige Trapez  $ABCD$  (vgl. Abb. 8). Außerdem denken wir uns die Kurven  $s'_1, s'_1, s'_2(r_2)$  und den Punkt  $E$  als den „zweiten“ Schnittpunkt der orientierten Kurve  $s'_1$  mit der Strecke  $CD$  gegeben;  $s'_1$  ist der geometrische Ort der Endpunkte all derjenigen Strecken, die auf  $g_1$  „hinter“ dem Berührungspunkt mit  $K_1$  beginnen, die nicht auf  $g_1$  liegen und die mit ihrem Mittelpunkt  $K_1$  berühren. Eine solche Konfiguration existiert für jedes  $r_2$  aus dem Intervall  $q_1 \cdot r_1 < r_2 \leq q_3 \cdot r_1$ .

Auf Grund der flächentreuen Abbildung  $a_r(K_2)$  ist

$$|A_t B_t C_t D_t| = |F_1|,$$

wenn man mit  $F_1$  das Flächenstück bezeichnet, welches von den Strecken  $AB_t, B_t C_t, C_t D_t$ , dem Bogen  $D_t D$  auf  $s'_2(r_2)$  und der Strecke  $DA$  begrenzt wird.

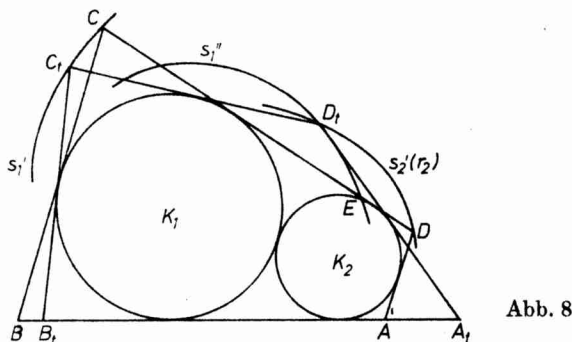


Abb. 8

Auf Grund der flächentreuen Abbildung  $a_r(K_1)$  ist

$$|F_1| = |F_2|,$$

wenn man mit  $F_2$  das Flächenstück bezeichnet, welches von den Strecken  $AB_t, B_t C_t$ , dem Bogen  $C_t C$  auf  $s'_1$ , der Strecke  $CE$ , dem Bogen  $ED_t$  auf  $s'_1$ , dem Bogen  $D_t D$  auf  $s'_2(r_2)$  und der Strecke  $DA$  begrenzt wird.

Ebenfalls auf Grund der flächentreuen Abbildung  $a_r(K_1)$  ist

$$|F_2| = |F_3|,$$

wenn man mit  $F_3$  das Flächenstück bezeichnet, welches von den Strecken  $AB, BC, CE$ , den Bögen  $ED_t$  auf  $s'_1$  und  $D_t D$  und  $s'_2(r_2)$  und von der Strecke  $DA$  begrenzt wird. Bezeichnet man mit  $F_4$  das Flächenstück, welches von den Bögen  $ED_t$  auf  $s'_1$  und  $D_t D$  auf  $s'_2(r_2)$  und von der Strecke  $DE$  begrenzt wird, so gilt

$$|F_3| = |ABCD| + |F_4|$$

und folglich

$$|A_t B_t C_t D_t| = |ABCD| = |F_4| > |ABCD|, \tag{1}$$

weil  $|F_4|$  für jedes  $r_2$  aus dem Intervall  $q_1 \cdot r_1 < r_2 \leq q_3 \cdot r_1$  einen Wert größer als Null besitzt (läßt man jedoch  $r_2$  gegen den Grenzwert  $q_1 \cdot r_1$  streben, so strebt  $|F_4|$  gegen Null, weil die Eckpunkte  $E, D_t, D$  des Flächenstücks  $F_4$  gegen einen gemeinsamen Grenzpunkt streben).

**Satz 2.** Jedes deltoidnahe asymmetrische Viereck besitzt einen größeren Flächeninhalt als jedes flächenkleinste Viereck, welches die gegebenen Kreise  $K_1$  und  $K_2$  im Inneren enthält.

