Werk

Titel: Zur Berechnung der Homologiegruppen der Quadriken

Autor: K.; Richter, P.; DRECHSLER, K.; KRÖTENHEERDT

Jahr: 1977

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?301416052_0006|log7

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Beiträge zur Algebra und Geometrie
6 (1977), 13–17

Zur Berechnung der Homologiegruppen der Quadriken

KONRAD DRECHSLER

Die Homologiegruppen der regulären Quadriken des komplexen projektiven Raumes sind von B. L. VAN DER WAERDEN [5] bestimmt worden. Die dabei verwendete Projektionsmethode hat O.-H. KELLER [4] verallgemeinert. Die Verallgemeinerung gestattet auch die Berechnung der Homologiegruppen der singularitätenbehafteten Quadriken, worauf in [4] nicht eingegangen wird. Hier soll ein anderer Weg zur Bestimmung der Homologiegruppen einer beliebigen Quadrik in stetiger Homologietheorie mit beliebiger Koeffizientengruppe eingeschlagen werden, der von den Eilenberg-Steenrod-Axiomen ausgeht[1]).

§ 1. Bekanntes

Wir betrachten die Homologie im Sinne von EILENBERG-STEENROD [2], S. 10.

1. Es gibt also für jedes Raumpaar (X, Y) eine exakte Homologiesequenz [2], Axiom 4,

$$\to H_r(Y) \xrightarrow{i_*} H_r(X) \xrightarrow{j_*} H_r(X, Y) \xrightarrow{\partial_*} H_{r-1}(Y) \to, \tag{1.1}$$

wobei i_* und j_* die durch die Inklusionen $i\colon Y \subset X$ und $j\colon (X, \emptyset) \subset (X, Y)$ induzierten Homomorphismen der Homologiegruppen und ∂_* der Randhomomorphismus sind.

2. Es seien A und B zwei Räume und i_{1_*}, i_{2_*}, j_{1_*} und j_{2_*} die zu den Inklusionen $i_1\colon A \cap B \subset A$, $i_2\colon A \cap B \subset B$, $j_1\colon A \subset A \cup B$ und $j_2\colon B \subset A \cup B$ gehörenden Homomorphismen; Ψ und Φ seien definiert durch $\Psi x = (i_{1_*}x, -i_{2_*}x)$ und $\Phi(y_1, y_2) = j_{1_*}y_1 + j_{2_*}y_2$ für $x \in H_r(A \cap B)$, $y_1 \in H_r(A)$ und $y_2 \in H_r(B)$. Dann ist die Mayer-Vietoris-Sequenz

$$\to H_r(A \cap B) \xrightarrow{\Psi} H_r(A) \oplus H_r(B) \xrightarrow{\Phi} H_r(A \cup B) \xrightarrow{\partial_*} H_{r-1}(A \cap B) \to \tag{1.2}$$

exakt.

3. Für stetige Homologie und kompakte Hausdorffräume folgt aus der Homöomorphie $X \setminus Y \xrightarrow{\sim} U \setminus V$ für alle r die Isomorphie [1]

$$H_r(X, Y) \cong H_r(U, V). \tag{1.3}$$

---

[1]) und der den Eindeutigkeitssatz und den Koeffizientensatz [3] nicht benötigt.

4. Die Homologiegruppen eines komplexen projektiven Raumes CP_n sind bei beliebiger Koeffizientengruppe G

$$H_r(CP_n) = \begin{cases} G & \text{für} \quad 0 \leqq r \leqq 2n \text{ und } r \text{ gerade}, \\ 0 & \text{für} \quad r \text{ sonst}. \end{cases} \tag{1.4}$$

Außerdem induziert die Einbettung $i\colon CP_{n-1} \subset CP_n$ für $r \neq 2n$ einen Isomorphismus i_* der Homologiegruppen (vgl. [6, 3][1]))

$$i_*\colon H_r(CP_{n-1}) \to H_r(CP_n). \tag{1.5}$$

§ 2. Die birationale Abbildung

Es sei Q_n^ϱ eine n-dimensionale Quadrik des $(n+1)$-dimensionalen projektiven Raumes CP_{n+1} über dem Körper der komplexen Zahlen. Ihre Gleichung sei

$$f = \sum_{i,k=0}^{n+1} a_{ik} x_i x_k = 0. \tag{2.1}$$

Die Matrix (a_{ik}) der Koeffizienten habe den Rang $\varrho > 2$. Das Koordinatensystem sei so gewählt, daß $X_0 = (0, \ldots, 0, 1)$ ein nichtsingulärer Punkt von Q_n^ϱ ist und die Tangentialhyperebene T in X_0 die Gleichung $x_n = 0$ hat. Dann hat (2.1) die Form

$$f = x_{n+1} x_n + q(x_0, \ldots, x_n). \tag{2.2}$$

Die Projektion der Quadrik aus X_0 auf die Hyperebene U_n mit der Gleichung $x_{n+1} = 0$ und den Koordinaten $(u_0, \ldots, u_n)$ wird beschrieben durch

$$\left.\begin{aligned} &x_i = u_i u_n \qquad \text{für } i = 0, \ldots, n \\ &\text{und} \\ &x_{n+1} = -q(u_0, \ldots, u_n). \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

