

Werk

Titel: Ausbohrung von Rhomben

Autor: WEISSBACH, B.

Jahr: 1977

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?301416052_0006|log16

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

Ausbohrung von Rhomben

BERNULF WEISSBACH

1. Jeder Bereich der festen Breite b kann in einem Rhombus, dessen parallele Seiten den Abstand b besitzen, unter ständiger Berührung der Seiten gedreht werden. Da nun die Größe des Innenwinkels an einer Ecke eines Bereiches fester Breite den Wert $\frac{2\pi}{3}$ nicht unterschreiten kann, ist es, falls der betrachtete Rhombus an einer Ecke P_0 einen Winkel α mit $0 < \alpha < \frac{2\pi}{3}$ besitzt, unmöglich, daß P_0 zu einem dem Rhombus einbeschriebenen Bereich $\mathfrak{B}$ fester Breite gehört. Darum kann P_0 durch eine Stützgerade von $\mathfrak{B}$, die auf der durch diesen Eckpunkt gehenden Achse des Rhombus senkrecht steht, von $\mathfrak{B}$ getrennt werden, und für den Abstand dieser Stützgeraden von P_0 muß sich eine nur von α und der Breite b abhängige untere Schranke $S(\alpha)$ angeben lassen (Abb. 1).

Für $\alpha = \frac{\pi}{2}$, d. h., falls $\mathfrak{B}$ in einem Quadrat bewegt wird, ist diese Aufgabe bereits von FOCKE [2] behandelt worden. Dort wird allgemeiner jener in einem regelmäßigen n -Eck unter ständiger Berührung der Seiten drehbare Bereich angegeben, der dabei im hier beschriebenen Sinne den Ecken am nächsten kommt. Dabei wird eine von FOCKE auch zur Behandlung anderer Aufgabenstellungen ([3, 4]) erfolgreich genutzte Beschreibung der Randkurven derartiger Bereiche herangezogen. Überträgt man FOCKES Vorgehen auf die hier gestellte Aufgabe der besten Ausbohrung eines Rhombus durch einbeschriebene Bereiche fester Breite, so wird man (Einzelheiten können aus [2] entnommen werden) auf die Optimierungsaufgabe

$$\operatorname{Re} \int_{-\frac{1}{2}(\pi-\alpha)}^{\frac{1}{2}(\pi-\alpha)} w \left\{ \frac{1}{2}(\pi-\alpha) + \psi \right\} \sin \left\{ \frac{1}{2}(\pi-\alpha) + |\psi| \right\} d\psi = \operatorname{Min.}!$$

unter

$$\int_{-\pi/4}^{+\pi/4} w \left(\frac{\pi}{4} + \psi \right) e^{i\psi} d\psi = 0, \quad |\operatorname{Re} w| \leq \frac{b}{2}; \quad |\operatorname{Im} w| \leq \frac{b}{2},$$

mit stückweise stetigem $w(\psi)$, $0 < \psi < \pi/2$, geführt. (Der Krümmungsradius der zugehörigen Kurve fester Breite wird dann durch

$$\varrho(\varphi) = \operatorname{Re} \{w(\psi) e^{i\nu\pi/2}\} + \frac{b}{2}; \quad \varphi = \nu \frac{\pi}{2} + \psi, \quad \nu = 0, \dots, 3,$$

gegeben.)

Nur für $\alpha = \pi/2$ haben beide Integrale die gleichen Grenzen und nur dann tritt auch $w(\psi)$ in beiden Integranden mit dem gleichen Argument auf, so daß sich nur in diesem Fall wesentliche Vereinfachungen ergeben, wenn man die zuerst angeführte Nebenbedingung mit einem Lagrangeschen Multiplikator in die Optimierungsaufgabe einbezieht. Aus diesem Grunde wird dieser Weg nicht weiter verfolgt, umsomehr, da geometrische Betrachtungen zur Behandlung ausreichen.

