

Werk

Titel: Bemerkungen zur Modellierung der (klassischen) elliptischen Ebene

Autor: LIEBOLD, G.

Jahr: 1977

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?301416052_0006|log15

Kontakt/Contact

[Digizeitschriften e.V.](#)
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

Bemerkungen zur Modellierung der (klassischen) elliptischen Ebene

GERHARD LIEBOLD

Dem projektiven und dem konformen Modell der elliptischen Ebene wird als Analogon zu einem von D. GANS angegebenen Hyperbelmodell der hyperbolischen Ebene ein E -Modell an die Seite gestellt, in dem gewisse Halbellipsen als Modellgeraden fungieren und das einen Zugang zur elliptischen Geometrie mittels Darstellender Geometrie ermöglicht (Abschnitt 1). Es werden die Lösung einiger Grundaufgaben, die differentialgeometrische Beschreibung und der Aufbau der Bewegungen aus Spiegelungen kurz dargestellt (Abschnitt 2); etwas näher werden die Entfernungskreise bzw. Abstandslinien in diesen Modellen betrachtet (Abschnitt 3). Insbesondere wird der Begriff der verallgemeinerten Abstandslinie als Ort von Punkten konstanten Abstandsverhältnisses k von einem nichtpolaren Punkt-Geraden-System eingeführt. Darstellung und Eigenschaften der sich im Fall $k = 1$ ergebenden p -Kurven werden untersucht. Für den Fall $k \neq 1$ werden Näherungskonstruktionen angegeben (Abschnitt 4). Weiter wird ein aus dem Bündelmodell der projektiven Ebene entwickeltes V -Modell der elliptischen Ebene beschrieben, das die Dualität der elliptischen Ebene besonders gut widerspiegelt und einen Zugang zur elliptischen Geometrie mittels der Theorie der linearen Vektorräume ermöglicht (Abschnitt 5).

1. Unter einer (klassischen) elliptischen Ebene im Sinne von F. KLEIN werde der Faktorraum Φ/G verstanden, der aus dem zweidimensionalen sphärischen Raum Φ durch Identifizierung antipodischer Punkte hervorgeht: Zwei Punkte aus Φ stehen in der Relation G genau dann, wenn sie antipodisch oder aber miteinander identisch sind. Φ/G ist ein metrischer Raum sowie ein Riemannscher Raum konstanter positiver Krümmung.

Ein *projektives* (π -)Modell dieser elliptischen Ebene entsteht durch Projektion der in einen dreidimensionalen euklidischen Raum eingebetteten und der Gegenpunktidentifizierung unterworfenen Kugel aus ihrem Mittelpunkt in eine beliebige, nicht durch diesen Mittelpunkt gehende und projektiv erweiterte Ebene dieses Raumes. Das Modell ist die elliptische Entsprechung zum Beltramischen Sehnenmodell der hyperbolischen Ebene, dem sogenannten Klein-Cayley-Modell.

Ein *konformes* (k -)Modell der elliptischen Ebene entsteht durch Projektion der in einen dreidimensionalen euklidischen Raum eingebetteten Kugel aus einem ihrer Punkte in eine zum Durchmesser dieses Projektionszentrums orthogonale, nicht mit diesem Zentrum inzidierende und konform erweiterte Ebene; dabei sind die Bilder

antipodischer Punkte zu identifizieren. Das Modell ist die elliptische Entsprechung zum Kleinschen Konformmodell der hyperbolischen Ebene.

DAVID GANS [1] gab 1966 ein Modell der hyperbolischen Ebene an, in dem gewisse Hyperbeläste die Rolle von Modellgeraden spielen. Er konstruiert zu diesem Zweck eine Abbildung T der euklidischen Ebene auf das Innere des Einheitskreises, wobei die Urbilder der Sehnen gewisse Hyperbeläste sind. Nach Einbettung in den dreidimensionalen Raum kann gezeigt werden, daß sich T als Produkt einer Zentralprojektion ζ der Ebene aus $Z(0; 0; 1)$ auf die untere Halbkugel der reellen Einheitsphäre um Z und einer Parallelprojektion π , die diese Halbkugel unter Ausschluß ihres Randes orthogonal in die Ebene zurückprojiziert, darstellen läßt.

Ersetzt man nunmehr Z durch einen Punkt $Z'(0; 0; i)$ und projiziert die euklidische Ebene vermittels der Zentralprojektion ζ' aus Z' auf die untere Halbkugel der imaginären Einheitsphäre um Z' , das Bild wiederum vermittels einer Parallelprojektion π' orthogonal in die Ebene zurück, so erhält man eine Abbildung $T' = \zeta'\pi'$ mit der Zuordnungsvorschrift

$$\xi' = \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} \xi.$$

Die Urbilder der Geraden der Bildebene sind gewisse dem Einheitskreis einbeschriebene Halbellipsen, die zu Strecken bzw. — wenn man sich die Bildebene projektiv erweitert denkt — Halbkreisen entarten können:

$$x' = a \leftarrow \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 \quad (\text{wobei } \operatorname{sgn} x = \operatorname{sgn} x' \text{ ist}).$$

Die Abbildung T' ist konstruktiv recht einfach zu beherrschen; hinsichtlich einiger Einzelheiten sei auf [2] verwiesen. So wie bei GANS die Sehnen des Einheitskreises im Sinne des Klein-Cayley-Modells der hyperbolischen Ebene als hyperbolische Geraden interpretiert werden, fassen wir die Geraden der (projektiv erweiterten) Bildebene als elliptische Geraden im Sinne eines π -Modells auf. Es zeigt sich nun, daß das zunächst mittels imaginärer Einheitskugel gewonnene formale Analogon zum Gansschen Modell auf einfache Weise mit Mitteln der reellen Geometrie realisiert werden kann, wenn man den Definitionsbereich von T' auf das Innere des reellen Einheitskreises beschränkt. Man findet $T' = T'^{-1}$ und kann T' folglich realisieren als Kette einer orthogonalen Parallelprojektion π^{-1} des Inneren des Einheitskreises (einschließlich des der Gegenpunktidentifizierung unterworfenen Einheitskreises selbst) auf die untere Hälfte der die Ebene im Mittelpunkt des Einheitskreises berührenden Kugel um $Z(0; 0; 1)$ und einer nachfolgenden Zentralprojektion ζ^{-1} dieser Halbkugel aus Z in die projektiv erweiterte Grundebene. Auf Grund des Zusammenhangs zwischen der Ebene Φ/G und ihrem projektiven Modell läßt sich das *E-Modell* folglich durch Parallelprojektion aus Φ/F in eine Tangentialebene der Ausgangsphäre (oder eine dazu parallele Ebene) gewinnen. Der Zusammenhang mit dem projektiven Modell ermöglicht infolge der Signumvereinbarung gerade die Auszeichnung einer bestimmten Halbellipse als Modellgerade und sichert die Eineindeutigkeit der Zuordnung.

2. Es werden folgende Grundaufgaben betrachtet:

1. Zu einem Punkt ist dessen *Polare*, zu einer Geraden deren *Pol* anzugeben.
2. Die *Verbindungsgerade* zweier Punkte ist anzugeben.

3. (dual zu 2). Der *Schnittpunkt* zweier Geraden ist anzugeben.
4. Von einem Punkt ist das *Lot* auf eine Gerade zu fällen; das *Gemeinlot* zweier Geraden ist anzugeben.
5. Das einem Punktepaar zuordenbare *Mittelpunktpaar* ist anzugeben.
6. (dual zu 5). Das einem Geradenpaar zuordenbare *Paar von Winkelhalbierenden* ist anzugeben.

Zur konstruktiven Lösung der Grundaufgaben im π -Modell führen wir einen *Grundkreis* ein, dessen Mittelpunkt O' der Fußpunkt des Lotes vom Mittelpunkt O der Sphäre (Radius r_0) auf die Bildebene und dessen Radius R der Abstand der Bildebene von O ist. Modellgeraden sind die (projektiven) Geraden der Bildebene. Die Zuordnung von Pol und Polare wird durch eine Antipolarität (Produkt aus Polarität am Grundkreis und Punktspiegelung an dessen Mittelpunkt) beschrieben. Da die Lösungen der Aufgaben 2 und 3 im π -Modell trivial sind, reduziert sich 4 auf 1: Ist die Gerade g Polare von P , so ist jede Gerade durch P Lot bezüglich g ; ist g nicht Polare von P , so ist P mit dem Pol G von g zu verbinden. Das Gemeinlot zweier Geraden ist die Verbindungsgerade von deren Polen. Bei 5 betrachten wir hier nur den Fall (der Ausnahmefall ist leicht zu ergänzen), daß A und B Punkte einer eigentlichen Geraden seien (möglicherweise ist ein Punkt deren Fernpunkt). Durch Umklappung des Dreiecks OAB um die Gerade AB in die Modellebene gehe O in \check{O} über. \check{O} ist mit Hilfe des Grundkreises leicht konstruierbar (Abb. 1).

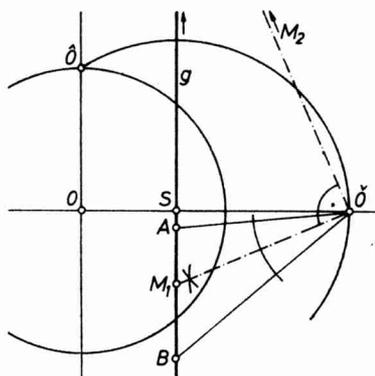


Abb. 1

Das Paar der euklidischen Winkelhalbierenden zu $\check{O}A, \check{O}B$ erzeugt auf AB die gesuchten Mittelpunkte M_1, M_2 . Der Punkt \check{O} wird zum Zentrum einer Gleichwinkeltkollineation auf g und gestattet so auch die Konstruktion des zu A orthogonalen Punktes \bar{A} auf g . Ist insbesondere B Fernpunkt, so erhält man die M_i als Schnittpunkt des Kreises um A mit $A\check{O}$ als Radius (Thaleskreis). Zur Lösung von 6 benutze man die Tatsache, daß die Pole der Winkelhalbierenden von g und h die Mittelpunkte des Paares der Pole von g und h sind.