Diese rationale Abbildung ist eineindeutig bis auf den Schnitt U_{n-1} der Tangentialhyperebene T mit U_n und den Schnitt Q_{n-1} der Tangentialhyperebene T mit Q_n^ϱ. U_{n-1} hat die Gleichung $u_n = 0$, und Q_{n-1} hat in T die Gleichung $q(x_0, \ldots, x_n, 0) = 0$. Q_{n-1} ist eine $(n-1)$-dimensionale Quadrik in T, deren Koeffizientenmatrix den Rang $\varrho - 2$ hat.
Die Projektion (2.3) ist ein Homöomorphismus

$$Q_n^\varrho \setminus Q_{n-1}^{\varrho-2} \simeq U_n \setminus U_{n-1}. \tag{2.4}$$

§ 3. Die Homologiegruppen

Satz 1. *Es seien G eine abelsche Gruppe, Q_n^ϱ eine n-dimensionale Quadrik des komplexen projektiven Raumes und ϱ der Rang ihrer Koeffizientenmatrix. Dann sind die Homologiegruppen*

$$H_r(Q_n^\varrho) = \begin{cases} G & \text{für} \quad 0 \leqq r \leqq 2n \text{ und } r \text{ gerade und } r \neq 2n - \varrho + 2, \\ G \oplus G & \text{für} \quad r = 2n - \varrho + 2 \text{ und } r \text{ gerade}, \\ 0 & \text{für} \quad r < 0 \text{ oder } r > 2n \text{ oder } r \text{ ungerade}. \end{cases} \tag{3.1}$$

[1]) In [3] wird dieses Ergebnis aus den Eilenberg-Steenrod-Axiomen abgeleitet.

Beweis. Aus der exakten Homologiesequenz

$$\to H_r(U_{n-1}) \xrightarrow{i_*} H_r(U_n) \to H_r(U_n, U_{n-1}) \to H_{r-1}(U_{n-1}) \to$$

folgt bei Beachtung von (1.4) und (1.5)

$$H_r(U_n, U_{n-1}) = \begin{cases} G & \text{für} \quad r = 2n, \\ 0 & \text{für} \quad r \neq 2n. \end{cases} \tag{3.2}$$

Nach (2.4) und (1.3) sind

$$H_r(Q_n, Q_{n-1}) \cong H_r(U_n, U_{n-1}) \quad \text{für alle } r. \tag{3.3}$$

Der Beweis wird nun durch vollständige Induktion in nach ungeraden und geraden ϱ gesonderten Induktionsketten geführt.
Q_n^1 sind projektive Räume, und der Satz ist nach (1.5) für alle n und $\varrho = 1$ richtig.
Zum Beweis des Satzes für $\varrho = 2$ beachten wir, daß Q_n^2 die Vereinigungsmenge zweier projektiver Räume CP_n, CP'_n ist, die sich in einem CP_{n-1} schneiden. Die Mayer-Vietoris-Sequenz (1.2) zerfällt hier in kurze exakte Sequenzen

$$0 \to H_r(CP_{n-1}) \xrightarrow{\Psi} H_r(CP_n) \oplus H_r(CP'_n) \xrightarrow{\Phi} H_r(Q_n^2) \to 0, \tag{3.4}$$

weil nach (1.4) und (1.5) i_{1_*} und i_{2_*} und damit auch Ψ für alle r Monomorphismen sind. Daraus folgt

$$H_r(Q_n^2) \cong \big(H_r(CP_n) \oplus H_r(CP'_n)\big)/\mathrm{im}\Psi.^1)$$

Für $r = 2n$ ist $\mathrm{im}\Psi = 0$ wegen (1.4). Für $r \neq 2n$ ist nach (1.5) i_{2_*} ein Isomorphismus und daher $H_r(Q_n^2) \cong H_r(CP_n)$. Mit (1.4) folgt also

$$H_r(Q_n^2) = \begin{cases} G & \text{für} \quad 0 \leqq r < 2n \text{ und } r \text{ gerade}, \\ G \oplus G & \text{für} \quad r = 2n, \\ 0 & \text{für} \quad r < 0 \text{ oder } r > 2n \text{ oder } r \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Dies ist die Behauptung des Satzes für $\varrho = 2$.
Zur Berechnung der Homologiegruppen von Q_n^ϱ bei $\varrho > 2$ benutzen wir die exakte Sequenz

$$\to H_r(Q_{n-1}^{\varrho-2}) \xrightarrow{i'_*} H_r(Q_n^\varrho) \to H_r(Q_n^\varrho, Q_{n-1}^{\varrho-2}) \to H_r(Q_{n-1}^{\varrho-2}) \to. \tag{3.5}$$

