Beiträge zur Algebra und Geometrie
6 (1977), 7–11

Die Homologiegruppen der Umgebungsränder gewisser Kegelspitzen

Günther Schiemann

0. In einem projektiven Raum R_{n+1} der Dimension $n + 1$, $n \geqq 2$, über dem Körper der komplexen Zahlen sei

$$K_n^r =: R_0 V_{n-1}^r$$

ein Kegel mit der Spitze R_0 und der Basis V_{n-1}^r. Dabei ist V eine singularitätenfreie projektive algebraische Hyperfläche der Ordnung r in einer Hyperebene $R_n \subset R_{n+1}$; $R_0 \notin R_n$.

Es sei[1]) $u_{2n+2} \subset R_{n+1} \setminus R_n$ eine zur $(2n + 2)$-dimensionalen Vollkugel homöomorphe abgeschlossene Umgebung von R_0, v_{2n+1} sei der Rand von u. $w_{2n-1} =: K \cap v$ heiße „Umgebungsrand“ der Kegelspitze.

Wir beweisen den Satz (S):

Die Homologiegruppen von w sind[2])

bei geradem n:

$$H_\nu(w) \approx \begin{cases} Z & \text{für } \nu = 0 \text{ und } \nu = 2n - 1, \\ \bigoplus\limits_b Z & \text{für } \nu = n, \\ \bigoplus\limits_b Z \oplus Z_r & \text{für } \nu = n - 1, \\ 0 & \text{sonst;} \end{cases}$$

bei ungeradem n:

$$H_\nu(w) \approx \begin{cases} Z & \text{für } \nu = 0 \text{ und } \nu = 2n - 1, \\ \bigoplus\limits_{b-1} Z & \text{für } \nu = n \text{ und } \nu = n - 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bemerkung. Für $n = 2$ folgt (S) als Korollar aus der in [6] angegebenen Fundamentalgruppe. Für $r = 2$ und $n \geqq 2$ habe ich das Ergebnis vor Jahren gelesen, finde aber die Literaturstelle nicht wieder.

---

1) Punktmengen, die nicht algebraisch sind oder nicht als algebraisch vorausgesetzt werden, bezeichnen wir mit kleinen Buchstaben. Der Index bedeutet dann die topologische Dimension.

2) Es bedeuten Z eine freie zyklische Gruppe, Z_r eine zyklische Gruppe der Ordnung r und b die mittlere Bettische Zahl von V.

Beweis des Satzes (S).

1. Wir entnehmen zunächst die Homologiegruppen von V^r_{n-1} aus [3]:

$$H_\nu(V) \approx \begin{cases} \bigoplus\limits_b Z & \text{für } \nu = n-1, \\ H_\nu(R_{n-1}) & \text{sonst, [8],} \end{cases} \tag{1}$$

mit

$$b = \begin{cases} \sum\limits_{\sigma=1}^{n} (1-r)^\sigma & \text{für gerades } n, \\ 1 - \sum\limits_{\sigma=1}^{n} (1-r)^\sigma & \text{für ungerades } n. \end{cases}$$

2. Die Homologiegruppen von K lassen sich[1]) mit der in [5] beschriebenen Projektionsmethode errechnen. Zwar werden dort das „Projektionszentrum", der „Projektionsschirm" und das projizierte Gebilde als Mannigfaltigkeiten vorausgesetzt. Diese Voraussetzung wird aber nur außerhalb des Projektionsschirms benutzt. Betrachten wir daher V als „Zentrum" und R_0 als „Schirm" einer Projektion p,

$$p\colon K \setminus V \to R_0,$$

so können wir die Projektionsmethode auf K anwenden. Aus der „Hauptformel" in [5] erhalten wir

$$H_\nu(K) \approx H_\nu(R_0) \oplus H_{\nu-2}(V).$$

Die Verwendung von (1) liefert daraus

$$H_\nu(K) \approx \begin{cases} \bigoplus\limits_b Z & \text{für } \nu = n+1, \\ H_\nu(R_n) & \text{sonst.} \end{cases}$$

3. Für die Erzeugenden der $H_\nu(V)$, $\nu \neq n-1$, brauchen wir geeignete Repräsentanten, um die Homomorphismen der Mayer-Vietoris-Sequenz in Abschnitt 5 verfolgen zu können.
Es ist, siehe [7], keine Einschränkung, wenn wir V in der Hyperebene $x_{n+1} = 0$ vorgeben durch $x_0^r + \cdots + x_n^r = 0$.

3.1. Dann enthält V in den Dimensionen d lineare Räume R_d, wenn $0 \leqq d < \frac{n-1}{2}$ ist. Ein solcher ist z. B., mit $\varrho^r = -1$, gegeben durch $x_0 - \varrho x_1 = \cdots = x_{2d} - \varrho x_{2d+1} = 0$, $x_{2d+2} = \cdots = x_n = 0$. R_d repräsentiert eine Erzeugende von $H_{2d}(V) \approx Z$.
Wir nehmen das Gegenteil an: Es möge auf V die Homologie

$$R_d \sim m c_{2d} \tag{2}$$

gelten, wobei c eine Erzeugende von $H_{2d}(V)$ repräsentiert und $|m| \neq 1$ ist. Dann müßte (2) auch im Einbettungsraum R_n von V gelten. Das ist aber falsch, vgl. [8].