Zur Lösung der Grundaufgaben im k -Modell projizieren wir aus dem Nordpol der Sphäre in deren Tangentialebene im Südpol S ; das Bild des Äquators soll *Fundamentalkreis* (Radius R^*) heißen. Modellpunkte sind die Punkte innerhalb des Fundamentalkreises sowie die Gegenpunktpaare auf dem Fundamentalkreis. Für konstruktive Zwecke ist es nützlich, die Außenpunkte oder „Gegenbilder“ heranzuziehen: Ist A ein Modellpunkt ($A \neq S$), so heiße \bar{A} *antivvers* oder das *Gegenbild* von A , wenn \bar{A} durch Inversion am Fundamentalkreis und nachfolgende Spiegelung an S aus A

punktidentifizierung eine Beschränkung auf die obere Halbkugel ($\varphi \in [0, \pi/2]$) möglich ist, so erhält man nach Übergang des Punktes (φ, λ, r_0) in den Punkt (ξ, η) der π -Modellebene

$$ds^2 = r_0^2 \left[\frac{R^2 + \eta^2}{(R^2 + \xi^2 + \eta^2)^2} d\xi^2 - 2 \frac{\xi\eta}{(R^2 + \xi^2 + \eta^2)^2} d\xi d\eta + \frac{R^2 + \xi^2}{(R^2 + \xi^2 + \eta^2)^2} dy^2 \right].$$

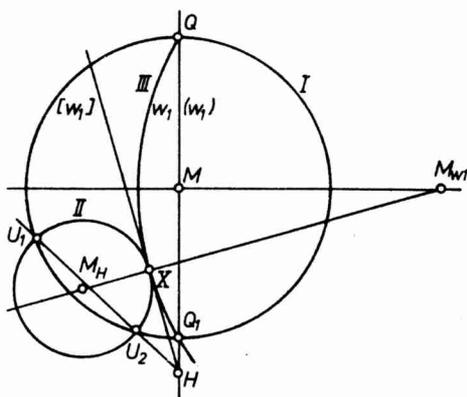


Abb. 3

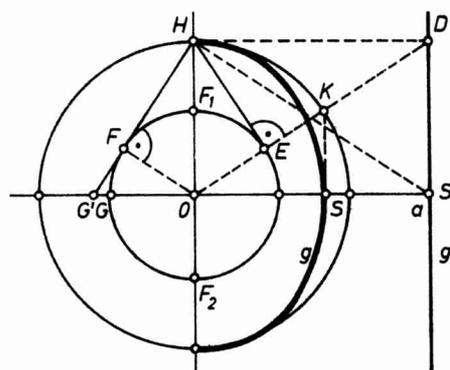


Abb. 4

Geht man zu einem Punkt (x_1, x_2) der k -Modellebene über (hier betrachten wir Punkte der unteren Halbkugel, die aus dem Nordpol projiziert werden), so erhält man

$$ds^2 = R^{*4} \frac{dx_1^2 + dx_2^2}{(R^{*2} + x_1^2 + x_2^2)^2}.$$

Im Fall des E -Modells (die obere Halbkugel werde durch orthogonale Parallelprojektion in die Äquatorebene projiziert) habe der Bildpunkt die Koordinaten (x, y) ; man erhält

$$ds^2 = \frac{r_0^2 - y^2}{r_0^2 - (x^2 + y^2)} dx^2 + 2 \frac{xy}{r_0^2 - (x^2 + y^2)} dx dy + \frac{r_0^2 - x^2}{r_0^2 - (x^2 + y^2)} dy^2.$$

Hieraus kann man die folgenden Abstandsformeln gewinnen:

Im π -Modell seien zwei Punkte A, B von O' aus durch die Ortsvektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} beschrieben. Man findet für den Abstand der beiden Punkte folgende (einander äquivalente) Ausdrücke:

$$D_{(\pi 1)} \quad \delta = r_0 \arccos \frac{|R^2 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|}{\sqrt{R^2 + \mathbf{a}^2} \sqrt{R^2 + \mathbf{b}^2}},$$

$$D_{(\pi 2)} \quad \delta = r_0 \arctan \frac{\sqrt{R^2(\mathbf{b} - \mathbf{a})^2 + (\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2}}{|R^2 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|}.$$

Im k -Modell seien die Punkte A, B von O' aus durch Ortsvektoren ξ_1, ξ_2 gegeben; man findet für den Abstand

$$D_{(k 1)} \quad \delta = r_0 \arccos \frac{|4R^{*2} \xi_1 \cdot \xi_2 + (R^{*2} - \xi_1^2)(R^{*2} - \xi_2^2)|}{(R^{*2} + \xi_1^2)(R^{*2} + \xi_2^2)}.$$

Setzt man mit $\xi_i = (x_i, y_i)$ noch $x_i + iy_i = z_i$, so erhält man

$$D_{(k_2)} \quad \delta^* = 2r_0 \arctan \frac{R^* |z_1 - z_2|}{|R^{*2} + z_1 \bar{z}_2|},$$

wobei δ^* die Länge einer der beiden durch A, B bestimmten „supplementären“ Strecken ist; ist $\delta^* \leq \pi r_0/2$, so ist $\delta = \delta^*$; ist aber $\delta^* > \pi r_0/2$, so ist $\delta = \pi r_0 - \delta^*$.

Im E -Modell ergibt sich für den elliptischen Abstand zweier Punkte A, B , die durch Ortsvektoren ξ_1, ξ_2 gegeben sind (für den Hauptkreisradius \hat{R} gilt $\hat{R} = r_0$),

$$D_{(E)} \quad \delta = \hat{R} \arccos \frac{|\xi_1 \cdot \xi_2 + \sqrt{(\hat{R}^2 - \xi_1^2)(\hat{R}^2 - \xi_2^2)}|}{\hat{R}^2}.$$

Die Herleitung dieser Beziehungen, Angaben über Schnittwinkelformeln, Orthogonalitätsbedingungen und Flächenelemente findet man in [3].

Was die Bewegungen in den Modellebenen anbetrifft, können folgende Aussagen gemacht werden: Bewegungen fassen wir wie üblich als endliche Produkte von Geradenspiegelungen auf. Auf Grund der Polarität und der Gegenpunktidentifizierung ist jede Geradenspiegelung an einer Geraden p in der elliptischen Ebene identisch mit einer Punktspiegelung am Pol P dieser Geraden. Wir sprechen daher von einer *Spiegelung am Paar* (P, p) . Da jede elliptische Bewegung eine Drehung ist, jede Drehung sich aber als Produkt zweier (P, p) -Spiegelungen darstellen läßt, gilt hier ein *Zweispiegelungssatz*: Jede Bewegung in der elliptischen Ebene läßt sich als Produkt von höchstens zwei Spiegelungen darstellen. Da jede Spiegelung auch als Halbdrehung aufgefaßt werden kann, gibt es keinen Unterschied zwischen eigentlichen und uneigentlichen Bewegungen.

Die (P, p) -Spiegelungen sind im π -Modell involutorische Zentralkollineationen mit P als Zentrum und p als Achse. Im k -Modell dagegen wird eine (P, p) -Spiegelung dargestellt durch eine Inversion am g -Kreis p , wobei — falls das Inversionsbild A' eines Punktes A außerhalb des Fundamentalkreises zu liegen kommt — A' noch in sein Gegenbild \bar{A}' bezüglich des Fundamentalkreises abzubilden ist. Die Spiegelungen im E -Modell werden konstruktiv am einfachsten durch Rückgriff auf ein zugeordnetes projektives Modell und die bei involutorischen Zentralkollineationen auftretenden harmonischen Lagebeziehungen beherrscht.

3. Auf der Kugel Φ liegen alle Punkte, die von einem gegebenen Punkt konstanten Abstand haben, auf einem Kleinkreis, desgleichen die Punkte, die von einem Großkreis konstanten Abstand haben. Durch die Gegenpunktidentifizierung besteht ein Entfernungskreis um P_0 aus einem Paar zweier in bezüglich OP_0 orthogonalen Ebenen liegenden und zu O symmetrischen und darum zu identifizierenden Breitenkreise. Die Abstandslinien sind also mit Entfernungskreisen identisch. Genauer: Der Entfernungskreis um P_0 mit dem in elliptischer Metrik gemessenen Radius ρ ist identisch mit einer Abstandslinie bezüglich der Polaren p_0 von P_0 : Auf ihm liegen gerade alle Punkte, die von dieser Polaren den Abstand $\pi/2 - \rho$ haben. Die Punkte maximaler Entfernung von P_0 liegen auf der Polaren und umgekehrt.

Wir beschreiben Gestalt, Konstruktion und analytische Darstellung der Entfernungskreise bzw. Abstandslinien.

Im π -Modell sind die Entfernungskreise als Zentralprojektionen von Kleinkreisen Kegelschnitte: Fällt P_0 in den Nord- bzw. Südpol (und denkt man sich die Verbindungsgeraden der beiden Pole orthogonal zur Bildebene), so entsteht bei variablem ρ ein Büschel konzentrischer Kreise um O' . Fällt P_0 dagegen nicht mit dem Nord- oder

Südpol zusammen, so ist das π -Bild des Entfernungskreises um P_0 mit dem elliptischen Radius ρ eine

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ellipse} \\ \text{Parabel} \\ \text{Hyperbel} \end{array} \right\} \text{ genau dann, wenn } \frac{R}{O'P'_0} \begin{array}{l} > \\ \equiv \\ < \end{array} \tan \frac{\rho}{r_0} \left(0 \leq \frac{\rho}{r_0} \leq \frac{\pi}{2} \right) \text{ ist,}$$

wobei P'_0 der elliptische Mittelpunkt des Entfernungskreises ist und $\overline{O'P'_0}$ euklidisch gemessen wird (Abb. 5).