Da nach (3.2) und (3.3) $H_r(Q_n^\varrho, Q_{n-1}^{\varrho-2}) = 0$ für $r \neq 2n$ ist, folgt aus der Exaktheit von (3.5)

$$H_r(Q_n^\varrho) \cong H_r(Q_{n-1}^{\varrho-2}) \tag{3.6}$$

für $r \neq 2n$ und $r \neq 2n-1$.
Nach Induktionsvoraussetzung ergibt (3.6) die Behauptung des Satzes für $r \neq 2n$ und $r \neq 2n-1$. Da $H_{2n}(Q_{n-1}^{\varrho-2}) = 0$ und $H_{2n-1}(Q_{n-1}^{\varrho-2}) = 0$ nach Induktionsvoraussetzung, $H_{2n}(Q_n^\varrho, Q_{n-1}^{\varrho-2}) = G$ und $H_{2n-1}(Q_n^\varrho, Q_{n-1}^{\varrho-2}) = 0$ nach (3.2) und (3.3) sind, folgt aus der Exaktheit der Sequenz (3.5) $H_{2n}(Q_n^\varrho) = G$ und $H_{2n-1}(Q_n^\varrho) = 0$. Das ist bei $\varrho > 2$ die Aussage des Satzes für $r = 2n$ und $r = 2n-1$.

---

[1]) $\mathrm{im}\Psi$ = Bild von Ψ.

§ 4. Repräsentanten

Der hier angegebene Aufbau der Homologiegruppen aus den Axiomen hat zur Folge, daß Repräsentanten, will man sie betrachten, nachträglich definiert werden müssen. Es seien X ein topologischer Raum, $\mathbf{H}$ eine Homologietheorie nach EILENBERG-STEENROD [2], Y ein Unterraum von X, $e_*: H_r(Y) \to H_r(X)$ der durch die Einbettung $e: Y \subset X$ induzierte Homomorphismus der Homologiegruppen.

Definition 1. Y heißt *Repräsentant von* im e_* oder auch *Repräsentant von* $H_r(X)$ *in* $\mathbf{H}$, wenn $H_q(Y) = 0$ für $q > r$ und e_* nicht trivial sind.

Definition 2. Ein Repräsentant Y heißt *Basisrepräsentant von* im e_* oder *Basisrepräsentant von* $H_r(X)$ *in* $\mathbf{H}$, wenn im e_* direkter Summand von $H_r(X)$ ist.

Ob ein Raum Repräsentant einer Homologiegruppe ist, hängt von der Homologietheorie ab. So sind z. B. für die reelle projektive Ebene P_2 bei der Koeffizientengruppe Z der ganzen Zahlen jede Gerade P_1 Basisrepräsentant von $H_1(P_2)$ und P_2 kein Repräsentant für $H_2(P_2)$ und bei der Koeffizientengruppe $G = Z_2 = Z/2Z$ keine Gerade Repräsentant und P_2 Basisrepräsentant für $H_2(P_2)$ (vgl. [3]). Wir stellen uns die Aufgabe, in (1.4) und (3.1) für jeden Summanden G Basisrepräsentanten zu finden.

Satz 2. *Bei nichttrivialer Koeffizientengruppe G ist in jeder Homologietheorie jeder m-dimensionale Unterraum CP_m eines komplexen projektiven Raumes CP_n mit $0 \leqq m \leqq n$ ein Basisrepräsentant von $H_{2m}(CP_n) = G$.*

Dies folgt mit (1.4) durch mehrfache Anwendung von (1.5).