**Beweis.** Wir betrachten ein beliebiges deltoidnahes asymmetrisches Viereck  $A_d B_d C_d D_d$  und das zum gleichen  $r_2$ -Wert gehörende gleichschenklige Trapez  $ABCD$  sowie das zugehörige trapeznahe asymmetrische Viereck  $A_t B_t C_t D_t$  (vgl. Abb. 9). Außerdem denken wir uns die Kurven  $s'_1, s'_2, s'_2(r_2)$  und den Punkt  $E$  als den „zweiten“ Schnittpunkt der orientierten Kurve  $s'_1$  mit der Strecke  $CD$  gegeben. Eine solche Konfiguration existiert für jedes  $r_2$  aus dem Intervall  $q_2 \cdot r_1 < r_2 < q_3 \cdot r_1$ . Das Flächenstück, welches von den Bögen  $D_d D_t$  auf  $s'_1$  und  $D_t D_d$  auf  $s'_2(r_2)$  begrenzt wird, spielt für den weiteren Beweisgang eine besondere Rolle; es sei mit  $F_5$  bezeichnet ( $|F_5|$  strebt gegen Null, wenn  $r_2$  gegen  $q_3 \cdot r_1$  strebt).

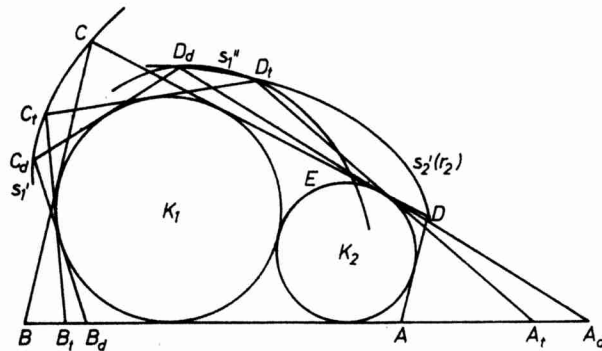


Abb. 9

Auf Grund der flächentreuen Abbildung  $a_r(K_2)$  ist

$$|A_d B_d C_d D_d| = |F_6|,$$

wenn man mit  $F_6$  das Flächenstück bezeichnet, welches von den Strecken  $A_t B_d$ ,  $B_d C_d$ ,  $C_d D_d$ , dem Bogen  $D_d D_t$  auf  $s'_2(r_2)$  und von der Strecke  $D_t A_t$  begrenzt wird.

Auf Grund der flächentreuen Abbildung  $a_r(K_1)$  ist

$$|F_6| + |F_5| = |F_7|,$$

wenn man mit  $F_7$  das Flächenstück bezeichnet, welches von den Strecken  $A_t B_d$ ,  $B_d C_d$ , dem Bogen  $C_d C_t$  auf  $s'_1$  und von den Strecken  $C_t D_t$ ,  $D_t A_t$  begrenzt wird.

Ebenfalls auf Grund der flächentreuen Abbildung  $a_r(K_1)$  ist

$$|F_7| = |A_t B_t C_t D_t|.$$

Somit gilt die Beziehung

$$|A_d B_d C_d D_d| + |F_5| = |A_t B_t C_t D_t|$$

und schließlich wegen (1)

$$|A_d B_d C_d D_d| + |F_5| = |ABCD| + |F_4|,$$

d. h.

$$|A_d B_d C_d D_d| - |ABCD| = |F_4| - |F_5|.$$

Somit bleibt noch zu zeigen, daß  $|F_4| - |F_5| > 0$  ist.

Dazu lassen wir zunächst in unserem betrachteten Intervall  $r_2$  bis  $q_2 \cdot r_1$  abfallen. Bei diesem Prozeß streben die deltoïdnahen asymmetrischen Vierecke gegen ein Deltoid  $A_d^* B_d^* C_d^* D_d^*$ , und für dieses gelten die obigen Flächenbetrachtungen ohne Einschränkungen; das dem Flächenstück  $F_4$  bzw. dem Flächenstück  $F_5$  entsprechende Flächenstück bezeichnen wir mit  $F_4^*$  bzw.  $F_5^*$ . Für das Deltoid  $A_d^* B_d^* C_d^* D_d^*$  gilt die in [2], S. 181, angegebene Flächenformel; sie liefert für den Flächeninhalt  $|A_d^* B_d^* C_d^* D_d^*|$  den Wert

$$r_1^2 \cdot \left( \frac{2\sqrt{r_1 \cdot r_2}}{r_1 - r_2} + 3 \tan \left( \frac{1}{3} \arctan \frac{2\sqrt{r_1 \cdot r_2}}{r_2 - r_1} \right) \right) \text{ mit } r_2 = q_2 \cdot r_1,$$

also den Wert

$$r_1^2 \cdot \left( \frac{2\sqrt{q_2}}{1 - q_2} + 3 \tan \left( \frac{1}{3} \arctan \frac{2\sqrt{q_2}}{q_2 - 1} \right) \right),$$

und für diesen gilt wegen  $0,592 < q_2 < 0,593$  schließlich

$$r_1^2 \cdot 5,8 < |A_d^* B_d^* C_d^* D_d^*|. \tag{2}$$

(Die arctan-Werte liegen entsprechend dem geometrischen Sachverhalt zwischen  $\frac{\pi}{2}$  und  $\pi$ .)