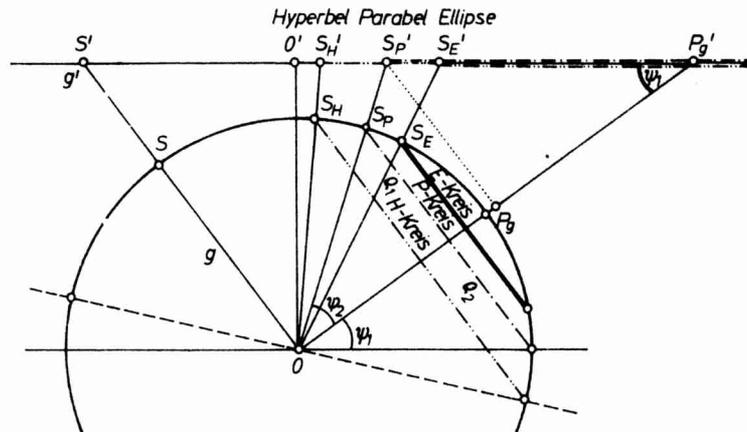


Abb. 5

Wenn auch die bekannte Peripheriewinkeleigenschaft im elliptischen Dreieck im allgemeinen nicht auftritt, wollen wir der einfachen Sprechweise halber doch den Entfernungskreis mit dem Durchmesser AB den „Thaleskreis über AB “ nennen. Es zeigt sich, daß man im projektiven Modell auf Grund einer interessanten Eigenschaft recht einfach weitere Punkte dieses „Thaleskreises“ konstruieren kann; es läßt sich nämlich eine projektive Erzeugung dieses Entfernungskreises angeben, von dem man sich etwa den elliptischen Mittelpunkt M_1 und einen beliebigen Peripheriepunkt A gegeben denkt. Der zweite Endpunkt B des Durchmessers entsteht zunächst durch Spiegelung von A an M_1 . Wir betrachten die Verhältnisse zunächst auf der Kugel Φ . Es sei \mathfrak{K} der Kreis um M_1 durch A und B , X ein beliebiger Punkt auf \mathfrak{K} . Die („inneren“) Mittelsenkrechten von AX und BX sind als Halbierungslinien von Nebenwinkeln in M_1 zueinander orthogonal; also sind deren Schnittpunkte P bzw. Q mit der Polaren m_1 von M_1 zueinander konjugierte Punkte. Wir betrachten nun die Drehung um M_1 , die A nach X bringt, Sie ist darstellbar als Produkt der Spiegelungen σ_1 an M_1A und σ_2 an M_1P . Die Spiegelung σ_1 läßt A fest, σ_2 hat den Fixpunkt Q (als Pol der Achse M_1P). Es sei $AB \cap m_1 = U$. Es ist $AB \mathfrak{S} M_1U$. Die Spiegelung σ_2 führt A in X , also PA in PX über; andererseits geht PA wegen der erwähnten harmonischen Lagebeziehung \mathfrak{S} nach PB , d. h. $X \in PB$. Ganz analog schließt man auf $X \in QA$, d. h. $X = AQ \cap PB$. Im projektiven Modell lassen sich nun alle diese Schritte durch Schneiden von Geraden und Verbinden von Punkten realisieren, wenn man sich nur auf der Polaren von M_1 eine Rechtwinkelinvolution mit dem Zentrum \hat{O} vorgibt: \hat{O} entsteht durch Umklappung des Kugelmittelpunkts O um die Gerade m_1 in die Modellenebene; zu P_i ist jeweils Q_i konjugiert (Abb. 6).

Besonders übersichtlich gestaltet sich das Bild von Entfernungskreisen im *k-Modell*: Die Kreistreue der stereographischen Projektion läßt das Kleinkreispaar in Kreispaare der Modellebene übergehen. Ist ein Pol-Polarensystem (P_0, p_0) fest gegeben, so schneiden die Entfernungskreise das Lotbündel zu p_0 unter rechtem Winkel. Also

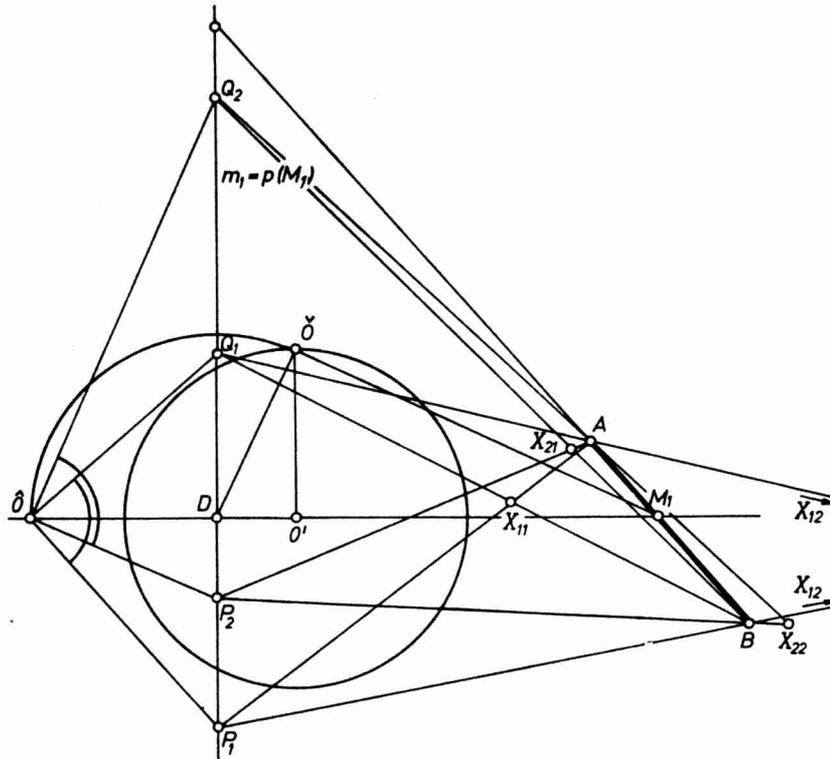


Abb. 6

wird die Schar der Entfernungskreise im *k-Modell* dargestellt durch die im Inneren des Fundamentalkreises gelegenen Bögen der Kreise des zum Kreisbüschel mit den reellen Trägerpunkten P_0 und dessen Fundamentalkreisgegenbild \bar{P}_0 orthogonalen hyperbolischen Kreisbüschels. Erzeugende des Büschels sind der *g*-Kreis p_0 und die euklidische Mittelsenkrechte zu $P_0\bar{P}_0$, Nullkreise die Punkte P_0 und \bar{P}_0 (Abb. 7).

Zur Ermittlung der Gleichung eines Entfernungskreises um einen Punkt $P(p, O)$ vom (elliptischen) Radius ϱ denken wir uns die *k*-Ebene jetzt in die Äquatorebene einer Einheitskugel gelegt, welche wir vom Südpol aus stereographisch in die Bildebene projizieren. Das Urbild P_0 von P auf der Nordhalbkugel sei durch $g = (a, 0, c)$ gegeben. Die Schar der Trägerebenen der Entfernungskreise um P_0 wird in Hessescher Normalform durch $ax + cz - d = 0$ mit $d = \cos \varrho$ beschrieben. Daraus ermittelt man die Gleichung der Breitenkreise selbst, projiziert im Fall $z \geq 0$ in die Bildebene und findet nach Elimination des Kurvenparameters und Beachtung von $p(c + 1) = a$,

woraus (wegen $a^2 + c^2 = 1$) $p = \sqrt{\frac{1-c}{1+c}}$ folgt, schließlich

$$\left(x' - \frac{2p}{(1-p^2) + (1+p^2)\cos\varrho}\right)^2 + y'^2 = \left(\frac{(1+p^2)\sin\varrho}{(1-p^2) + (1+p^2)\cos\varrho}\right)^2$$

als Gleichung des Entfernungskreises um $P(p, O)$ mit dem elliptischen Radius ϱ . Hiervon hat man nur die Punkte zu wählen, die innerhalb des Fundamentalkreises oder auf ihm liegen ($x'^2 + y'^2 \leq 1$). Für die Entfernungskreise um O' erhält man

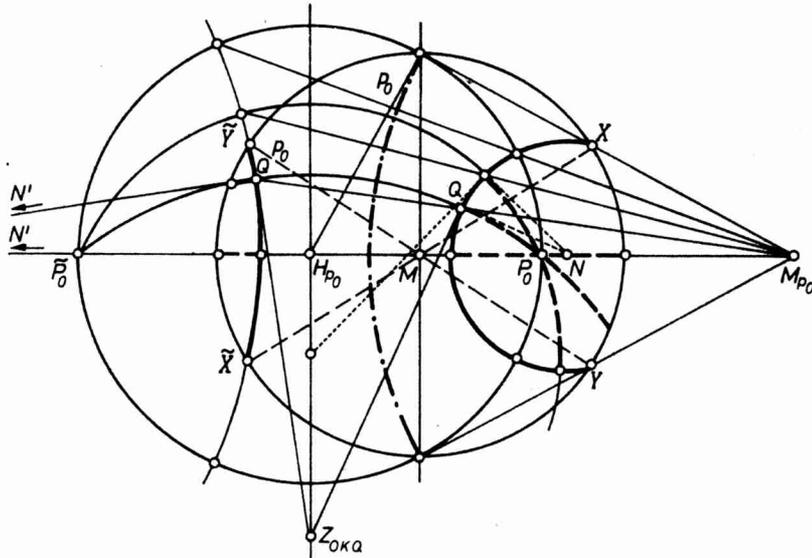


Abb. 7

unter Beachtung von $\frac{\sin \varrho}{1 + \cos \varrho} = \tan \frac{\varrho}{2}$ die Gleichung $x'^2 + y'^2 = \tan^2 \frac{\varrho}{2}$. Im Fall $z < 0$ läge das Bild eines solchen Kugelpunktes X außerhalb des Fundamentalkreises, was aber heißt, daß X durch seinen Antipoden zu ersetzen ist. Unter Beachtung einer solchen Spiegelung an O erhält man dann

$$\left(x' - \frac{2p}{(1 - p^2) - (1 + p^2) \cos \varrho}\right)^2 + y'^2 = \left(\frac{(1 + p^2) \sin \varrho}{(1 - p^2) - (1 + p^2) \cos \varrho}\right)^2,$$

wiederum mit der Bedingung $x'^2 + y'^2 \leq 1$. Die Gleichungen lassen sich auch aus den Abstandsformeln gewinnen. Die Abb. 8 und 9 zeigen die Konstruktion dieser Entfernungskreise bei Vorgabe von P und ϱ . (In der Abbildung ist die x, z -Ebene in die x, y -Ebene hineingedreht zu denken.)