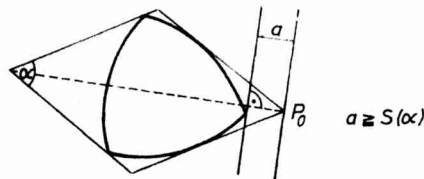
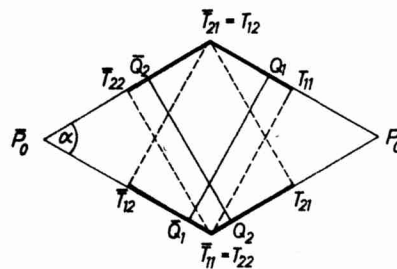


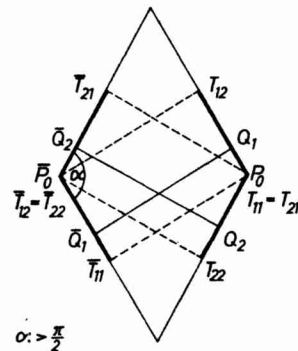
Abb. 1

2. Mit $\bar{P}_0$ soll die P_0 gegenüberliegende Ecke des betrachteten Rhombus bezeichnet werden. Die Berührungspunkte eines dem Rhombus einbeschriebenen Bereiches $\mathfrak{B}$ der festen Breite b mit den P_0 enthaltenden Seiten seien Q_1 bzw. Q_2 . Da zu jedem Randpunkt eines Bereiches fester Breite ein Gegenpunkt im Abstand der Breite gehört, kommen für die Lage von Q_1 bzw. Q_2 nur die Strecken $T_{11}T_{12}$ bzw. $T_{21}T_{22}$ in Frage. Auch die Gegenpunkte $\bar{Q}_1$ bzw. $\bar{Q}_2$ können nur auf den Strecken $\bar{T}_{11}\bar{T}_{12}$ bzw. $\bar{T}_{21}\bar{T}_{22}$ liegen (Abb. 2).



$$\alpha < \frac{\pi}{2}$$

Abb. 2



$$\alpha > \frac{\pi}{2}$$

Einschränkend ist weiter neben $|Q_1Q_2| \leq b$ und $|\bar{Q}_1\bar{Q}_2| \leq b$ auch $|Q_1\bar{Q}_2| \leq b$ und $|Q_2\bar{Q}_1| \leq b$ zu fordern. Sind die drei zuletzt genannten Ungleichungen neben $\bar{Q}_1 \in \bar{T}_{11}\bar{T}_{12}$ und $\bar{Q}_2 \in \bar{T}_{21}\bar{T}_{22}$ erfüllt, so soll von einem zulässigen Paar $(\bar{Q}_1, \bar{Q}_2)$ von Gegenpunkten gesprochen werden. Es gilt dann:

Lemma 1. Ist $(\bar{Q}_1, \bar{Q}_2)$ ein zulässiges Paar von Gegenpunkten mit $|\bar{Q}_1\bar{Q}_2| < b$, so gibt es für $0 < \alpha \leq 2\pi/3$ stets ein zulässiges Paar $(\bar{Q}_1^*, \bar{Q}_2^*)$ von Gegenpunkten mit

$$|\bar{P}_0\bar{Q}_1| \leq |\bar{P}_0\bar{Q}_1^*|, \quad |\bar{P}_0\bar{Q}_2| \leq |\bar{P}_0\bar{Q}_2^*| \quad \text{und} \quad |\bar{Q}_1^*\bar{Q}_2^*| = b.$$

Zum Beweis sei zunächst bemerkt: Für $0 < \alpha \leq 2\pi/3$ gibt es Punkte $\bar{S}_1 \in \bar{T}_{11}\bar{T}_{12}$, $\bar{S}_2 \in \bar{T}_{21}\bar{T}_{22}$ mit $|\bar{S}_1\bar{S}_2| = b$ und $\bar{S}_1\bar{S}_2 \perp P_0\bar{P}_0$. $(\bar{S}_1, \bar{S}_2)$ bilden ein zulässiges Paar, denn es ist, wenn sie die Gegenpunkte von S_1 bzw. S_2 sind,

$$|S_1\bar{S}_2| = |S_2\bar{S}_1| = 2b \sin \frac{\alpha}{4} \leq b.$$

Folglich gilt Lemma 1 sicher, wenn $|\bar{P}_0\bar{Q}_1| \leq |\bar{P}_0\bar{S}_1|$ und $|\bar{P}_0\bar{Q}_2| \leq |\bar{P}_0\bar{S}_2|$ ausfällt, denn dann braucht nur $(\bar{Q}_1^*, \bar{Q}_2^*) = (\bar{S}_1, \bar{S}_2)$ gesetzt zu werden. Ist hingegen $|\bar{P}_0\bar{Q}_1| > |\bar{P}_0\bar{S}_1|$ (und es genügt diesen Fall zu betrachten) so muß, da $|\bar{Q}_1\bar{Q}_2| < b$ vorausgesetzt wird, $|\bar{P}_0\bar{Q}_2| < |\bar{P}_0\bar{S}_2|$ gelten.