Für das gleichschenklige Trapez  $ABCD$ , welches zum gleichen  $r_2$ -Wert gehört, gilt die in [2], S. 182, angegebene Flächenformel; sie liefert für den Flächeninhalt  $|ABCD|$  den Wert

$$2 \frac{(r_1 + r_2) \cdot (r_1^2 + r_2^2)}{\sqrt{r_1 \cdot r_2}} \text{ mit } r_2 = q_2 \cdot r_1,$$

also den Wert

$$r_1^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{q_2}} \cdot (1 + q_2 + q_2^2 + q_2^3),$$

und für diesen gilt wegen  $0,592 < q_2 < 0,593$  schließlich

$$r_1^2 \cdot 5,7 > |ABCD|. \tag{3}$$

Aus (2) und (3) folgt, daß für den speziellen Wert  $r_2 = q_2 \cdot r_1$  die Differenz  $|F_4^*| - |F_5^*| > 0$  ist.

Wir betrachten nun für einen „geeigneten“  $r_2$ -Wert aus dem Intervall  $q_2 \cdot r_1 < r_2 < q_3 \cdot r_1$  das dazugehörige gleichschenklige Trapez  $ABCD$ , die Kurve  $s_2'(r_2)$ , den Punkt  $D_t$ , die Flächenstücke  $F_4, F_5$  und außerdem die Flächenstücke  $F_4^*, F_5^*$  und den Punkt  $D_t^*$ ;  $D_t^*$  sei der Eckpunkt des zu  $r_2 = q_2 \cdot r_1$  gehörenden trapeznahen asymmetrischen Vierecks, der sowohl zu  $F_4^*$  als auch zu  $F_5^*$  gehört. Die Gerade durch die Punkte  $C$  und  $D$ , wir bezeichnen sie mit  $g_2$ , teilt  $F_4^*$  in zwei Flächenstücke, von denen wir dasjenige Flächenstück mit  $F_4^{**}$  bezeichnen wollen, welches in der durch die Gerade  $g_2$  begrenzten Halbebene liegt, in der  $B$  nicht liegt. Als geeigneten  $r_2$ -Wert betrachten wir jeden Wert, für den

$$|F_4^{**}| \geq |F_5^*| \tag{4}$$

ist. Dies ist wegen  $|F_4^*| - |F_5^*| > 0$  stets möglich. Die Kurve  $s_2'(r_2)$  hat offenbar mit  $F_4^{**}$  keinen Punkt gemeinsam, und der Abstand des Punktes  $D_t$  von  $g_1$  ist größer als



der Abstand des Punktes  $D_1^*$  von  $g_1$ . Deshalb ist

$$|F_4| > |F_4^{**}|,$$

und wegen (4) gilt

$$|F_4| > |F_5^*|. \quad (5)$$

Offensichtlich ist aber auch

$$|F_5| < |F_5^*|. \quad (6)$$

Aus (5) und (6) folgt schließlich

$$|F_4| - |F_5| > 0.$$

Da nun  $|F_5|$  mit wachsendem  $r_2$  von  $q_2 \cdot r_1$  bis  $q_3 \cdot r_1$  monoton gegen Null strebt, andererseits der Abstand des Punktes  $D_1$  von  $g_1$  immer größer als  $2r_1$  ist, folgt somit, daß für jeden  $r_2$ -Wert im Intervall  $q_2 \cdot r_1 < r_2 < q_3 \cdot r_1$  die Differenz  $|F_4| - |F_5| > 0$  ist.

Damit ist gezeigt, daß jedes deltoidnahe asymmetrische Viereck  $A_d B_d C_d D_d$  einen größeren Flächeninhalt als das zum gleichen  $r_2$ -Wert gehörende gleichschenklige Trapez  $ABCD$  besitzt, und damit ist Satz 2 bewiesen.

#### LITERATUR

- [1] FEJES TÓTH, L.: Reguläre Figuren. Akadémiai Kiadó, Budapest / B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1965.  
 [2] KRÖTENHEERDT, O., C. MAMMITZSCH und P. RICHTER: Die flächenkleinsten Vierecke, die zwei gegebene, sich von außen berührende Kreise enthalten. Beiträge zur Algebra und Geometrie 3 (1974), 167–183.

Manuskripteingang: 30. 12. 1974

VERFASSER:

OTTO KRÖTENHEERDT und PETER RICHTER, Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle–Wittenberg