Im *E-Modell* erscheinen die Entfernungskreise als Parallelprojektionen von Kleinkreisen im allgemeinen als Ellipsen. Da auf der Sphäre mit Gegenpunktidentifizierung ein Kleinkreis mit dessen Spiegelbild am Kugelmittelpunkt zu identifizieren ist, muß ein solcher *E-Entfernungskreis* wie jedes Gebilde des *E-Modells* mit seinem Spiegelbild am Hauptkreismittelpunkt identifiziert werden. Es ist also zweckmäßig, jeweils nur einen Repräsentanten dieses spiegelbildlichen Paares zu betrachten. Dabei soll folgende Vereinbarung getroffen werden: Für alle Punkte $X \in \Phi/G$ gelte: Als *E-Bild* des Antipodenpaares (X, \bar{X}) werde derjenige der beiden durch Parallelprojektion von (X, \bar{X}) entstehenden Bildpunkte gewählt, welcher zwischen dem Hauptkreismittelpunkt O' und dem π -Bild von (X, \bar{X}) bei einer fest gewählten Ebene π , welche die Kugel nicht schneidet, liegt. Durch ähnliche Überlegungen wie im

k-Modell (oder auch ausgehend von der entsprechenden Abstandsformel) erhält man als Gleichung für den Entfernungskreis um $P(p, O)$ mit dem Radius ϱ

$$\frac{(x - p \cos \varrho)^2}{(1 - p^2) \sin^2 \varrho} + \frac{y^2}{\sin^2 \varrho} = 1.$$

Im Grenzfall erhält man für $\varrho \rightarrow \pi/2$ die Gleichung

$$\frac{x^2}{1 - p^2} + y^2 = 1$$

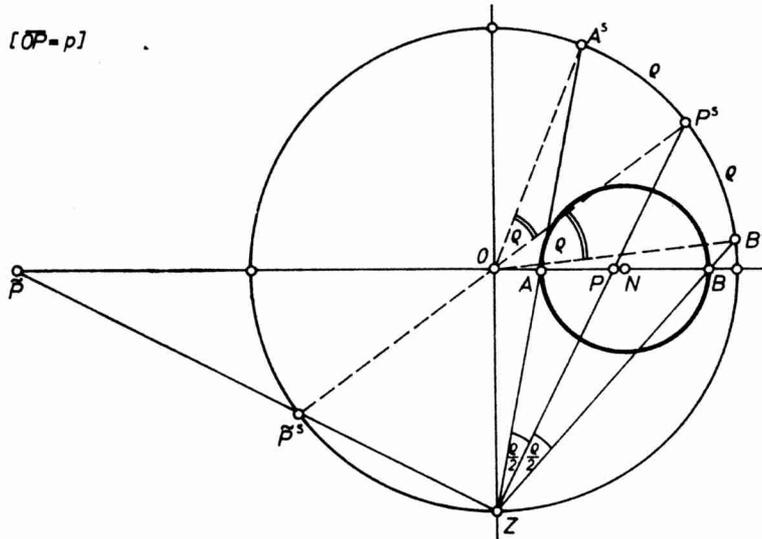


Abb. 8

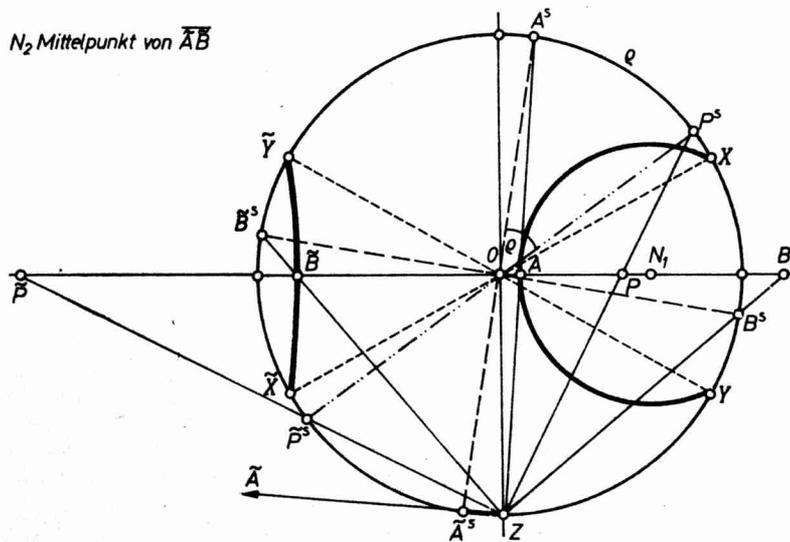


Abb. 9

für die Polare von P . Hält man P fest und variiert ρ , so bewegen sich die Nebenscheitel der Bildellipse auf der x -Achse, die Hauptscheitel aber auf einer Ellipse

$$\frac{x^2}{p^2} + x^2 = 1.$$

Die Konstruktion der Bildellipse ist aus Abb. 10 ersichtlich.

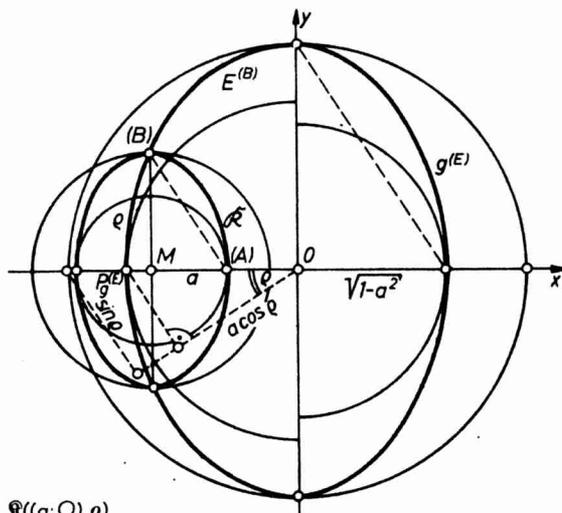


Abb. 10

4. Die auch als Entfernungskreise auffaßbaren Abstandslinien der elliptischen Ebene können betrachtet werden als Ort aller Punkte, die von einer Geraden g und deren Pol G ein konstantes Abstandsverhältnis haben. Wir wollen nun die Frage allgemeiner nach solchen Punktmengen stellen, für die der Quotient der Abstände von einer Geraden a und einem beliebigen Punkt B , der nicht mit dem Pol A von a zusammenfällt, einen konstanten Wert $1/k$ besitzt. Insbesondere im Fall $k = 1$, den wir den parabolischen Fall nennen wollen, lassen sich eine Reihe von Aussagen über solche Kurven gewinnen; sie sollen in diesem Fall p -Kurven des Paares (a, B) heißen. Im Anschluß daran werden kurz die nichtparabolischen Fälle betrachtet.

Wir untersuchen zunächst die p -Kurven in der Ebene Φ/G : Auf Φ sei der Großkreis a durch die Gleichung $\alpha \cdot x = 0$ (α Radiusvektor des Poles A), der Punkt B durch dessen Radiusvektor b gegeben. $P \neq A$ sei ein auf Φ variabel gedachter Punkt mit dem Ortsvektor p . Es sei P' der Fußpunkt des sphärischen Lotes von P auf a , sein Ortsvektor p' . Alle Ortsvektoren seien zu 1 normiert. Mit $\varphi = \sphericalangle(p, p')$ und $\delta = \sphericalangle(p, b)$ folgt aus der Bedingung $\delta = \varphi$ unter Beachtung von $\sphericalangle(p, p') = 90^\circ - \sphericalangle(p, a)$

$$(p \cdot b)^2 = (p \times a)^2,$$

d. h., die Punkte P liegen auf einer Fläche zweiter Ordnung. Wählt man das Bezugssystem so, daß $\alpha = (0, 0, 1)$ und $b_2 = 0$ ist, so erhält die erzeugende F_2 die Gleichung $b_3^2 x_1^2 + x_2^2 - b_3^2 x_3^2 - 2b_1 b_3 x_1 x_3 = 0$. Die charakteristische Gleichung $-\lambda^3 + \lambda^2 + b_3^2 \lambda - b_3^2 = 0$ liefert die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = b_3$ und $\lambda_3 = -b_3$; die F_2 ist ein Kegel mit der Spitze im Ursprung, und nach vollzogener Hauptachsentransformation erhält er die Gleichung $X_1^2 + b_3 X_2^2 - b_3 X_3^2 = 0$. Die p -Kurve auf Φ ist

also ein sphärischer Kegelschnitt im üblicherweise gebrauchten Sinne. Zu den Eigenwerten λ_i gehören die folgenden durch Y_i aufgespannten Hauptachsen:

$$Y_1 = (0, 1, 0), \quad Y_2 = (b_1, 0, b_3 - 1), \quad Y_3 = (b_1, 0, b_3 + 1).$$

Sind P_0, Q_0 die Schnittpunkte der p -Kurve mit der Geraden AB , so gilt $P_0Q_0 \parallel AB$. Die durch P_0 gehende und zur Y_3 -Achse senkrechte Ebene schneidet aus dem Kegel

eine Ellipse $X_1^2 \frac{b_3}{2} + X_2^2 \frac{1}{2} = 1$ mit der linearen Exzentrizität $e = \sqrt{\frac{1-b_3}{2}}$ aus.