Setzt man $\bar{Q}_1 = \bar{Q}_1^*$, so gibt es in $\bar{T}_{21}\bar{T}_{22}$ einen Punkt $\bar{Q}_2^*$ mit $|\bar{Q}_1^*\bar{Q}_2^*| = b$, $|\bar{P}_0\bar{Q}_2| < |\bar{P}_0\bar{Q}_2^*|$, und das Paar $(\bar{Q}_1^*, \bar{Q}_2^*)$ ist zulässig (Abb. 3).

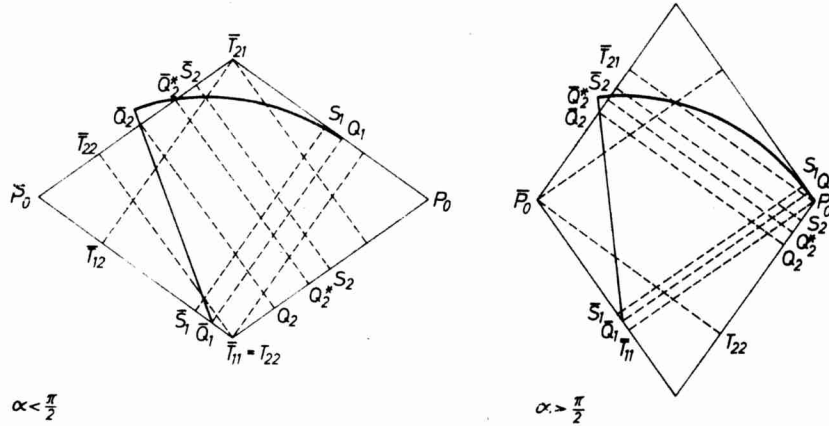


Abb. 3

In beiden zu betrachtenden Fällen ist $\angle \bar{Q}_2\bar{T}_{21}Q_1 \geq \pi/2$ und folglich wegen $|\bar{Q}_2\bar{T}_{21}| > |\bar{Q}_2^*\bar{T}_{21}|$ auch

$$b \geq |\bar{Q}_2Q_1| > |\bar{Q}_2^*Q_1| = |\bar{Q}_2^*Q_1^*|.$$

Genauso folgt aus $\angle \bar{S}_1\bar{T}_{11}S_2 \geq \pi/2$ zunächst $b \geq |\bar{S}_1S_2| > |\bar{Q}_1S_2|$ und aus $\angle S_2T_{22}\bar{Q}_1 \geq \pi/2$ die Ungleichung

$$|\bar{Q}_1S_2| > |\bar{Q}_1Q_2^*| = |\bar{Q}_1^*Q_2^*|,$$

woraus sich $|\bar{Q}_1^*Q_2^*| < b$ ergibt. Damit ist Lemma 1 vollständig bewiesen. Weiter werde bereitgestellt:

Lemma 2. Ist $(\bar{Q}_1^*, \bar{Q}_2^*)$ ein zulässiges Paar von Gegenpunkten mit $|\bar{Q}_1^*\bar{Q}_2^*| = b$, so gibt es für $0 < \alpha < 2\pi/3$ stets ein dem Rhombus einbeschriebenes Reuleaux-Dreieck $\Re$, das $\bar{Q}_1^*$ und $\bar{Q}_2^*$ als Ecken hat. Die zur Achse $P_0\bar{P}_0$ senkrechte Stützgerade von $\Re$, die P_0 von $\Re$ trennt, geht durch die dritte Ecke $\bar{Q}_3^*$.

Zum Beweis werde Abb. 4 betrachtet.

Wegen $|\bar{Q}_2^*Q_1^*| \leq b$ und $|\bar{Q}_1^*Q_2^*| \leq b$ haben die Kreise $\Re(\bar{Q}_2^*, b)$ und $\Re(\bar{Q}_1^*, b)$ einen Schnittpunkt $\bar{Q}_3^*$ im Viereck $Q_0^*Q_1^*Q_2^*P_0$. Die Bögen $\widehat{Q_1^*Q_3^*}$ und $\widehat{Q_2^*Q_3^*}$ dieser Kreise