Satz 3. *Es sei Q_n^ϱ eine n-dimensionale komplexe projektive Quadrik vom Rang ϱ. In jeder Homologietheorie mit nichttrivialer Koeffizientengruppe G gibt es folgende Basisrepräsentanten:*
Für $2m < 2n - \varrho + 2$ ist jeder m-dimensionale lineare Unterraum CP_m von Q_n^ϱ und für $2m > 2n - \varrho + 2$ jede auf Q_n^ϱ gelegene m-dimensionale Quadrik $Q_m^{2(m-n)+\varrho}$ vom Rang $2(m-n)+\varrho$ Basisrepräsentant von $H_{2m}(Q_n^\varrho) = G$. Für $2m = 2n - \varrho + 2$ bilden zwei lineare Unterräume CP_m und CP'_m von Q_n^ϱ, die sich in einem $(n-1)$-dimensionalen Raum schneiden, ein Basisrepräsentantensystem von $H_{2m}(Q_n^\varrho) = G \oplus G$.

Beweis. Daß es auf Q_n^ϱ solche Räume gibt, sieht man, wenn man die in § 2 angegebene Projektion mehrmals anwendet und die zugehörige Folge von Quadriken gegebenenfalls durch projektive Räume ergänzt. Das ergibt

$$Q_n^\varrho \supset Q_{n-1}^{\varrho-2} \supset \begin{cases} \supset Q^1_{n-(\varrho-1)/2} = CP_{n-(\varrho-1)/2} \supset CP_{n-(\varrho-3)/2} \supset \cdots \\ \supset Q^2_{n-(\varrho-2)/2} = CP_{n-(\varrho-2)/2} \cup CP'_{n-(\varrho-2)/2} \supset CP_{n-(\varrho-2)/2} \supset \cdots, \end{cases} \tag{4.1}$$

wobei die obere Variante für ungerades und die untere für gerades ϱ gilt.
Durch geeignete Wahl des Koordinatensystems bei diesen Projektionen erfährt man außerdem, daß es immer eine Folge (4.1) gibt, die vorgegebene Mengen $Q_m^{2(m-n)+\varrho}$ bzw. CP_m enthält.

Man betrachte nun die zu (4.1) gehörende Folge der Homologiegruppen

$$H_{2m}(Q_n^\varrho) \xleftarrow{i'_*} H_{2m}(Q_{n-1}^{\varrho-2}) \xleftarrow{i'_*} \begin{matrix} \xleftarrow{i'_*} H_{2m}(Q^1_{n-(\varrho-1)/2}) \xleftarrow{i_*} H_{2m}(CP_{n-(\varrho-1)/2}) \xleftarrow{i_*} \\ \xleftarrow{i'_*} H_{2m}(Q^2_{n-(\varrho-2)/2}) \xleftarrow{j_{1*}} H_{2m}(CP_{n-(\varrho-2)/2}) \xleftarrow{i_*} . \end{matrix}$$

Die Abbildungen i'_* sind nach (3.6) und die i_* nach (1.5) von der Dimension m an Isomorphismen. Außerdem ist j_{1*} ein Monomorphismus. Dies erfährt man durch Betrachtung der exakten Mayer-Vietoris-Sequenz (3.4), wenn man bedenkt, daß i_{2*} monomorph ist. Die Monomorphismen i'_*, j_{1*} und i_*, von den Dimensionen m bis n zusammengefaßt, ergeben einen Monomorphismus

$$e_*\colon H_{2m}(Q_m^{2(m-n)+\varrho}) \to H_{2m}(Q_n^\varrho)$$

bzw.

$$e_*\colon H_{2m}(CP_m) \to H_{2m}(Q_n^\varrho).$$

Wegen (3.1) bzw. (1.4) sind dann im $e_* = G$ und außerdem $H_q(Q_m^{2(m-n)+\varrho}) = 0$ bzw. $H_q(CP_m) = 0$ für $q > 2m$. Damit ist der Satz 3 bewiesen.

LITERATUR

[1] Drechsler, K.: Homologiegruppen rationaler Varietäten. Math. Nachr. *46* (1970), 107–136.

[2] Eilenberg, S., and N. Steenrod: Foundations of Algebraic Topology. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1952.

[3] Hu, S.-T.: Homology Theory. Holden-Day, San Francisco 1966.

[4] Keller, O.-H.: Bestimmung der Homologiebasen durch Projektionen. Math. Nachr. *45* (1970), 296–306; Keller, O.-H.: Vorlesungen über algebraische Geometrie. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.G., Leipzig 1974.

[5] van der Waerden, B. L.: Zur algebraischen Geometrie, IV. Die Homologiezahlen der Quadriken und die Formeln von Halphen in der Liniengeometrie. Math. Ann. *109* (1933), 7–12.

[6] van der Waerden, B. L.: Topologische Begründung des Kalküls der abzählenden Geometrie. Math. Ann. *102* (1930), 337–362.

Manuskripteingang: 2. 12. 1974

VERFASSER:

Konrad Drechsler, Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle–Wittenberg