Die durch die Nebenscheitel H, K dieser Ellipse bestimmten Mantellinien des Kegels schneiden auf der Sphäre die Punkte G und F aus, in denen die p -Kurve ihre maximale Abweichung w aus der erwähnten Schnittebene erreicht. Man findet

$$w = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1+b_3}}{\sqrt{2} \sqrt{1+b_3}}.$$

Weiter zeigt sich, daß die „Ausschweifpunkte“ G und F stets — unabhängig von der Wahl von B — auf einem Kreis unter 45° Breite bezüglich des Paares (A, a) liegen. Üblicherweise definiert man die Brennpunkte eines sphärischen Kegelschnitts als Schnittpunkte der Fokalachsen des erzeugenden Kegels mit der Kugel. Es entsteht die Frage, ob die Grundpunkte A und B unserer p -Kurve gerade die Brennpunkte dieses sphärischen Kegelschnitts sind. Man überlegt sich zunächst: Schneidet ein Kegel auf einer Kugel einen sphärischen Kegelschnitt aus, so enthält eine seiner Symmetrieebenen zwei reelle Fokalachsen; die Projektionen der sphärischen Brennpunkte in Richtung der Kegelachse in die zur Kegelachse orthogonale Schnittebene durch die Endpunkte des in dieser Symmetrieebene gelegenen Durchmessers des sphärischen Kegelschnitts sind die Brennpunkte der Schnittellipse. In unserem Fall ergibt sich bei durch $l = a + b$ aufgespannter Kegelachse für den Abstand des Punktes B von dieser Achse

$$d = |b \times l^0| = \sqrt{\frac{1-b_3}{2}} = e.$$

Die Grundpunkte A und B sind Brennpunkte im Sinne der üblichen Definition sphärischer bzw. elliptischer Kegelschnitte.

Im π -Modell erscheinen die p -Kurven, da sie auf der Sphäre durch einen Kegel mit der Spitze in O ausgeschnitten werden, als ebene Kegelschnitte. Die Bildebene werde einschränkend so gewählt, daß sie auf der durch O, A und B bestimmten Ebene senkrecht steht. Ist β die Bildebene, β' die zu β parallele Ebene durch O, \hat{A} der in demselben Halbraum von β' wie β gelegene Schnittpunkte des Meridians von A, B mit a , so sei B auf dem Viertelkreisbogen zwischen A und \hat{A} gelegen. φ_B sei die geographische Breite von B bezüglich (A, a) , ε der Winkel zwischen der a erzeugenden Ebene und der Bildebene ($0 \leq \varepsilon \leq \pi/2$; $0 \leq \varphi_B \leq \pi/2$); dann entsteht

für $0 < \varepsilon + \frac{\varphi_B}{2} < \frac{\pi}{2}$ eine Ellipse,

für $\frac{\pi}{2} < \varepsilon + \frac{\varphi_B}{2} < \pi$ eine Hyperbel,

für $\varepsilon + \frac{\varphi_B}{2} = 0$ oder $\frac{\pi}{2}$ dagegen eine Parabel, die für $\varepsilon = 0$ und $\varphi_B = 0$ in eine Gerade ausartet.

Die Konstruktion des π -Bildes einer p -Kurve wird folgendermaßen realisiert: Aus A, a und φ_B findet man A^π, a^π und B^π . Die Hauptscheitel P_0^π und Q_0^π des gesuchten Kegelschnitts entstehen durch Halbierung des Winkels $B\hat{O}S$ und seines Nebenwinkels. Außer den Hauptscheiteln kann man einen weiteren Punkt des gesuchten Kegelschnitts angeben, nämlich das Bild G^π des Ausschweifpunktes G . Man kann einmal ausnutzen, daß G in der Symmetrieebene von P_0 und Q_0 liegt sowie auf dem $\pi/4$ -Breitenkreis bezüglich (A, a) . Der Punkt G^π entsteht als Schnittpunkt einer Geraden (des Schnitts der Symmetrieebene mit der Bildebene) und eines Kegelschnitts (des konstruierbaren Bildes des Breitenkreises). Man kann aber G^π auch als Schnittpunkt derselben Geraden mit einem Kreis erhalten, wenn man ausnutzt, daß G auch auf einem Breitenkreis bezüglich der Polrichtung (der Kegelachse) (Verwendung einer Umklappung) liegt. Für den euklidischen Mittelpunkt Z^π von $P_0^\pi Q_0^\pi$ gilt $\overline{Z^\pi P_0^\pi} = \overline{OZ^\pi}$, da sich im Rechteck die einander gleichen Diagonalen halbieren; denkt man sich B auf dem gewählten Meridian noch variabel, so gehen die Hauptscheitelkreise der Bilder aller p -Kurven sämtlich durch O (und dessen Spiegelbild bezüglich $P_0^\pi Q_0^\pi$) und bilden somit ein elliptisches Büschel. Beschränkt man sich auf den Fall $\varepsilon = 0$ und wählt die Bildebene als Tangentialebene der Einheitskugel in A , so erhält man in diesem Fall stets eine Ellipse als Bildkurve, die B^π zum Mittelpunkt und A^π zu einem ihrer Brennpunkte hat.

Das k -Modell ist zur Darstellung der p -Kurven relativ ungeeignet. Die Bildkurve erscheint im allgemeinen als Kurve vierter Ordnung. Die punktweise Konstruktion durch Schnitt eines gewissen einem Büschel konzentrischer Kreise angehörenden Kreises $K(\varphi)$ mit einer gewissen einem Parallelgeradenbüschel angehörenden Geraden $g(\varphi)$ sowie die analytische Beschreibung der C_4 wird in [3] gegeben.

Auch im Fall des E -Modells entsteht im allgemeinen eine Kurve vierter Ordnung, deren Gleichung in [3] hergeleitet wird. Läßt man B wiederum variieren, so ergibt sich, daß die Punkte maximaler Ordinate aller dieser Kurven vierter Ordnung auf einem Kreis um O' mit dem Radius $\sqrt{2}/2$ liegen.

Wir schließen einige Bemerkungen zum Fall $k \neq 1$ an.

Aus der Bedingung $\delta = k\varphi$ (φ sphärischer Abstand von X und a , δ sphärischer Abstand von X und B) erhält man $\arccos \xi \cdot \eta = k \arccos \sqrt{1 - (\xi \cdot \alpha)^2}$. Um Aussagen über die Gestalt dieser Ortskurven treffen zu können, wählen wir ein spezielles sphärisches Koordinatensystem: a wählen wir als Äquator; φ ist dann die geographische Breite von X , φ_B die von B . Den Nullmeridian legen wir durch A und B und haben so $\lambda_B = 0$. Der Punkt X habe die geographische Länge λ . Aus $\xi = (\cos \varphi \cos \lambda; \cos \varphi \sin \lambda; \sin \varphi)$ und $\eta = (\cos \varphi_B; 0; \sin \varphi_B)$ folgt

$$\cos \delta = \cos \varphi \cos \varphi_B \cos \lambda + \sin \varphi \sin \varphi_B.$$

Dagegen gilt für den elliptischen Abstand wegen $\delta_{\text{ell}} = \min \{ \delta, \pi - \delta \}$

$$\cos \delta_{\text{ell}} = |\cos \varphi \cos \varphi_B \cos \lambda + \sin \varphi \sin \varphi_B|.$$

Nach einiger Rechnung ergibt sich für die verallgemeinerte Abstandslinie auf Φ im Bereich $0 \leq \lambda \leq \pi, \varphi_B/2 \leq \varphi \leq \pi/2 - \varphi_B/2$

$$\xi = \frac{1}{\cos \varphi_B} \left(\frac{\cos k\varphi - \sin \varphi \sin \varphi_B}{\sqrt{\cos(\varphi + \varphi_B) \cos(\varphi - \varphi_B) - \cos k\varphi (\cos k\varphi - 2 \sin \varphi \sin \varphi_B)}} \right).$$

Der erzeugende Kegel ist für $k \neq 1$ nicht mehr von zweiter Ordnung.
 Für weitere Überlegungen benötigen wir noch die Koordinaten der beiden auf dem die Symmetrieachse der Ortskurve bildenden Ortsmeridian gelegenen Kurvenpunkte X_1 und X_2 . Für X_1 findet man in jedem Fall $\lambda_1 = 0$ und $\varphi_1 = \varphi_B/(k + 1)$, für X_2 aber

$$\left. \begin{aligned} \lambda_2 = \pi \quad \text{und} \quad \varphi_2 = \frac{\pi - \varphi_B}{k + 1} \quad \text{für} \quad k \geq k^\square, \\ \lambda_2 = 0 \quad \text{und} \quad \varphi_2 = \frac{\varphi_B}{1 - k} \quad \text{für} \quad k < k^\square \end{aligned} \right\} \text{mit} \quad k^\square = \frac{\frac{\pi}{2} - \varphi_B}{\frac{\pi}{2}}.$$