liegen im Rhombus. Da $\angle \bar{Q}_3^* \bar{Q}_2^* \bar{P}_0 \geq \pi/2$ und $\angle \bar{Q}_3^* \bar{Q}_1^* \bar{P}_0 \geq \pi/2$ ist, liegt auch der Bogen $\widehat{\bar{Q}_1^* \bar{Q}_2^*}$ des Kreises $\mathfrak{K}(\bar{Q}_3^*, b)$ ganz im Rhombus. Die drei Bögen $\widehat{\bar{Q}_i^* \bar{Q}_k^*}$ begrenzen ein Reuleaux-Dreieck $\mathfrak{R}$. Da nun eine zu $P_0 \bar{P}_0$ senkrechte Stützgerade von $\mathfrak{R}$, die $\mathfrak{R}$ von $\bar{P}_0$ trennt, einen Punkt des Bogens $\widehat{\bar{Q}_1^* \bar{Q}_2^*}$ enthalten muß, kann die parallele Stützgerade nur durch $\bar{Q}_3^*$ gehen.

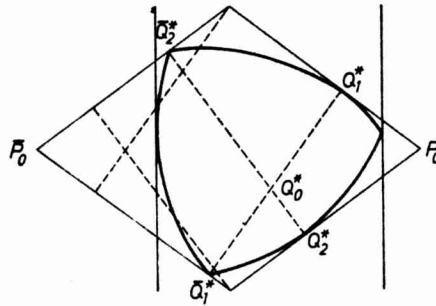


Abb. 4

Nach diesen Vorbereitungen fällt es nicht mehr schwer, die Frage der besten Ausbohrung des gegebenen Rhombus zu behandeln. Neben den Berührungspunkten Q_1, Q_2 bzw. $\bar{Q}_1$ und $\bar{Q}_2$ eines beliebigen einbeschriebenen Bereiches $\mathfrak{B}$ fester Breite betrachte man die Berührungspunkte $Q_1, Q_2^*, \bar{Q}_1^*$ und $\bar{Q}_2^*$ des nach obigen Vorgehen bestimmten Reuleaux-Dreiecks $\mathfrak{R}$ (Abb. 5). (Für $|\bar{Q}_1 \bar{Q}_2| = b$ fallen sie mit den gegebenen Punkten zusammen.)

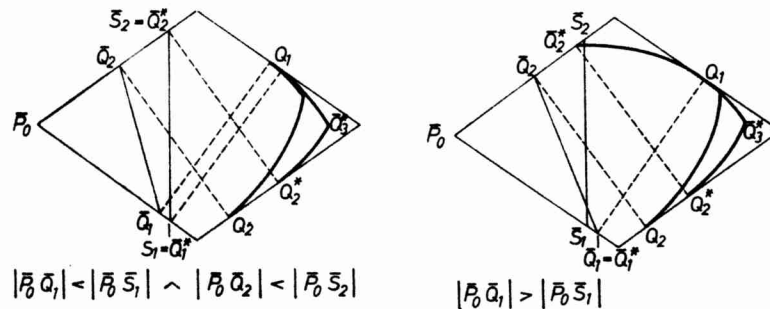


Abb. 5

$\mathfrak{B}$ ist im Durchschnitt der Kreise $\mathfrak{K}(\bar{Q}_1, b)$ und $\mathfrak{K}(\bar{Q}_2, b)$ enthalten. Eine $\mathfrak{B}$ von P_0 trennende und zu $P_0 \bar{P}_0$ senkrechte Stützgerade hat folglich von P_0 keinen kleineren Abstand als eine entsprechende Stützgerade dieses Durchschnitts, die nur durch einen Punkt von $\widehat{\bar{Q}_1 \bar{Q}_2} \cup \widehat{\bar{Q}_1^* \bar{Q}_2^*}$ gehen kann. Wie man sofort erkennt, kann sie dann von P_0 erst recht keinen kleineren Abstand als die entsprechende Stützgerade des Reuleaux-Dreiecks mit den Ecken $\bar{Q}_i^*$ haben. Da nach Lemma 2 diese Stützgerade durch $\bar{Q}_3^*$ geht, genügt es, die möglichen Lagen dieses Punktes zu betrachten und es ergibt sich zusammenfassend:

Die beste Ausbohrung eines beliebigen Rhombus durch einbeschriebene Bereiche fester Breite im eingangs genannten Sinne wird stets durch das Reuleaux-Dreieck

geleistet. Für $0 < \alpha \leq 2\pi/3$ ist

$$S(\alpha) = \frac{b}{\sin \frac{\alpha}{2}} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \right\} = b \frac{1 - \sin \frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right)}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