3.2. Erzeugende von $H_{2d}(V)$ mit $\frac{n-1}{2} < d \leqq n-2$ können repräsentiert werden durch ebene Schnitte $V_d^r =: V_{n-1}^r \cup R_{d+1}$ im R_n. Wir nehmen wieder das Gegenteil an:

---

[1]) Diesen Hinweis verdanke ich Herrn Doz. Dr. K. Drechsler.

Es möge auf V_{n-1}^r die Homologie

$$V_d \sim mc_{2d} \tag{3}$$

gelten, wobei c eine Erzeugende von $H_{2d}(V)$ repräsentiert und $|m| \neq 1$ ist. Wir legen den schneidenden R_{d+1} so, daß er einen $R_{n-1-d} \subset V_{n-1}^r$ in genau einem Punkt trifft. (Das ist keine Einschränkung; die Schnitte V_d sind auf V_{n-1} zueinander homolog, weil es die R_{d+1} im R_n sind.) Dann gilt für die Schnittzahl[1]):

$$(V_d^r \cdot R_{n-1-d}) = 1. \tag{4}$$

Andererseits gilt wegen (3), siehe z. B. [5],

$$(V_d \cdot R_{n-1-d}) = (mc_{2d} \cdot R_{n-1-d}) = m(c_{2d} \cdot R_{n-1-d}) \neq 1.$$

Das ist ein Widerspruch zu (4), (3) ist also falsch.

3.3. Über Erzeugende von $H_{n-1}(V)$ können wir nichts aussagen. Wir stellen nur fest, daß für ungerades n auf V_{n-1}^r lineare Räume $R_{\frac{n-1}{2}}$ liegen. Ein solcher ist z. B. gegeben durch

$$x_0 - \varrho x_1 = \cdots = x_{n-1} - \varrho x_n = 0.$$

4. Wir geben noch Repräsentanten an für Erzeugende der $H_\nu(K)$, $\nu \neq n+1$.

4.1. Zu jedem $R_d \subset V$, $0 \leqq d < \frac{n-1}{2}$, enthält K einen $R_{d+1} = R_0 R_d$, der eine Erzeugende von $H_{2d+2}(K) \approx Z$ repräsentiert. Das sieht man wie in 3.1.

4.2. Erzeugende von $H_{2d}(K)$ werden durch ebene Schnitte $V_d =: K \cap R_{d+1}$ im R_{n+1} repräsentiert, wenn $\frac{n+1}{2} < d \leqq n-1$ ist. Das sieht man wie in 3.2., wenn man nur den Schnitt nicht durch die Kegelspitze legt.

4.3. Über $H_{n+1}(K)$ können wir bei ungeradem n nur sagen, daß es Klassen gibt, die einen $R_{\frac{n+1}{2}}$ enthalten.

4.4. Man sieht leicht, daß (außer für $\nu = n-1$, n und $n+1$) die Repräsentanten der Erzeugenden von $H_\nu(V)$ und $H_\nu(K)$ identifiziert werden können.

5. Durch w wird K in zwei abgeschlossene Teilmengen, k_{2n} und k'_{2n}, zerlegt. k enthalte R_0 und k' enthalte V. Wir schreiben, siehe z. B. [2], die Mayer-Vietoris-Sequenz auf:

$$\cdots \to H_\nu(w) \xrightarrow{\Psi} H_\nu(k) \oplus H_\nu(k') \xrightarrow{\Phi} H_\nu(K) \xrightarrow{\Delta} H_{\nu-1}(w) \to \cdots. \tag{5}$$

Die Homomorphismen sind in [2], S. 39, definiert.

In (5) kennen wir zunächst die $H_\nu(K)$. Da k auf R_0 und k' auf V retrahierbar sind, kennen wir auch $H_\nu(k) \approx H_\nu(R_0)$, $H_\nu(k') \approx H_\nu(V)$ und folglich $H_\nu(k) \oplus H_\nu(k')$. Für $\nu \neq 0$ vereinfacht sich Φ damit zu einem Homomorphismus von $H_\nu(V)$ in $H_\nu(K)$. Wir betrachten nacheinander die Teilsequenzen, in die (5) zerfällt.

5.1. $\quad 0 \to H_0(w) \xrightarrow{\Psi} Z \oplus Z \xrightarrow{\Phi} Z \to 0.$

Aus der Exaktheit folgt $H_0(w) \approx Z$. Also ist w zusammenhängend.

---

[1]) Die Schnittzahl wird in [1] im euklidischen Raum definiert. Da V_{n-1}^r nichtsingulär ist, läßt sich diese Definition in naheliegender Weise auf Schnitte in V übertragen.