Bei der Suche nach einer Näherungskonstruktion des Risses der verallgemeinerten Abstandslinie in der Ebene des Nullmeridians für beliebige k (für geeignete k wird diese Näherungskonstruktion zu einer exakten Konstruktion) ist zu unterscheiden zwischen der verallgemeinerten Abstandslinie in der *sphärischen* und der entsprechenden Kurve in der *elliptischen* Ebene. Zunächst unterscheidet sich k hinreichend wenig von 1; in diesem Fall stimmen sphärische und elliptische Abstandslinie überein. Wir geben die Näherungskonstruktion eines beliebigen Punktes des Meridianrisses dieser Kurve an (Abb. 11): Es seien A, B fest, sie bestimmen mit O die Ebene des Null-

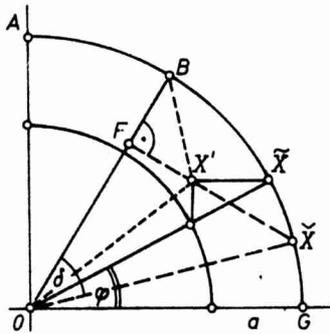


Abb. 11

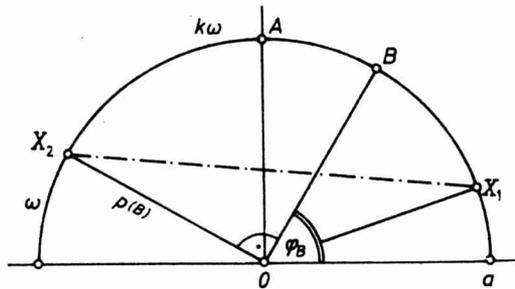


Abb. 12

meridians; X sei ein beliebiger Punkt der Einheitssphäre Φ , für den $\delta = k\varphi$ gilt, wobei $\delta = \sphericalangle XOB$ und $\varphi = \pi/2 - \sphericalangle XOA$ ist; X' sei der RiB von X in der Ebene des Nullmeridians. Den Großkreis durch A und X drehen wir um OA in die Ebene des Nullmeridians; X gelangt nach \check{X} , und es ist $\sphericalangle \check{X}OG = \varphi$. Zum andern betrachten wir die durch X (und X') gehende, zu OB orthogonale Ebene, welche Φ in einem Kleinkreis mit dem Mittelpunkt F schneidet. Da $X \in \Phi$ ist, findet man nach Umklappung des Dreiecks OXB um OB in die Meridianebene $\overline{FX} = \overline{F\check{X}}$. Weiter geht der Großkreisbogen $\widehat{B\check{X}}$ in $\widehat{B\check{X}}$ über, und somit ist $\sphericalangle \check{X}OB = \delta$. Daraus ergibt sich die Konstruktion für X' bei fest vorgegebenem k : Wir wählen $\delta = d(X, B)$ ($0 \leq \delta \leq \pi/2$), konstruieren (im allgemeinen eben nur näherungsweise) $\varphi = \delta/k$, tragen φ in O an OG an und erhalten \check{X} und konstruieren durch \check{X} die Parallele p zu OG ; wir tragen andererseits δ (in beliebiger Richtung) in O an OB an, erhalten \check{X} und fällen das Lot l von \check{X} auf OB . Dann ist, falls ein solcher Schnittpunkt existiert, $l \cap p = \{X'\}$. Die analytische Begründung ist rasch einzusehen: Die Koordinaten der Punkte der Parallelen p genügen den Beziehungen x_1 beliebig, $z_1 = \sin \varphi$. Der Fußpunkt des Lotes von X' auf OB hat die Koordinaten $x_F = \cos(\varphi_B + \delta)$, $z_F = \sin(\varphi_B + \delta)$.

Ein beliebiger Punkt des Lotes genügt dann den Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} x_{II} &= \cos(\varphi_B + \delta) + \lambda \sin \varphi_B, \\ z_{II} &= \sin(\varphi_B + \delta) - \lambda \cos \varphi_B, \end{aligned} \right\} -\infty < \lambda < +\infty.$$

Die Schnittbedingung $z_I = z_{II}$ ergibt

$$\lambda = \frac{\sin(\varphi_B + \delta) - \sin \varphi}{\cos \varphi_B}$$

und somit

$$\begin{aligned} x_S &= \cos(\varphi_B + k\varphi) + \tan \varphi_B \sin(\varphi_B + k\varphi) - \tan \varphi_B \sin \varphi, \\ z_S &= \sin \varphi. \end{aligned}$$

Durch Ausheben von $1/\cos \varphi_B$ erhält man nach einiger Rechnung

$$x_S = \frac{\cos k\varphi - \sin \varphi_B \sin \varphi}{\cos \varphi_B},$$

q. e. d. Für welche k wird sich bei vorgegebenem φ_B die elliptische von der sphärischen Abstandslinie unterscheiden? Während wegen $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ der elliptische Abstand des Punktes X von der Geraden a mit dem sphärischen Abstand zu identifizieren ist, kann δ_{sph} Werte annehmen, die größer als ein Rechter sind, δ_{ell} dagegen nicht. Der kritische Grenzfall (Abb. 12) tritt gerade ein, falls X_2 auf der Polaren $p(B)$ liegt. Liegt X_2 im Sinne der sphärischen Geometrie (als $X_2^{(s)}$) in dem B nicht enthaltenden Halbraum von $p(B)$, so stimmen δ_{sph} und δ_{ell} nicht mehr überein; δ_{ell} ist zum Antipodenpunkt von B hin zu messen, $X_2^{(e)}$ fällt mit $X_2^{(s)}$ nicht mehr zusammen. Das kritische k^* , für das $X_2 \in p(B)$ ist, ermittelt man aus $(1 + k^*)\omega = \pi - \varphi_B$ und der Forderung

$$k^*\omega = \frac{k^*(\pi - \varphi_B)}{1 + k^*} = \frac{\pi}{2}$$

zu

$$k^* = \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2} - \varphi_B}.$$

Führen wir für die nichtparabolischen Fälle noch zur Ortsdefinition der Kegelschnitte in der euklidischen Geometrie analoge Bezeichnungen ein, so ergibt sich für die verallgemeinerten Abstandslinien folgende Übersicht:

- $0 < k < 1$ elliptischer Fall,
- $k = 1$ parabolischer Fall,
- $1 < k \leq k^*$ hyperbolischer Fall (1): die elliptische Abstandslinie ist mit der sphärischen Abstandslinie identisch,
- $k^* < k$ hyperbolischer Fall (2): die elliptische Abstandslinie ist nicht mehr identisch mit der sphärischen Abstandslinie.

Die nach obiger Konstruktionsvorschrift gewonnenen Abbildungen 13 und 14 vermitteln einen Überblick über die vier möglichen Fälle.

Wählt man die Bildebenen speziell so, daß sie die Sphäre im Punkt A tangieren, so kann man aus dem Meridianriß X' eines Punktes X der Ortskurve auch dessen π -, k - bzw. E -Bild finden und zu einer Zweifelderdarstellung der verallgemeinerten Abstandslinie gelangen. Einzelheiten dieser Konstruktion sind in [3] angegeben.

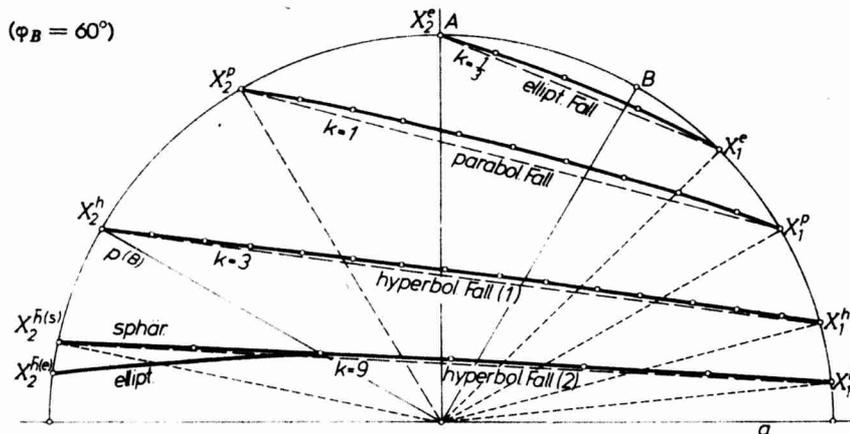


Abb. 13

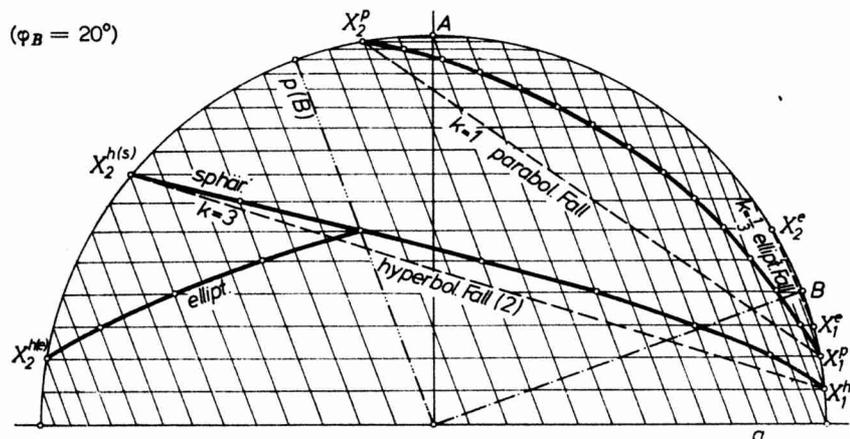


Abb. 14

5. Die bisher beschriebenen Modelle haben sämtlich den Vorteil, daß sie geometrisch gut überschaubar sind und somit ein optisch einprägsames Bild von den Verhältnissen in einer elliptischen Ebene geben. Ihr gemeinsamer Nachteil ist, daß die analytische Beschreibung der Grundobjekte und Grundrelationen vergleichsweise umständlich ist und vor allen Dingen die in der elliptischen Geometrie waltende Dualität nicht oder nur in ungenügendem Maße zum Ausdruck bringt. Das nachfolgend beschriebene Modell bringt gerade die von reinen Inzidenzaussagen auf metrische Aussagen erweiterbare Dualität der elliptischen Ebene übersichtlich zum Ausdruck. Gegeben seien zwei dreidimensionale lineare Vektorräume V_1 und V_2 über dem Körper R der reellen Zahlen, die natürlich zueinander isomorph und in diesem Sinne bei Bedarf auch miteinander identifizierbar sind. Wir definieren nun die Grundobjekte gerade so, wie wir das Gegenpunktpaar einer Sphäre des Anschauungsraumes bzw. dessen Trägergerade durch einen Richtungsvektor und den gegenpunktidentifizierten Großkreis bzw. dessen Trägergerade durch einen Stellungsvektor charakterisieren würden, dächten wir uns im Kugelmittelpunkt eine orthonormierte Basis für den drei-