3. Obwohl die vorangegangenen Betrachtungen ganz der Ebene verhaftet sind, lassen sie doch eine gewisse Anwendung auf eine räumliche Aufgabe zu. Es ist bekannt, daß jede beschränkte Menge des Raumes vom Durchmesser b (und es genügt, Körper fester Breite b zu betrachten) durch ein regelmäßiges Achteck überdeckt werden kann, dessen parallele Seiten den Abstand b haben. Von diesem Achteck lassen sich noch durch Schnittebenen senkrecht zu den Achsen im Abstand $b/2$ vom Mittelpunkt drei an einer Seite anliegende Ecken abtrennen. Den verbleibenden Deckel hat GRÜNBAUM [5] zum Beweis der Borsukschen Vermutung im R^3 genutzt. Ein besserer Lebesguescher Deckel für Punktmengen des Raumes, d. h. eine Menge kleineren Inhalts als die genannten, mit der dennoch jede Menge vom Durchmesser b nach Bewegung überdeckt werden kann, ist bisher nicht bekannt. Betrachtet man den Beweis, der das Achteck als Deckel ausweist, genauer (man vergleiche [1] oder [6]), so sieht man, daß dem Versuch, bessere Deckel anzugeben, zunächst offenbar topologische Schwierigkeiten entgegenstehen, denn von den Freiheitsgraden der Drehgruppe des Raumes wird dort nur ein einziger zu Stetigkeitsbetrachtungen genutzt.

Bevor diese grundlegenden Schwierigkeiten nicht überwunden sind, erscheint es statthaft, von dem bekannten von GRÜNBAUM genutzten Deckel auszugehen und ihn (wenn auch nur unzureichend) zu verbessern. Dies ist nun durchaus möglich. Projiziert man einen Körper fester Breite b überdeckendes regelmäßiges Achteck vom Seitenabstand b auf eine zu einer Kante senkrechte Ebene, so liegen alle Bildpunkte in einem Rhombus vom Seitenabstand b . Zwei Gegenecken des Achtecks werden umkehrbar auf Gegenecken des Rhombus abgebildet, und für den Innenwinkel α an diesen Rhombusecken erhält man

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{und} \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Da der Körper fester Breite sich auf einen dem Rhombus einbeschriebenen Bereich fester Breite abbildet, können die Ergebnisse des vorangegangenen Abschnitts zur Anwendung kommen. Es ergibt sich

$$S(\alpha) = \frac{b}{2} (\sqrt{3} - \sqrt{2}),$$

und durch Schnitte, die in diesem Abstand von den Ecken und senkrecht zu den Achsen geführt werden, kann auch aus dem Achteck D_1 bzw. aus dem oben genannten Deckel D_2 ein verbesserter Deckel D_3 gewonnen werden. Für die Inhalte hat man

$$V(D_1) = b^3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866b^3,$$

$$V(D_2) = b^3 \cdot \left(\frac{5}{2} - \sqrt{3} \right) \approx 0,768b^3,$$

$$V(D_3) = b^3 \cdot \left(\frac{5}{2} + \frac{11}{4} \sqrt{2} - \frac{13}{4} \sqrt{3} \right) \approx 0,760b^3.$$

Eine geringfügige Verbesserung wäre noch möglich, da auch die Kanten, soweit sie schon dem Achteck angehören, „entgratet“ werden können und weil statt ebener Schnitte, wie ebenfalls aus Abschnitt 2 hervorgeht, elliptische Zylinder als Schnittflächen genutzt werden können.

LITERATUR

- [1] BOLTJANSKI, W. G., und I. Z. GOCHBERG: Sätze und Probleme der kombinatorischen Geometrie. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1972 (Übersetzung aus dem Russischen).
- [2] FOCKE, J.: Die beste Ausbohrung eines regulären n -Ecks. ZAMM 49 (1969), 235—248.
- [3] FOCKE, J.: Symmetrische n -Orbiformen kleinsten Inhalts. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 20 (1969), 39—68.
- [4] FOCKE, J., und B. GENSEL: n -Orbiformen maximaler Randknickung. Beiträge zur Analysis 2 (1971), 7—16.
- [5] GRÜNBAUM, B.: A simple proof of Borsuk's conjecture in three dimensions. Proc. Cambridge Philos. Soc. 53 (1957), 776—778.
- [6] MESCHKOWSKI, H.: Ungelöste und unlösbare Probleme der Geometrie. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1960.

Manuskripteingang: 13. 1. 1976

VERFASSER:

BERNULF WEISSBACH, Sektion Mathematik der Technischen Hochschule Magdeburg