5.2. $$0 \to Z \xrightarrow{\Delta} H_{2n-1}(w) \to 0.$$

Aus der Exaktheit folgt $H_{2n-1}(w) \approx Z$. Also ist w orientierbar und irreduzibel.

5.3. Es sei $2 \leq \nu \leq n-2$, ν gerade.

$$0 \to H_\nu(w) \xrightarrow{\Psi} Z \xrightarrow{\Phi} Z \xrightarrow{\Delta} H_{\nu-1}(w) \to 0.$$

Wegen 4.4. ist Φ ein Isomorphismus. Aus der Exaktheit folgt im $\Psi = 0$ und ker $\Delta = Z$ und daher $H_\nu(w) \approx H_{\nu-1}(w) \approx 0$.

5.4. Es sei $n + 2 \leq \nu \leq 2n - 2$, ν gerade.

Wörtlich wie in 5.3. folgt $H_\nu(w) \approx H_{\nu-1}(w) \approx 0$.
Es fehlen noch bei geradem n: $H_{n-1}(w)$ und $H_n(w)$, bei ungeradem n: $H_{n-2}(w), \ldots, H_{n+1}(w)$.

5.5. *$H_n(w)$ und $H_{n-1}(w)$, n gerade*

$$0 \to \bigoplus_b Z \xrightarrow{\Delta} H_n(w) \xrightarrow{\Psi} Z \xrightarrow{\Phi} Z \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(w) \to \bigoplus_b Z \to 0.$$

Hier ist Φ kein Isomorphismus. Bezeichnen $[V^r_{n/2}]$ und $[R_{n/2}]$ erzeugende Klassen von $H_n(k) \oplus H_n(k') \approx H_n(V^r_{n-1}) \approx Z$ bzw. $H_n(K) \approx Z$, so ist $\Phi[V^r_{n/2}] = r[R_{n/2}]$. Aus der Exaktheit folgen dann

$$H_{n-1}(w) \approx \bigoplus_b Z \oplus Z_r \qquad \text{und} \qquad H_n(w) \approx \bigoplus_b Z.$$

5.6. *$H_{n-2}(w)$ und $H_{n-1}(w)$, n ungerade*

$$0 \to H_{n-1}(w) \xrightarrow{\Psi} \bigoplus_b Z \xrightarrow{\Phi} Z \xrightarrow{\Delta} H_{n-2}(w) \to 0.$$

Es gibt in $H_{n-1}(k) \oplus H_{n-1}(k') \approx H_{n-1}(V)$ Klassen, deren jede sich durch einen $R_{\frac{n-1}{2}}$ repräsentieren läßt. Es sei $\left[R'_{\frac{n-1}{2}}\right]$ eine von diesen, und $\left[R''_{\frac{n-1}{2}}\right]$ sei eine Erzeugende von $H_{n-1}(K) \approx Z$. Dann muß gelten: $\Phi[R'] = [R'']$. Also ist im $\Phi = Z$. Aus der Exaktheit folgt dann sowohl

$$\ker \Delta = Z, \qquad \text{also} \qquad H_{n-2}(w) \approx 0,$$

als auch

$$\text{im } \Psi = \bigoplus_{b-1} Z, \qquad \text{also} \qquad H_{n-1}(w) \approx \bigoplus_{b-1} Z.$$

5.7. *$H_n(w)$ und $H_{n+1}(w)$, n ungerade*

Eine Erörterung der entsprechenden Sequenz muß unterbleiben. Wir wissen über im Φ nicht genug. Dafür bemerken wir, daß w — als Kreisbündel über der (singularitätenfreien) Basis V — eine topologische Mannigfaltigkeit ist. Deshalb und wegen 5.1. und 5.2. gilt für w der Poincarésche Dualitätssatz, z. B. [4]. Dieser liefert mit den Ergebnissen von 5.3. und 5.4.

$$H_n(w) \approx \bigoplus_{b-1} Z \qquad \text{und} \qquad H_{n+1}(w) \approx 0.$$

LITERATUR

[1] ALEXANDROFF, P., und H. HOPF: Topologie. Springer, Berlin 1935.
[2] EILENBERG, S., and N. STEENROD: Foundations of Algebraic Topology. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1952.
[3] FÁRY, I.: Cohomologie des variétés algébriques. Ann. Math. *65* (1957), 21–73.
[4] FRANZ, W.: Topologie II, W. de Gruyter, Berlin 1965.
[5] KELLER, O.-H.: Bestimmung von Homologiegruppen durch Projektionen. Math. Nachr. *45* (1970), 295–306.
[6] REEVE, J. E.: A note on fractional intersection multiplicities. Rend. Circ. Mat. Palermo *7* (1958), 167–184.
[7] SCHIEMANN, G.: Zur Homöomorphie algebraischer Hyperflächen. Beiträge zur Algebra und Geometrie *4* (1975), 65–70.
[8] VAN DER WAERDEN, B. L.: Topologische Begründung des Kalküls der abzählenden Geometrie. Math. Ann. *102* (1929), 337–362.

Manuskripteingang: 30. 10. 1974

VERFASSER:

GÜNTHER SCHIEMANN, Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle–Wittenberg