dimensionalen euklidischen Raum aufgespannt. Es sei also $V_1 = V_2$ der lineare Vektorraum der geordneten Tripel reeller Zahlen, wobei in V_1 bzw. V_2 die Addition und die Multiplikation mit einer reellen Zahl durch gliedweise Addition bzw. Multiplikation definiert sei. Die Punkte des V -Modells seien gerade die eindimensionalen Teilräume $X = R\mathfrak{x}$ des V_1 ($\mathfrak{x} = (x_1, x_2, x_3) \in V_1$ und vom Nullvektor des V_1 verschieden). Die Geraden des V -Modells seien gerade die eindimensionalen Teilräume $A = Ra$ des V_2 ($a = (a_1, a_2, a_3) \in V_2$ und vom Nullvektor des V_2 verschieden). Für $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, x_3)$ und $\mathfrak{y} = (y_1, y_2, y_3)$ aus V_1 sei das Skalarprodukt durch

$$\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y} = \sum_{i=1}^3 x_i y_i,$$

das Vektorprodukt durch

$$\mathfrak{x} \times \mathfrak{y} = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

definiert; für $a, b \in V_2$ seien die beiden Produkte ganz analog definiert. Durch die Einführung eines Skalarproduktes werden die V_i zu euklidischen Vektorräumen. Die Definition des Skalar- und Vektorprodukts in V_1 bzw. V_2 werde insofern erweitert, daß dabei ein Faktor aus V_2 , der andere aus V_1 genommen werden darf:

$$a \cdot \mathfrak{x} = \sum_{i=1}^3 a_i x_i, \quad a \times \mathfrak{x} = (a_2 x_3 - a_3 x_2, a_3 x_1 - a_1 x_3, a_1 x_2 - a_2 x_1).$$

Nunmehr können die Relationen Inzidenz, Orthogonalität und Polarität definiert werden:

Inzidenz eines Punktes X und einer Geraden A :

Es gilt $X \iota A \Leftrightarrow \mathfrak{x} \cdot a = 0$.

Die Symmetrie der Inzidenzrelation von Punkt und Gerade ergibt sich unmittelbar aus der Kommutativität der skalaren Multiplikation.

Orthogonalität von Punkten:

$$X \perp Y \Leftrightarrow \mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y} = 0$$

Orthogonalität von Geraden:

$$A \perp B \Leftrightarrow a \cdot b = 0$$

Die Relation \perp ist für Punkte wie auch für Geraden symmetrisch.

Mit $X_1 \oplus X_2 = \{\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2 \mid \mathfrak{x}_1 \in X_1, \mathfrak{x}_2 \in X_2\}$ folgt sofort

$$X_1 \perp Y, X_2 \perp Y \Rightarrow X_1 \oplus X_2 \perp Y$$

$$A_1 \perp B, A_2 \perp B \Rightarrow A_1 \oplus A_2 \perp B.$$

$X_1 \oplus X_2$ soll die durch X_1 und X_2 bestimmte Punktreihe,

$A_1 \oplus A_2$ das durch A_1 und A_2 bestimmte Geradenbüschel heißen.

Polarität eines Punktes X und einer Geraden A :

X ist Pol von $A \Leftrightarrow A$ ist Polare von $X \Leftrightarrow \mathfrak{x} \times a = 0$.

Wegen $\mathfrak{x}, a \neq 0$ ist $\mathfrak{x} \times a = 0 \Leftrightarrow \mathfrak{x} = \lambda a$ ($\lambda \neq 0$). Hieraus folgt leicht (dabei sei $p(X)$ die Polare von X und $P(A)$ der Pol von A):

- (1) $p(X)$ und $P(A)$ sind durch X bzw. A eindeutig bestimmt;
- (2) $X \perp Y \Rightarrow p(X) \perp p(Y)$;
- (3) $A \perp B \Rightarrow P(A) \perp P(B)$;
- (4) $X \perp Y \Rightarrow X p(Y) \wedge Y p(X)$.

Nun lassen sich die der Lösung der übrigen Grundaufgaben in den oben beschriebenen Modellen entsprechenden weiteren Begriffe bilden:

Die Verbindungsgerade zweier Punkte:

Der Schnittpunkt zweier Geraden:

Die Gerade A ist Verbindungsgerade

Der Punkt X ist Schnittpunkt zweier

zweier verschiedener Punkte X und $Y \Leftrightarrow$ verschiedener Geraden A und $B \Leftrightarrow$
 es existiert ein $\alpha \neq 0$: es existiert ein $\xi \neq 0$:
 $a = \alpha(\xi \times \eta)$ bzw. $A = R(\xi \times \eta)$; $\xi = \xi(a \times b)$ bzw. $X = R(a \times b)$.

Aus der Definition der Inzidenz sofort folgt, daß Punktreihe und Verbindungsgerade bzw. Schnittpunkt und Geradenbüschel im Sinne wechselseitiger Inzidenz miteinander identifizierbar sind.

Kollinearität dreier Punkte:

Büschelage dreier Geraden:

Aus dem Gesagten ergibt sich (wenn wir das Spatprodukt von ξ, η und ζ mit $(\xi\eta\zeta)$ bezeichnen)

X, Y, Z sind kollinear $\Leftrightarrow (\xi\eta\zeta) = 0$, A, B, C liegen im Büschel $\Leftrightarrow (abc) = 0$.

Das Lot von X auf A :

Das Lot L von X auf A ist die Verbindungsgerade von X und $P(A)$; wegen $p = \lambda a$ gilt $L = Rl$, und es existiert ein $\lambda \neq 0$: $l = \lambda(\xi \times a)$ bzw. $L = R(\xi \times a)$.

Offenbar ist L genau dann nicht eindeutig bestimmt, wenn $\xi = \alpha a$, d. h., wenn X der Pol von A ist.

Die Senkrechte in Y zu A :

Völlig analog ergibt sich $S = R(\eta \times a)$ für die Senkrechte S in Y auf A . Hat man $S_1 = R(\eta_1 \times a)$ und $S_2 = R(\eta_2 \times a)$, so ergibt sich für den Schnittpunkt

$$S_1 \cap S_2 = R[(\eta_1 \times a) \times (\eta_2 \times a)] = R[(\eta_1 \eta_2 a) a - (a \eta_2 a) \eta_1]$$

und damit wegen des Verschwindens des zweiten Spatproduktes $S_1 \cap S_2 = Ra$; d. h. aber: Alle Senkrechten zu einer Geraden gehen durch einen Punkt, den Pol der Geraden.

Gemeinlot zweier Geraden:

Eine Gerade, die zu zwei gegebenen Geraden orthogonal ist, soll Gemeinlot der beiden Geraden heißen. Es seien $A = Ra$ und $B = Rb$ zwei voneinander verschiedene Geraden. Dann ist aber $C = R(a \times b)$ eindeutig bestimmt und $C \perp A$ sowie $C \perp B$, d. h., zwei verschiedene Geraden besitzen genau ein Gemeinlot. Dual existiert zu zwei verschiedenen Punkten genau ein zu beiden orthogonaler Punkt.

Das Mittelpunktpaar eines Punktepaars (X, Y) :

Das Winkelhalbierendenpaar eines Geradenpaares (A, B) :

Die Mittelpunkte bzw. Winkelhalbierenden werden als eindimensionale Teilräume durch die Summe oder Differenz der normierten Ausgangsvektoren aufgespannt ($i = 1, 2$):

$$M_i = R\left(\frac{1}{\sqrt{(\xi \cdot \xi)}} \xi \pm \frac{1}{\sqrt{(\eta \cdot \eta)}} \eta\right)$$

$$W_i = R\left(\frac{1}{\sqrt{(a \cdot a)}} a \pm \frac{1}{\sqrt{(b \cdot b)}} b\right).$$

Abstände, Winkel, Kongruenz:

Abstand zweier Punkte:

Aus den obigen Beziehungen und bei Beachtung der entsprechenden Definition des Abstandes auf der Kugel vom Radius r_0 mit Gegenpunktidentifizierung gewinnt man für den Ab-

Winkel zwischen zwei Geraden:

So wie zwei Punkte zunächst zwei Strecken bestimmen, von denen wir eine als Strecke \overline{XY} im engeren Sinne, die andere als Kostrecke \underline{XY} bezeichnen wollen, bestimmen zwei Geraden zu-

stand $d(X, Y)$ zweier Punkte X und Y

$$d(X, Y) = r_0 \arccos \frac{|(\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y})|}{\sqrt{(\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{x})(\mathfrak{y} \cdot \mathfrak{y})}}$$

Man kann zeigen, daß durch d eine *Metrik* definiert wird; die Dreiecksungleichung wird dabei auf die Cauchysche Ungleichung in euklidischen Vektorräumen zurückgeführt.

nächst zwei Winkel; wir bezeichnen den kleineren wiederum als Winkel \overline{AB} im engeren Sinne, den anderen als Kowinkel \underline{AB} . Als Größe des Winkels zweier Geraden wollen wir in diesem Sinne das Maß des Winkels im engeren Sinne einführen und mit $\sphericalangle(A, B)$ bezeichnen; es ist $\sphericalangle(A, B) = d(A, B)/r_0$ und

$$d(A, B) = r_0 \arccos \frac{|(a \cdot b)|}{\sqrt{(a \cdot a)(b \cdot b)}}$$

Abstand eines Punktes von einer Geraden:

Da der Abstand eines Punktes X von einer Geraden A bis auf den Faktor r_0 gleich dem Komplement des Abstandes des Punktes von $P(A)$ ist, erhält man für den Abstand $d(X, A)$ eines Punktes X von einer Geraden A

$$d(X, A) = r_0 \arcsin \frac{|(\mathfrak{x} \cdot a)|}{\sqrt{(\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{x})(a \cdot a)}}$$

Kongruenz von Punktepaaren:

Zwei Punktepaare (X, Y) und (Z, T) sind kongruent \Leftrightarrow

$$\frac{(\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y})^2}{(\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{x})(\mathfrak{y} \cdot \mathfrak{y})} = \frac{(\mathfrak{z} \cdot \mathfrak{t})^2}{(\mathfrak{z} \cdot \mathfrak{z})(\mathfrak{t} \cdot \mathfrak{t})};$$

Kongruenz von Geradenpaaren:

Zwei Geradenpaare (A, B) und (C, D) sind kongruent \Leftrightarrow

$$\frac{(a \cdot b)^2}{(a \cdot a)(b \cdot b)} = \frac{(c \cdot d)^2}{(c \cdot c)(d \cdot d)}$$

Entfernungskreise, Abstandslinien:

Für den Kreis um X_0 mit dem Radius ϱ_0 erhält man (wegen $0 \leq \frac{|(\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y})|}{\sqrt{(\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{x})(\mathfrak{y} \cdot \mathfrak{y})}} \leq 1$) aus $d(X, X_0) = \varrho_0$ die Gleichung

$$\frac{|\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{x}_0|}{(\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{x})} = \sqrt{(\mathfrak{x}_0 \cdot \mathfrak{x}_0)} \cos \frac{\varrho_0}{r_0}$$

oder nach Normierung $|\mathfrak{x}^0 \cdot \mathfrak{x}_0^0| = \cos \varrho_0/r_0$ und dual dazu für den Ort konstanten Abstandes a_0 von der Geraden A_0

$$|\mathfrak{x}^0 \cdot a_0^0| = \sin \frac{a_0}{r_0}$$

Ist $A_0 = p(X_0)$, so ist

$$\varrho_0 = \frac{r_0 \pi}{2} - a_0$$

und umgekehrt.

Aus dem V -Modell heraus lassen sich besonders einfach die trigonometrischen Beziehungen für das elliptische Dreieck gewinnen. Die Beziehungen stimmen mit den entsprechenden Beziehungen der sphärischen Trigonometrie überein, falls man nur mit den Argumenten a, b, c bzw. α, β, γ die Längen der Seiten bzw. Größen der gegenüberliegenden Winkel bezeichnet, mögen die Seiten bzw. Winkel nun spitz, rechte oder stumpf sein. In bekannter Weise gewinnt man aus der Identität von

LAGRANGE den Seitenkosinussatz und daraus im Spezialfall den elliptischen Satz des PYTHAGORAS: Sind die Eckpunkte A, B, C durch Ra, Rb, Rc gegeben, dann ist

$$\cos a = \mathfrak{b}^0 \cdot \mathfrak{c}^0, \quad \alpha = \sphericalangle (\text{Ebene } OAB, \text{Ebene } OAC) = \sphericalangle (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}; \mathfrak{a} \times \mathfrak{c}).$$

Aus

$$\cos \alpha = \frac{(\mathfrak{x}^0 \times \mathfrak{y}^0) \cdot (\mathfrak{x}^0 \times \mathfrak{z}^0)}{|\mathfrak{x}^0 \times \mathfrak{y}^0| |\mathfrak{x}^0 \times \mathfrak{z}^0|}$$

erhält man

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha,$$

woraus sich für $\alpha = 90^\circ$

$$\cos a = \cos b \cos c$$

ergibt.

Der Sinussatz ist gewinnbar aus dem entsprechenden Ansatz

$$\sin \alpha = \frac{|(\mathfrak{x}^0 \times \mathfrak{y}^0) \times (\mathfrak{x}^0 \times \mathfrak{z}^0)|}{|\mathfrak{x}^0 \times \mathfrak{y}^0| |\mathfrak{x}^0 \times \mathfrak{z}^0|},$$

man erhält $\sin h_b = \sin \alpha \sin c$ und ebenso $\sin h_c = \sin \alpha \sin b$, also schließlich

$$\sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma = \sin a : \sin b : \sin c.$$

Der Winkelkosinussatz wird ebenfalls aus der Identität von LAGRANGE gewonnen: Es sei $c = \sphericalangle (\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ usw., weiter seien $\alpha = \sphericalangle (\mathfrak{r}, \mathfrak{b})$, $\beta = \sphericalangle (\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ und $\gamma = \sphericalangle (\mathfrak{s}, \mathfrak{t})$; die Vektoren denken wir uns sämtlich bereits als Einheitsvektoren. Man findet aus entsprechenden Ansätzen mittels der Basis $\{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}\}$

$$\mathfrak{r} = -\cot ca + \frac{1}{\sin c} \mathfrak{b},$$

$$\mathfrak{b} = -\cot ba + \frac{1}{\sin b} \mathfrak{c},$$

$$\mathfrak{m} = -\cot ab + \frac{1}{\sin a} \mathfrak{c},$$

$$\mathfrak{n} = -\cot cb + \frac{1}{\sin c} \mathfrak{a},$$

$$\mathfrak{s} = -\cot bc + \frac{1}{\sin b} \mathfrak{a},$$

$$\mathfrak{t} = -\cot ac + \frac{1}{\sin a} \mathfrak{b}.$$

Dann findet man einmal

$$(\mathfrak{r} \times \mathfrak{b}) \cdot (\mathfrak{m} \times \mathfrak{n}) = \sin \alpha \sin \beta \cos c,$$

zum andern

$$(\mathfrak{r} \times \mathfrak{b}) \cdot (\mathfrak{m} \times \mathfrak{n}) = (\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{m}) (\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{n}) - (\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{n}) (\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{m});$$

nach einiger Rechnung findet man, daß der letzte Ausdruck mit $(\mathfrak{s} \cdot \mathfrak{t}) + (\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{b}) (\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n})$ übereinstimmt, woraus

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c$$

folgt.

Zur Gewinnung der metrischen Fundamentalform des V -Modells geht man aus von

$$d(P_1, P_2) = r_0 \arccos \frac{|\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y}|}{\sqrt{(\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{x}) (\mathfrak{y} \cdot \mathfrak{y})}}.$$

Geht man von $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}(x_1, x_2, x_3)$ mittels $x_2/x_1 = \xi_1$ und $x_3/x_1 = \eta_1$ zu inhomogenen Koordinaten über, so ist

$$\cos \frac{d(P_1, P_2)}{r_0} = \frac{|1 + \xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2|}{\sqrt{1 + \xi_1^2 + \eta_1^2} \sqrt{1 + \xi_2^2 + \eta_2^2}}.$$

Hieraus findet man leicht

$$\sin \frac{d(P_1, P_2)}{r_0} = \sqrt{\frac{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + (\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1)^2}{(1 + \xi_1^2 + \eta_1^2)(1 + \xi_2^2 + \eta_2^2)}}.$$

Setzen wir nun $\xi_1 = \xi$, $\xi_2 = \xi + \Delta\xi$, $\eta_1 = \eta$ und $\eta_2 = \eta + \Delta\eta$ sowie $d(P_1, P_2) = \Delta s$, so ist

$$\sin^2 \frac{\Delta s}{r_0} = \frac{\Delta\xi^2 + \Delta\eta^2 + (\xi\Delta\eta - \eta\Delta\xi)^2}{(1 + \xi^2 + \eta^2)(1 + (\xi + \Delta\xi)^2 + (\eta + \Delta\eta)^2)}.$$

Bei Grenzübergang $\Delta s \rightarrow 0$ und unter Beachtung von $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$ wird

$$ds^2 = r_0^2 \frac{d\xi^2 + d\eta^2 + (\xi d\eta - \eta d\xi)^2}{(1 + \xi^2 + \eta^2)^2}$$

bzw.

$$ds^2 = \frac{r_0^2(1 + \eta^2)}{(1 + \xi^2 + \eta^2)^2} d\xi^2 + \frac{-2\xi\eta r_0^2}{(1 + \xi^2 + \eta^2)^2} d\xi d\eta + \frac{r_0^2(1 + \xi^2)}{(1 + \xi^2 + \eta^2)^2} d\eta^2.$$

LITERATUR

- [1] GANS, D.: A new model of the hyperbolic plane. Amer. Math. Monthly 73 (1966), 291—295.
- [2] LIEBOLD, G.: Zu Fragen der Elementargeometrie in der (klassischen) elliptischen Ebene. Potsdamer Forschungen, Reihe B, Heft 3 (1974), 187—202.
- [3] LIEBOLD, G.: Zu einigen Modellen der (klassischen) elliptischen Ebene. Dissertation, TH Karl-Marx-Stadt 1975.

Manuskripteingang: 13. 1. 1976

VERFASSER:

GERHARD LIEBOLD, Sektion Mathematik der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt

