

Werk

Titel: Über die Struktur von Simplexen in r -dimensionalen Räumen konstanter Krümmung unt...

Autor: BÖHM, J.

Jahr: 1977

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?301416052_0006|log14

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

Über die Struktur von Simplexen in r -dimensionalen Räumen konstanter Krümmung unter besonderer Berücksichtigung des elliptischen Falles

JOHANNES BÖHM

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. Wilhelm Maier,
zum 80. Geburtstag gewidmet

1. Einleitung

Die folgenden Untersuchungen beziehen sich auf geometrische Objekte in einem r -dimensionalen Riemannschen Raum $\mathfrak{R}_x^{(r)}$ konstanter Krümmung, wobei das normierte „Riemannsche Krümmungsmaß“ $\kappa = 1/R^2$ (R konstanter Krümmungsradius) die Werte $\kappa := 1$ (elliptischer Raum), $\kappa := -1$ (hyperbolischer Raum) und $\kappa := 0$ (euklidischer Raum) annehmen kann. Die zur Debatte stehenden geometrischen Objekte im Raum $\mathfrak{R}_x^{(r)}$ sollen unabhängig von ihrer Lage in diesem Raum betrachtet und hinsichtlich gewisser invarianter Eigenschaften untersucht werden. Mit der Gruppe der (direkten) Bewegungen $\mathfrak{B}_x^{(r)}$ des betreffenden Raumes $\mathfrak{R}_x^{(r)}$ wird dieser zu einem Kleinschen Raum $\mathfrak{Kl}_x^{(r)} = (\mathfrak{R}_x^{(r)}, \mathfrak{B}_x^{(r)})$ von konstanter Krümmung κ gemacht.

In einem solchen Raum wird der Begriff eines Simplexes in der Weise definiert, daß er in allen drei Fällen $\kappa = 0, \pm 1$ brauchbar ist (Definition 1). Schwierigkeiten gibt es dabei zunächst im elliptischen Raum. Diese können durch die Forderung, daß eine geeignete Hyperkugel des betreffenden Raumes existiert, in deren Inneren das Simplex eingebettet werden kann, beseitigt werden. Es geht aus den Betrachtungen hervor, daß diese Forderung der „Hyperkugeleigenschaft“ ein von den topologischen Verhältnissen des elliptischen Raumes herrührende innergeometrische Eigenschaft eines Simplexes darstellt. Derartige Simplexe im elliptischen Raum, *zulässige* genannt, sind Gegenstand der weiteren Untersuchungen. Zunächst werden die verschiedenen Möglichkeiten von zulässigen und nichtzulässigen Simplexen abgezählt, die genau dieselben Eckpunkte besitzen (Satz 3). Ihre Zahl ist für jede Dimension $r \geq 1$ stets größer als 1. Dann wird die Menge der zu einem zulässigen Simplex gehörigen Nebensimplexe, im zweidimensionalen Fall auch *kolunare* Simplexe genannt, ins Auge gefaßt und Aussagen über Anzahlen von stumpfen Kanten in den Nebensimplexen bewiesen. Es ergibt sich daraus eine Einteilung der r -dimensionalen Simplexe in gewisse Typen, die sich durch Anzahl und gegenseitige Lage der stumpfen Kanten unterscheiden. Für diese Anzahlen werden Maximum-Minimum-Betrachtungen angestellt, die sogenannte reduzierte zulässige Nebensimplexe mit möglichst wenig stumpfen Kanten als geeignete Repräsentanten für die einzelnen Typen erklären und unter diesen als einen Extremalfall ein Simplex von einer besonderen und einfachen Struktur (Definition 7) liefern (Sätze 5 und 6). Im letzten Kapitel wird ein Simplexbaukasten für zulässige Simplexe angegeben, der aus sämtlichen zulässigen Simplexen mit nichtstumpfen Kanten besteht (Satz 7). Dieser Baukasten gestattet, für weitere Unter-

suchungen (hinsichtlich eines feineren Baukastens für die Menge der Simplexe bzw. auch für die Menge allgemeiner eigentlicher Polyeder) alle drei Räume konstanter Krümmung in gleicher Weise zu behandeln, wenn die dreieckigen Wände eines r -dimensionalen Simplexes als seine wesentlichen Objekte bei den Untersuchungen verwendet werden. In diesem Fall genügt es, z. B. die Simplexe in einem euklidischen Raum explizit zu diskutieren, wenn von Realisierungsmöglichkeiten abgesehen wird. Die Ergebnisse werden dann automatisch auch für die Simplexe im hyperbolischen sowie im elliptischen Raum gelten. Ein solcher feinerer Baukasten könnte etwa die Menge der Orthoscheme sein. Ein diesbezüglicher allgemeiner Beweis dafür steht allerdings noch aus (vgl. [8]).

Mit Fragestellungen zum Begriff des Simplexes haben ich u. a. H. S. M. COXETER [5], L. FEJES TÓTH [6], B. GRÜNBAUM [7], H. HADWIGER [8] und L. SCHLÄFLI [11] beschäftigt (vgl. auch [1]). Zu den topologischen Eigenschaften eines Orthoschems als einem speziellen Simplex finden sich vor allem Untersuchungen bei [1, 4, 8] und [11]. Polyederbaukästen spielen bei H. HADWIGER [8] und E. HERTEL [9] eine Rolle.

2. Simplexe

In $\mathfrak{R}_x^{(r)}$ soll als ein linear begrenztes geometrisches Objekt von grundlegender Bedeutung ein r -dimensionales Simplex rekursiv definiert werden. Begonnen wird zunächst mit den niederdimensionalen Sonderfällen.

Definition 1. In $\mathfrak{R}_x^{(r)}$ wird definiert: Als *leeres Simplex* wird die leere Menge $\emptyset$ erklärt. Ein nulldimensionales Simplex besteht aus genau einem Punkt, dem *Eckpunkt* P_1 . Ein eindimensionales Simplex $R^{(2)} = [\Omega^{(2)}, \bar{R}^{(2)}]$ besteht aus zwei voneinander verschiedenen Punkten, den Eckpunkten P_1 und P_2 , die zur Eckpunktmenge $\Omega^{(2)} = \{P_1, P_2\}$ zusammengefaßt werden, und dem *Simplexkörper* $\bar{R}^{(2)}$, hier speziell *Kante* des Simplexes genannt. Wenn die Zwischenrelation gilt, wird die Kante $\bar{R}^{(2)}$ als die Menge aller Punkte erklärt, die zwischen P_1 und P_2 liegen einschließlich der Eckpunkte P_1 und P_2 .

Für $\kappa := 0$ und $\kappa := -1$ wird durch Definition 1 der Begriff der Kante festgelegt. Für $\kappa := 1$ sind im elliptischen Raum zwei Möglichkeiten für die Fixierung einer Kante mit den Eckpunkten P_1 und P_2 möglich. Darum beschränkt sich die hier gegebene Definition einer Kante zunächst nur auf den euklidischen und hyperbolischen Fall. Sie wird am Ende durch die Erweiterung auf den elliptischen Fall ergänzt werden.

Im folgenden sind unter Hyperebenen stets solche im Sinne des betreffenden Riemannschen Raumes konstanter Krümmung zu verstehen.

Definition 2. Ein r -dimensionales Simplex $R^{(n)}$ in einem Kleinschen Raum $\mathfrak{R}_x^{(r)}$ konstanter nicht positiver Krümmung $\kappa := 0$ oder $\kappa := -1$, $r \geq 2$, ist das System

$$[\Omega^{(n)}, \mathfrak{B}_{n-2}^{(n)}, \mathfrak{B}_{n-3}^{(n)}, \dots, \mathfrak{B}_1^{(n)}, \bar{R}^{(n)}, \mathfrak{R}_{n-2}^{(n)}, \mathfrak{R}_{n-3}^{(n)}, \dots, \mathfrak{R}_1^{(n)}] \quad (1)$$

mit den folgenden Eigenschaften:

a) $n = r + 1$.

b) $\Omega^{(n)} = \{P_1, P_2, \dots, P_n\} \subset \mathfrak{R}_x^{(r)}$ ist die (erzeugende) *Eckpunktmenge* mit der Eigenschaft, daß die Menge dieser Punkte paarweise voneinander verschieden und nicht bereits in einem Unterraum $\mathfrak{R}_x^{(q)}$ mit gleichem κ und einer Dimension $q < r$ enthalten ist.

c) $\mathfrak{B}_k^{(n)}$ ($k = 1, 2, \dots, n-2$) ist die Menge der k -dimensionalen *Wände*, die jeweils aus $k+1$ Punkten der Eckpunktmenge erzeugt werden. Diese Wände sind k -dimensionale Simplexe. Es gibt von ihnen genau $\binom{n}{k+1}$ Stück. Für $k=1$ heißt diese Menge speziell die *Kantenmenge* und ihre Elemente die *Kanten* des Simplexes. Eine Kante ist gemäß Definition 1 erklärt. Die Menge $\mathfrak{B}_1^{(n)}$ wird bei zusätzlicher Berücksichtigung der gegenseitigen Lage ihrer Elemente zueinander das *Kantenskelett* (auch kurz *Skelett*) des Simplexes genannt. Eine Wand aus $\mathfrak{B}_k^{(n)}$ ($1 \leq k \leq n-2$) kann auch als ein *Untersimplex* von $R^{(n)}$ aufgefaßt werden. Für $k=2$ wird sie gelegentlich *dreieckige Wand* genannt.

d) $\bar{R}^{(n)}$ ist der *Simplexkörper*, der von den Elementen aus $\mathfrak{B}_{n-2}^{(n)}$ derart berandet wird, daß die Vereinigung der Simplexkörper aller Wände aus $\mathfrak{B}_{n-2}^{(n)}$, *Simplexrand* genannt, den Raum, abgesehen vom Simplexrand, in zwei Klassen von Punkten, *innere* und *äußere* Simplexpunkte, zerlegt. Dabei wird gefordert, daß die Menge der inneren Simplexpunkte eine konvexe Punktmenge darstellt. Der Simplexkörper besteht aus den inneren Simplexpunkten einschließlich Simplexrand. Es ist daher möglich, eine r -dimensionale Hyperkugel anzugeben, so daß der Simplexkörper ganz im Inneren dieser Hyperkugel liegt. Es läßt sich darum der Simplexkörper auch darstellen in der Form

$$\bar{R}^{(n)} = \bigcap_{\Omega^{(n)} \subset H} H, \quad (2)$$

wobei der Durchschnitt über alle r -dimensionalen Hyperhalbräume H einschließlich ihrer begrenzenden Hyperebene zu bilden ist, die die Menge $\Omega^{(n)}$ enthalten.

e) $\mathfrak{K}_k^{(n)}$ ist die Menge der *Keilwinkel k -ter Ordnung*. Ein solcher Keilwinkel wird von zwei Wänden w_1 und w_2 aus $\mathfrak{B}_k^{(n)}$ erzeugt mit der Forderung, daß der Durchschnitt $w_0 = w_1 \cap w_2$ eine Wand aus $\mathfrak{B}_{k-1}^{(n)}$ ist. w_1 und w_2 liegen jeweils in einer k -dimensionalen Hyperebene h_1 bzw. h_2 . Ihr Durchschnitt $h_0 = h_1 \cap h_2$ wird der *Scheitel* des Keilwinkels genannt. In h_0 liegt w_0 .

f) h_0 zerlegt h_1 und h_2 in Halbhyperebenen. Es werden die beiden Halbhyperebenen h_1^+ und h_2^+ mit der Eigenschaft $w_i \subset h_i^+ \subset h_i$ ($i = 1, 2$) betrachtet. h_1^+ und h_2^+ werden die beiden *Schenkel* des Keilwinkels genannt. Die Dimension der Schenkel gibt die Ordnung des Keilwinkels an. Die beiden Schenkel eines Keilwinkels zerlegen den Raum in zwei jeweils zusammenhängende Punktmenge, als *Winkelinneres* und *Winkeläußeres* bezeichnet. Das Winkelinnere ist diejenige der beiden Punktmenge, zu der das Simplexinnere gehört.

Die Größe eines Keilwinkels liegt zwischen 0 und π und wird erklärt als die Größe des Winkels zwischen den beiden Halbhyperebenen h_i^+ . Ein Winkel zwischen zwei Halbhyperebenen wird seinerseits durch das Supplement zu π der Größe des Winkels zwischen den orientierten Normalen der beiden Halbhyperebenen gemessen. Dabei sind die Normalen nach der Seite der betreffenden Hyperebene gerichtet, auf der sich auch die andere Hyperebene befindet. Es sei angemerkt, daß die Winkelmessung auch mit Hilfe des normierten Maßes der Oberfläche eines Hyperkugelausschnitts vorgenommen werden kann, wobei der Mittelpunkt dieser k -dimensionalen Hyperkugel ein beliebiger Punkt des Scheitels des Keilwinkels ist, der Hyperkugelausschnitt von den beiden Halbhyperebenen h_1^+ und h_2^+ begrenzt wird und im Innern des Keilwinkels liegt. Diese Maßzahl ist unabhängig von der Auswahl des Hyperkugelmittelpunktes auf dem Scheitel und ergibt bei geeigneter Normierung dieselbe Maßzahl wie bei der Winkelmessung durch das Supplement des Normalenwinkels (vgl. H. HOPF [10]). Wie üblich werden die Keilwinkel der Größe γ mit $\gamma = \pi/2$ *rechte Winkel* genannt, für γ

mit $0 < \gamma < \pi/2$ heißt der Keilwinkel *spitz* und für γ mit $\pi/2 < \gamma < \pi$ heißt er *stumpf*.

Je nach Aufgabenstellung wird das eine oder das andere Element der angegebenen Struktur stärker berücksichtigt. Im Fall $n = 3$ wird beispielsweise speziell das Simplex *Dreieck* und der Simplexkörper *Dreiecksfläche* genannt. Die Elemente der Kantenmenge $\mathfrak{B}_1^{(3)}$ heißen hier speziell *Seiten* des Dreiecks, und die Keilwinkel erster Ordnung aus $\mathfrak{K}_1^{(3)}$ heißen *Dreieckswinkel*. Bei gewissen Problemstellungen kommt es dann etwa z. B. im wesentlichen auf die Eckpunktmenge $\mathfrak{Q}^{(3)}$ des Dreiecks an, so daß man unter einem Dreieck in diesem Zusammenhang vor allem die Menge der drei Eckpunkte aus $\mathfrak{Q}^{(3)}$ im Sinne hat. In anderen Zusammenhängen sind es vor allem die Seiten des Dreiecks, also die Menge $\mathfrak{B}_1^{(3)}$, so daß dann hierbei unter einem Dreieck insbesondere das Kantenskelett in den Vordergrund der Betrachtungen rückt (vgl. [3]). Bei weiteren Aufgaben kann es auch die Dreiecksfläche sein, die als das Wesentliche von $R^{(3)}$ angesehen wird.

Für $\kappa := 0$ und $\kappa := -1$ gilt, daß zu jeder beliebigen Eckpunktmenge $\mathfrak{Q}^{(n)}$ in eindeutiger Weise ein Simplex erklärt ist. Der Beweis folgt aus der Darstellung (2) eines Simplexkörpers als Durchschnitt aller berandeten Hyperhalbräume, die $\mathfrak{Q}^{(n)}$ enthalten.

In den weiteren Untersuchungen wird es vor allem die Eckpunktmenge $\mathfrak{Q}^{(n)}$ eines Simplexes $R^{(n)}$ mit seinem Kantenskelett sein, die besondere Beachtung verdient, so daß im folgenden bei der Betonung von $\mathfrak{Q}^{(n)} = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ ein Simplex einfach durch $R^{(n)} = P_1, P_2, \dots, P_n$ angegeben wird. Das hat einen Sinn, da nach der oben gemachten Bemerkung aus $\mathfrak{Q}^{(n)}$ die weiteren Elemente der Struktur (1) in eindeutiger Weise für $\kappa := 0$ und $\kappa := -1$ abgeleitet werden können.

3. Zulässige Simplexe im elliptischen Raum

Auch für $\kappa := 1$ wird dahin tendiert, ein Simplex $R^{(n)}$ ebenfalls durch die Struktur (1) zu erklären, wobei zur Gewährleistung von d) und f) in Definition 2 zusätzliche Forderungen zu stellen sind. Diese beziehen sich vor allem auf das Kantenskelett mit seinen Kanten aus der Kantenmenge $\mathfrak{B}_1^{(n)}$. Durch zwei Punkte auf einer elliptischen Geraden von der Größe π ist bekanntlich, wie bereits erwähnt, nicht in eindeutiger Weise eine Kante erklärt. Es kommt offenbar darauf an, aus den jeweiligen beiden Möglichkeiten für eine Kante eine geeignete zu fixieren, so daß der Simplexkörper den elliptischen Raum in zwei Klassen von (inneren bzw. äußeren) Simplexpunkten zerlegt. Es wird dann auch für $\kappa := 1$ möglich sein, aus dem Kantenskelett eines Simplexes $R^{(n)}$ die weiteren Elemente der Struktur (1) in eindeutiger Weise zu bestimmen. Damit aber ein solches elliptisches Simplex existiert, müssen gewisse Bedingungen erfüllt sein, die im folgenden hergeleitet werden. Dazu wird zunächst angegeben

Definition 3. Bezüglich des Kleinschen Raumes $\mathfrak{K}_\kappa^{(r)}$ mit $\kappa := 1$ wird das System

$$[\mathfrak{Q}^{(n)}, \mathfrak{B}_{n-2}^{(n)}, \mathfrak{B}_{n-3}^{(n)}, \dots, \mathfrak{B}_1^{(n)}, \mathfrak{K}_{n-2}^{(n)}, \mathfrak{K}_{n-3}^{(n)}, \dots, \mathfrak{K}_1^{(n)}] \quad (3)$$

ein (*elliptisches*) Simplex $R^{(n)}$ genannt, wenn die Eigenschaften a), b), c) und e) der Definition 2 gelten. Eigenschaft f) von Definition 2 ist zu ersetzen durch:

f₀) Die Ebenen h_i ($i = 1, 2$) werden die beiden *Schenkel des Keilwinkels* genannt.

Ferner muß noch erfüllt sein:

cc) Für jeweils zwei beliebige Wände $R^{(h)} \in \mathfrak{B}_{h-1}^{(n)}$ und $R^{(k)} \in \mathfrak{B}_{k-1}^{(n)}$, $2 \leq h < k \leq n - 2$,

bei denen die Eckpunktmenge von $R^{(k)}$ Teilmenge von der Eckpunktmenge von $R^{(k)}$ ist, muß das Kantenskelett von $R^{(k)}$ Teilmenge des Kantenskeletts von $R^{(k)}$ sein.

Nun ergibt sich folgende Fragestellung. Im elliptischen r -dimensionalen Raum ($r \geq 1$) seien $n (= r + 1)$ Punkte gegeben, die nicht bereits in einem elliptischen Raum niedrigerer Dimensionen liegen. Sie mögen die Eckpunktmenge $\mathfrak{Q}^{(n)}$ darstellen. Welche Kantenkonfiguration ergibt dann für diese vorgelegten n Punkte das Skelett eines Simplexes in dem betreffenden r -dimensionalen elliptischen Raum, bei dem der Simplexrand erklärt ist und wobei der gesamte elliptische Raum durch den Simplexrand in zwei jeweils zusammenhängende offene disjunkte Mengen zerlegt wird — die Menge der inneren und die Menge der äußeren Punkte —, so daß eine Hyperkugel mit Radius ϱ , $0 < \varrho < \pi/2$, existiert, die in ihrem Inneren sämtliche inneren Punkte des Simplexes enthält? Wenn eine Hyperkugel mit der angegebenen Eigenschaft existiert, dann soll kurz gesagt werden, das Simplex besitzt die *Hyperkugeleigenschaft*.

Definition 4. Ein elliptisches Simplex wird *zulässiges Simplex* genannt, wenn es die Hyperkugeleigenschaft besitzt. Andernfalls heißt es *nichtzulässig*.

Zum Beispiel ergibt die Kantenkonfiguration für die drei Punkte 1, 2, 3 in Abb. 1, die durch Doppelstrich gezeichnet wurde, kein zulässiges Simplex. Infolge der Nichtorientierbarkeit der elliptischen Ebene zerlegt dieser Kantenzug in Abb. 1 die Ebene

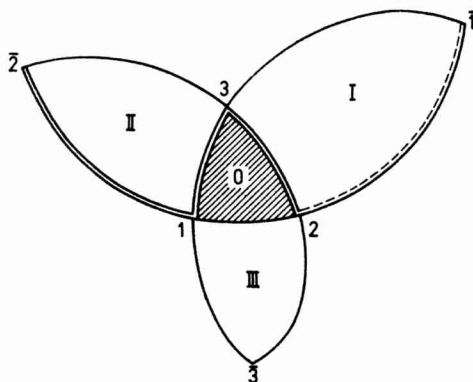


Abb. 1

nicht in zwei zusammenhängende disjunkte Punktmengen, die durch den Kantenzug als Rand des Simplexes getrennt werden. Es gibt demzufolge keine inneren und keine äußeren Punkte, und erst recht nicht ist die Hyperkugeleigenschaft für das Dreieck erfüllt. Daraus wird ersichtlich, daß es bei konkreter Vorgabe von $\mathfrak{Q}^{(n)}$ Kantenkonfigurationen geben kann, die das Skelett eines zulässigen oder auch eines nichtzulässigen Simplexes darstellen.

Zur weiteren Illustration der besonderen Verhältnisse im elliptischen Raum sei an folgendes erinnert. Die Menge der Keilwinkel $(n - 2)$ -ter Ordnung $\mathfrak{K}_{n-2}^{(n)} = \{\alpha_{ik}^{(2)}\}$ ($i = 1, 2, \dots, n - 1$; $k = 2, \dots, n$; $i \neq k$) reicht aus, um ein Simplex mit der Eckpunktmenge $\mathfrak{Q}^{(n)} = \{1, 2, \dots, n\}$ in dem Kleinschen Raum $\mathfrak{R}_n^{(r)} = (\mathfrak{R}_n^{(r)}, \mathfrak{B}_n^{(r)})$ ($n = 0, \pm 1$) mit der Einschränkung für $n = 1$, daß das Simplex ein zulässiges ist, eindeutig zu bestimmen. Denn ohne diese Einschränkung gäbe es für $n = 1$ Keilwinkel, bei denen nicht zwischen Winkelinnerem und Winkeläußeren unterschieden werden könnte, so daß keine Aussagen über Innenwinkelgrößen gemacht werden können. Je nach dem in Rede stehenden Fall eines elliptischen, hyperbolischen oder

euklidischen r -dimensionalen Raumes müssen gewisse Ungleichheiten für die Größen dieser Keilwinkel erfüllt sein. Darüber hinaus besteht im euklidischen Fall sogar eine Bindungsgleichung zwischen den Größen $|\alpha_k^{(2)}|$ aller Keilwinkel, derzufolge zum Ausdruck kommt, daß unter den $\binom{n}{2}$ Keilwinkeln $(n-2)$ -ter Ordnung nur $\binom{n}{2} - 1$ Stück — bis auf die zusätzlichen Ungleichheiten — voneinander unabhängig sind (vgl. [11, 1]). Für den elliptischen Fall mit $\kappa = 1$ findet man bei L. SCHLÄFLI [11] auch heute immer noch sehr brauchbare Formeln für die Größen der Kanten in Abhängigkeit von den Keilwinkeln $(n-2)$ -ter Ordnung:

Es mögen die beiden Eckpunkte r und s des Simplexes $R^{(n)}$ durch die Kante r, s verbunden sein. Ihre Größe sei mit $|r, s|$ bezeichnet. In [11] wird $\cos |r, s|$ durch den Quotienten Q von zwei homogenen Formen dargestellt. Der Zähler ist homogen vom ersten Grade in den Cosinuswerten der Größen derjenigen Keilwinkel, die von der festen Wand w_l des Simplexes, die dem Eckpunkt l gegenüberliegt, und den übrigen Simplexwänden jeweils erzeugt werden mit $l = r$ (oder auch in gleichberechtigter Weise mit $l = s$). Der Nenner ist homogen vom zweiten Grade in den Cosinuswerten der Größen derselben soeben genannten Keilwinkel. Werden darum die Größen dieser Keilwinkel, in denen diese beiden Formen homogen sind, sämtlich durch ihre Supplemente zu π ersetzt, dann ergibt sich für den Quotienten der beiden Formen der Wert $-Q$. Wird dieser Wert wiederum als Cosinus der Größe einer Kante aufgefaßt, dann muß diese von der Größe $\pi - |r, s|$ sein.

Dieses findet geometrisch seinen Niederschlag in der Tatsache, daß es zu einem elliptischen Simplex $R^{(n)}$ gewisse weitere Simplexe, *Nebensimplexe* genannt, gibt, bei denen bestimmte Winkel und Kanten durch solche supplementärer Größe (bezüglich π) zu ersetzen sind. Derartige Kanten sollen *Supplementkanten* genannt werden.

Definition 5. Werden genau diejenigen Kanten des elliptischen Simplexes $R^{(n)}$ durch ihre Supplementkanten ersetzt, die von genau einem Eckpunkt k von $R^{(n)}$ ausgehen, dann entsteht das Kantenskelett eines weiteren Simplexes $^k R^{(n)}$. Dieses Simplex wird *Nebensimplex* von $R^{(n)}$ (bezüglich der Ecke k) genannt. Zur Vereinfachung der Sprechweise soll in diesem Zusammenhang auch das Ausgangssimplex als ein Nebensimplex bezeichnet werden.

Effektiv bedeutet das im sphärischen Modell des elliptischen Falles die Ersetzung von gewissen Eckpunkten durch ihre diametralen Gegenpunkte einschließlich der von diesen ausgehenden neuen Kanten. Im zweidimensionalen elliptischen Raum ist das in Abb. 1 veranschaulicht. Die Dreiecke O, I, II bzw. III sind Nebendreiecke, im Bild hier um das Ausgangsdreieck (zweidimensionales Simplex) O angeordnet.

Für zwei verschiedene Punkte in einem elliptischen Raum gibt es immer genau zwei Möglichkeiten, sie durch eine Kante zu verbinden. Die Summe der Größen dieser

beiden möglichen Kanten beträgt π . Demzufolge gibt es für die $\binom{n}{2}$ möglichen Punktepaare aus der Menge $\Omega^{(n)}$ im r -dimensionalen elliptischen Raum genau $2^{\binom{n}{2}}$ Möglichkeiten, so daß dabei je zwei Punkte immer durch genau eine Kante verbunden sind. Für die Punktmenge $\Omega^{(n)}$ gilt

Satz 1a. Für die Eckpunktmenge $\Omega^{(n)}$ ($n = r + 1 \geq 2$) im r -dimensionalen elliptischen Raum gibt es stets eine $(r-1)$ -dimensionale Hyperkugel mit dem Radius ϱ , $0 < \varrho < \pi/2$, die in ihrem Äußeren keinen Punkt von $\Omega^{(n)}$ enthält.

Da stets ein $\bar{\varrho}$ mit $\varrho < \bar{\varrho} < \pi/2$ existiert, ergibt sich sofort auch

Satz 1b. Für ein beliebiges Punkte- n -Tupel in einem $(n-1)$ -dimensionalen ellip-

tischen Raum gibt es stets eine Hyperkugel mit Radius $\bar{\rho}$, $0 < \bar{\rho} < \pi/2$, die in ihrem Inneren alle Punkte dieses n -Tupels enthält.

Zum Beweis von Satz 1a wird zunächst ein Hilfssatz benötigt.

Hilfssatz 1. Zu $\Omega^{(n)} \subset \mathbb{R}_+^{(r)}$ ($n = r + 1 \geq 2$) gibt es stets eine $(r - 1)$ -dimensionale Hyperebene, die keinen dieser n Punkte enthält.

Beweis. Durch vollständige Induktion läßt sich der Beweis führen. Für $n = 2$ ist die Behauptung trivial. Unter der Voraussetzung, daß die Behauptung für $n \geq 2$ gilt, wird jetzt die Punktmenge $\Omega^{(n+1)}$ im $(r + 1)$ -dimensionalen elliptischen Raum betrachtet. Durch n Punkte $P_1, P_2, \dots, P_n$ von $\Omega^{(n+1)}$ ist eindeutig eine r -dimensionale Hyperebene h_r erklärt, die einen elliptischen Raum von der Dimension r darstellt. In dieser gibt es nach Induktionsvoraussetzung eine Hyperebene k_{r-1} der Dimension $r - 1$, die die Punkte P_i ($i = 1, 2, \dots, n$) nicht enthält. Ferner gibt es genau eine Hyperebene, die k_{r-1} und den restlichen Punkt P_{n+1} von $\Omega^{(n+1)}$ enthält. Alle anderen Hyperebenen durch k_{r-1} enthalten keinen der Punkte aus $\Omega^{(n+1)}$. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Beweis von Satz 1a. Zu $\Omega^{(n)}$ gibt es eine $(r - 1)$ -dimensionale Hyperebene h , die $\Omega^{(n)}$ nicht enthält. h kann auch als Hyperkugel um ihren Pol P mit Radius $\pi/2$ aufgefaßt werden. Jetzt ist der Radius dieser Hyperkugel um P stetig soweit zu verkleinern, bis zum ersten Mal mindestens ein Punkt von $\Omega^{(n)}$ auf der Hyperkugeloberfläche zu liegen kommt. Der Radius dieser Hyperkugel k ist kleiner als $\pi/2$. Die Menge $\Omega^{(n)}$ liegt dabei im Innern oder auf dem Rand von k mit dem Mittelpunkt P . Das bedeutet, daß alle Punkte der Menge $\Omega^{(n)}$ von P einen Abstand $< \pi/2$ haben, der nicht größer als der Hyperkugelradius ist.

Eine Hyperebene durch das Kugellinnere, das die Punktmenge $\Omega^{(n)}$ enthält, zerlegt dieses in zwei jeweils zusammenhängende Gebiete, *Seiten* der Hyperebene bezüglich des Kugellinneren genannt. Sie werden durch die Hyperebene getrennt. Es werden nun diejenigen Hyperebenen betrachtet, bei denen sämtliche Punkte von $\Omega^{(n)}$ jeweils auf genau einer Seite der betreffenden Hyperebene liegen. Diese Seite werde die *positive* Seite der Hyperebene genannt. Der Durchschnitt aller möglichen positiven Hyperebenenseiten einschließlich Rand wird — wie im Euklidischen und Hyperbolischen — der *Simplexkörper* genannt (vgl. Formel (2)) und definiert ein zulässiges Simplex $R^{(n)}$. Die zugehörige Kantenkonfiguration stellt das Skelett dieses zulässigen Simplexes dar und wird den folgenden Untersuchungen zugrunde gelegt. Damit gilt

Hilfssatz 2. Zu der Eckpunktmenge $\Omega^{(n)} \subset \mathbb{R}_+^{(r)}$ ($n = r + 1 \geq 2$) gibt es stets mindestens ein zulässiges Simplex $R^{(n)}$ mit $\Omega^{(n)}$ als Eckpunktmenge.

Aus den bisherigen Betrachtungen folgt, daß ein zulässiges Simplex genau durch Definition 2 zusammen mit Definition 1 für $\kappa := 1$ erklärt wird. Denn ist $R^{(n)}$ ein zulässiges Simplex, dann sind zunächst die Eigenschaften in Definition 3 erfüllt. Da für ein zulässiges Simplex der Simplexkörper im Sinne von d) der Definition 2 erklärt werden kann, ist auch f) wieder sinnvoll, und cc) ist von selbst erfüllt. Umgekehrt beschreiben Definition 1 und 2 ein zulässiges Simplex. Die bisher in der Literatur auftretende Beschränkung bei gewissen Polyederuntersuchungen auf kleine Bereiche des elliptischen Raumes entspricht der Forderung der Hyperkugeleigenschaft, die sich in diesem Zusammenhang als eine natürliche topologische Forderung aus innergeometrischen Gründen für die Existenz eines zulässigen Simplexes verstehen läßt.

Es gibt nun verschiedene Möglichkeiten, Kanten von $R^{(n)}$ durch ihre Supplementkanten so zu ersetzen, daß ein Nebensimplex entsteht. Für jedes dieser Nebensimplexe gilt

Satz 2. *Ist $R^{(n)} = 1, 2, \dots, n$ ($n \geq 2$) ein zulässiges Simplex, dann ist auch jedes Nebensimplex ${}^k R^{(n)}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) ein zulässiges Simplex.*

Beweis. Es ist zu zeigen, daß das Kantenskelett von ${}^k R^{(n)}$ die Hyperkugeleigenschaft erfüllt. Alle im folgenden vorkommenden Hyperebenen sind selbstverständlich elliptische Hyperebenen. Da für $n = 2$ die Behauptung sofort einzusehen ist, sei nunmehr $n = 3$ und o. B. d. A. $k := n$. Die Wand w_n von $R^{(n)}$ gegenüber dem Eckpunkt n erzeugt die $(n - 2)$ -dimensionale Hyperebene h_n durch alle Eckpunkte von w_n . Auf Grund der Voraussetzung eines zulässigen Simplexes $R^{(n)}$ muß auch w_n ein zulässiges $(n - 2)$ -dimensionales Simplex sein. Es liegt im Innern einer Hyperkugel h_0 . Aus der Hyperkugeleigenschaft für $R^{(n)}$ läßt sich ableiten, daß es in h_n eine $(n - 3)$ -dimensionale Hyperebene h gibt, die keinen Eckpunkt von $R^{(n)}$ enthält und für die w_n auf genau einer Seite bezüglich h_0 liegt. Dieses gelingt unter Beachtung der Umkehrung des Überganges von Hilfssatz 1 zu Satz 1a. Durch h und den Eckpunkt n ist eindeutig eine $(n - 2)$ -dimensionale Hyperebene festgelegt, die zusammen mit der Hyperebene h_n zwei Klassen von $(n - 2)$ -dimensionalen Hyperebenen, die jeweils alle durch h gehen, trennt, nämlich solche, die einen inneren Punkt der Kante $1, n$ von $R^{(n)}$ enthalten, und solche, die mit derselben Kante $1, n$ keinen Punkt gemeinsam haben. Aus den beiden Klassen wird je ein Repräsentant, h_+ aus der ersten und h_- aus der zweiten Klasse, ausgewählt. Für h_+ gilt, daß ihr Durchschnitt auch mit jeder anderen Kante n, j ($j = 1, 2, \dots, n - 1$) nicht leer ist. Dagegen ist der Durchschnitt von h_- mit jeder Kante n, j ($j = 1, 2, \dots, n - 1$) stets leer. h_+ bzw. h_- werden jetzt als Oberfläche je einer Hyperkugel um ihren Pol P_+ bzw. P_- mit dem Radius $\pi/2$ aufgefaßt. Es lassen sich dann entsprechend Satz 1a und 1b zu h_+ und h_- je eine Hyperkugel um P_+ bzw. P_- jeweils mit einem Radius kleiner als $\pi/2$ angeben, die das Kantenskelett des Simplexes $R^{(n)}$ bzw. des Nebensimplexes ${}^n R^{(n)}$ in ihrem Inneren enthalten. ${}^n R^{(n)}$ hat folglich die Hyperkugeleigenschaft und ist somit ein zulässiges Simplex.

Zu einem Nebensimplex gibt es wiederum ein Nebensimplex bezüglich seines Eckpunktes l ($l \neq k$). Es gibt insgesamt 2^n verschiedene Möglichkeiten, Eckpunkte durch diametrale Punkte im sphärischen Modell zu ersetzen. Im Sinne der elliptischen Geometrie sind unter all diesen möglichen Nebensimplexen immer genau zwei identisch, nämlich diejenigen, die vermittels Ersetzung sämtlicher ihrer Eckpunkte durch deren jeweiligen diametralen Punkte auseinander hervorgehen. Demzufolge gilt

Hilfssatz 3. *Die Anzahl der verschiedenen durch Nebensimplexbildung entstehenden zulässigen Simplexe im elliptischen r -dimensionalen Raum ist gleich $1/2 \cdot 2^n = 2^{n-1}$.*

Unter den Nebensimplexen von $R^{(n)}$ gibt es verschiedene Arten hinsichtlich des Aufbaus aus Kanten oder Supplementkanten von $R^{(n)}$. Es gibt $\binom{n}{p}$ Nebensimplexe $\left(p < \frac{n}{2}\right)$, die jeweils genau zwei Untersimplexe von $R^{(n)}$ enthalten, wobei das eine $(p - 1)$ -dimensional, das andere $(n - p - 1)$ -dimensional ist. Die restlichen Kanten sind Supplementkanten bezüglich der übrigen noch nicht berücksichtigten

Kanten von $R^{(n)}$. Für gerades n gibt es noch die weitere Art von $\frac{1}{2} \binom{n}{\frac{n}{2}}$ Neben-

simplex, die jeweils genau zwei $\left(\frac{n}{2} - 1\right)$ -dimensionale Untersimplexe von $R^{(n)}$ enthalten. Damit sind alle möglichen Nebensimplexe erfaßt, ihre Summe ergibt wiederum 2^{n-1} ; denn es gilt für $n = 2m - 1$:

$$\sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{p} = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = \frac{1}{2} (1 + 1)^n = 2^{n-1}$$

und für $n = 2m$:

$$\sum_{p=0}^{n/2-1} \binom{n}{p} + \frac{1}{2} \binom{n}{n/2} = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = 2^{n-1}.$$

Es läßt sich ferner kombinatorisch abzählen, wie viele Möglichkeiten es bei einem fest vorgegebenen $\Omega^{(n)} \subset \mathbb{R}_1^{(r)}$ für Skelette von zulässigen bzw. nichtzulässigen Simplexen gibt:

Satz 3. *Unter den $2^{\binom{n}{2}}$ Möglichkeiten für ein Skelett eines r -dimensionalen elliptischen Simplexes $R^{(n)}$ mit der Eckpunktmenge $\Omega^{(n)}$ ($n = r + 1 \geq 2$) gibt es genau 2^{n-1} Möglichkeiten, die ein Skelett eines zulässigen Simplexes ergeben. Die Menge dieser 2^{n-1} zulässigen Simplexe ergibt genau die Menge aller zu einem beliebigen Repräsentanten dieser Menge gehörigen Nebensimplexe.*

Beweis. Nach Hilfssatz 2 gibt es immer zu $\Omega^{(n)}$ mindestens ein zulässiges Simplex $R^{(n)}$, dessen Eckpunkte genau $\Omega^{(n)}$ darstellen. Wegen Satz 2 und Hilfssatz 3 sind alle 2^{n-1} Nebensimplexe von $R^{(n)}$ zulässige Simplexe mit $\Omega^{(n)}$ als Eckpunktmenge. Nun ist nur noch zu zeigen, daß alle anderen möglichen Kantenskelette solche von nichtzulässigen Simplexen sind. Bei einem solchen Skelett müssen für $n \geq 3$ mindestens drei Punkte vorkommen, deren Kantenskelett ein nicht zulässiges Dreieck darstellt.

Für $n = 1$ ist die Aussage in trivialer Weise erfüllt. Für $n = 2$ sind alle möglichen Kantenskelette diejenigen von zulässigen Simplexen. Ferner ist sofort einzusehen, daß es für $n = 3$ genau 4 ($= 2^{3-1}$) Möglichkeiten für Kantenskelette zulässiger Dreiecke (vgl. auch Abb. 1) und genau vier weitere Möglichkeiten von Kantenskeletten nichtzulässiger Dreiecke (vgl. Abb. 2) gibt.

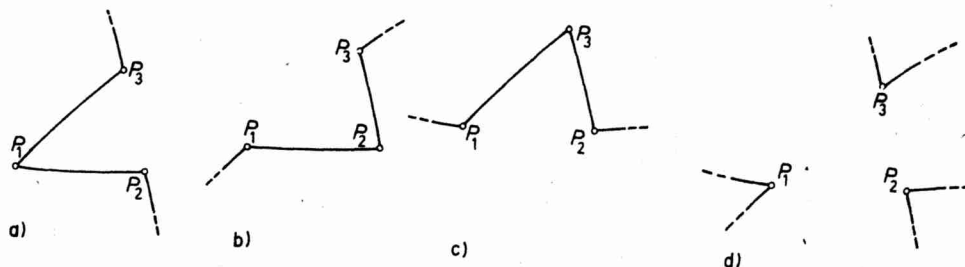


Abb. 2

Im Sinne einer vollständigen Induktion wird nun angenommen, daß es für die Eckpunktmenge $\Omega^{(k)}$ ($k := n - 3, n - 2$ und $n - 1$; $k \geq 4$) genau 2^{k-1} Kantenskelette gibt, die zulässige Simplexe beschreiben. Nun kann $\Omega^{(n)}$ betrachtet werden. Zu-

nächst wird für drei feste Punkte P_1, P_2, P_3 aus $\mathfrak{Q}^{(n)}$ ein Kantenskelett eines nichtzulässigen Dreiecks fixiert. Dann gibt es wegen der restlichen $\binom{n}{2} - 3$ Kanten genau $2^{\binom{n}{2}-3}$ Möglichkeiten von Kantenskeletten, die auf Grund des fixierten Kantenskeletts eines nichtzulässigen Dreiecks mit den drei Eckpunkten $P_i (i = 1, 2, 3)$ jeweils $2^{\binom{n}{2}-3}$ Kantenskelette aufbauen. Für die Eckpunktmenge $\mathfrak{Q}^{(n)} \setminus P_1 \setminus P_2 \setminus P_3$ gilt nach Induktionsvoraussetzung, daß zu ihnen genau 2^{n-4} Kantenskelette von zulässigen Simplexen gehören. Es gibt dann jeweils genau zwei Möglichkeiten, diese 2^{n-4} zulässigen Simplexe mit einem zulässigen Dreieck P_1, P_2, P_3 durch Kanten so zu verbinden, daß wieder ein Kantenskelett eines zulässigen Simplexes entsteht. Also existieren genau 2^{n-3} solche Kantenskelette von zulässigen Simplexen. Darum ergeben sich für ein jedes dieser vier zulässigen Dreiecke $2^{\binom{n}{2}-3} - 2^{n-3}$ nicht zulässige Simplexe, also insgesamt für die Eckpunktmenge $\mathfrak{Q}^{(n)}$

$$4 \cdot 2^{\binom{n}{2}-3} + 4 \cdot (2^{\binom{n}{2}-3} - 2^{n-3}) = 2^{\binom{n}{2}} - 2^{n-1}$$

nichtzulässige Simplexe. Das ist aber genau die Anzahl, die zusammen mit den bereits 2^{n-1} Möglichkeiten für die Kantenskelette von zulässigen Simplexen die Gesamtanzahl $2^{\binom{n}{2}}$ aller möglichen Kantenskelette ergibt. Satz 3 ist damit bewiesen.

4. Zulässige elliptische Simplexe mit stumpfen Kanten in Zusammenhang mit ihren Nebensimplexen

Es sollen nun Aussagen über Anzahlen von Kanten eines Skeletts eines zulässigen Simplexes $R^{(n)}$ gemacht werden, deren Größe $\pi/2$ übertrifft. Eine solche Kante soll *stumpf* genannt werden. Hat eine Kante die Größe $\pi/2$, dann soll sie *orthogonal* genannt werden.

Satz 4. Zu der Eckpunktmenge $\mathfrak{Q}^{(n)} \subset \mathfrak{R}_+^{(r)}$ ($n = r + 1 \geq 2$) gibt es ein Skelett eines zulässigen Simplexes, bei dem im Fall $n = 2m - 1$ höchstens $(m - 1)^2$ Kanten und im Fall $n = 2m$ höchstens $m(m - 1)$ Kanten stumpf sind.

Beweis. Für $n = 3$ gibt es zulässige Dreiecke, deren Kanten alle stumpf sind. Ihre Nebensimplexe besitzen genau eine stumpfe Kante. Ferner gibt es Eckpunktmenge mit zulässigen Dreiecken, deren Kanten alle nichtstumpf sind. Ihre Nebensimplexe besitzen genau zwei stumpfe Kanten. Demzufolge gibt es zu einem Punktetripel im zweidimensionalen elliptischen Raum immer ein Kantenskelett eines zulässigen Dreiecks, bei dem höchstens eine Kante stumpf ist. Im Sinne eines Induktionsbeweises wird angenommen, daß es zu $\mathfrak{Q}^{(n)}$ stets ein Kantenskelett eines zulässigen Simplexes gibt, bei dem höchstens $(m - 1)^2$ bzw. $m(m - 1)$ Kanten stumpf sind. Für n Punkte aus $\mathfrak{Q}^{(n+1)}$ gibt es unter sämtlichen möglichen Nebensimplexen mindestens eins mit einem Kantenskelett, das aus höchstens $(m - 1)^2$ bzw. $m(m - 1)$ stumpfen Kanten besteht. Von dem noch nicht berücksichtigten $(n + 1)$ -ten Eckpunkt gehen n Kanten aus. Sind mehr als $[n/2]$ Kanten davon stumpf, so wird zu dem Nebensimplex bezüglich dieser $(n + 1)$ -ten Ecke übergegangen. Dessen Skelett enthält weniger stumpfe Kanten. Gehen genau $n/2$ stumpfe Kanten vom $(n + 1)$ -ten Eckpunkt aus, dann enthält das Nebensimplex bezüglich dieser $(n + 1)$ -ten Ecke nicht mehr stumpfe Kanten als das ursprüngliche Simplex. Demzufolge kommen zu den stumpfen Kanten des Untersimplexes $R^{(n)}$ höchstens $[n/2]$ stumpfe Kanten noch hinzu. Das bedeutet

für $n = 2m - 1$:

$$(m - 1)^2 + \left\lfloor \frac{2m - 1}{2} \right\rfloor = (m - 1)m,$$

und für $n = 2m$:

$$m(m - 1) + \left\lfloor \frac{2m}{2} \right\rfloor = m^2.$$

Definition 6. Ein Simplex aus der Menge aller zulässigen Simplexe, die die gleiche Eckpunktmenge $\Omega^{(n)}$ haben, wird ein *reduziertes (Neben-)Simplex* genannt, wenn die Anzahl seiner stumpfen Kanten im Vergleich zu allen seinen Nebensimplexen minimal ist.

Ein reduziertes Simplex $R^{(n)}$ ($n \geq 2$) hat demzufolge nach Satz 4 höchstens $a_0(n)$ stumpfe Kanten mit

$$a_0(n) = \frac{1}{4} \left(n(n - 2) + \frac{1}{2} (1 - (-1)^n) \right). \quad (4)$$

Unter sämtlichen zulässigen Nebensimplexen mit der Eckpunktmenge $\Omega^{(n)}$ kann als ein Repräsentant ein reduziertes Simplex ausgewählt werden. Ein reduziertes Nebensimplex ist im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt, wie schon im Fall eines Dreiecks mit genau einer stumpfen Kante sofort zu sehen ist (vgl. Abb. 3; stumpfe Kanten sind fett gezeichnet). Die Nebendreiecke des Dreiecks O haben hier alle genau eine stumpfe Kante.

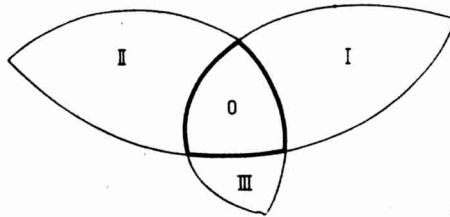


Abb. 3

Definition 7. Das zulässige Simplex $R^{(n)}$ mit $n = 2m$ bzw. $n = 2m - 1$ hat genau dann die Struktur $\mathfrak{M} = (R^{(n-[n/2])}, R^{([n/2])})$, wenn folgendes gilt: Die Eckpunktmenge $\Omega^{(n)}$ von $R^{(n)}$ zerfällt vollständig in die beiden Teilmengen Ω_1 und Ω_2 , wobei zu Ω_1 genau m und zu Ω_2 die übrigen m bzw. $m - 1$ Eckpunkte von $R^{(n)}$ gehören. Die beiden Untersimplexe von $R^{(n)}$ mit den Eckpunkten Ω_1 einerseits und Ω_2 andererseits besitzen jeweils nur stumpfe Kanten. Alle übrigen Kanten von $R^{(n)}$ sind nichtstumpf.

Satz 5. Es sei $R_0^{(n)}$ ($n \geq 2$) ein zulässiges Simplex mit nur stumpfen Kanten. Ein dazugehöriges reduziertes Nebensimplex hat die höchstmögliche Anzahl $a_0(n)$ stumpfer Kanten im Vergleich mit allen reduzierten Nebensimplexen mit genau n Eckpunkten. Dieses reduzierte Nebensimplex hat die Struktur $\mathfrak{M}$. Es gibt genau $\binom{2m-1}{m}$ verschiedene reduzierte Nebensimplexe zu $R_0^{(n)}$.

Beweis. Für das zulässige Simplex $R_0^{(n)}$ mit den Eckpunkten $1, 2, \dots, n$ soll jetzt ein Nebensimplex konstruiert werden, bei dem mit $m = n - [n/2]$ jeweils das Skelett der zulässigen Simplexe $1, 2, \dots, m$ und $m + 1, m + 2, \dots, n$ nur aus stumpfen Kanten besteht, die Verbindungskanten zwischen diesen beiden Skeletten jedoch nicht stumpf sind. Zu diesem Zweck wird das Nebensimplex von $R_0^{(n)}$ bezüglich der Ecke 1,

zu diesem das Nebensimplex bezüglich der Ecke 2 usw. sukzessiv bis zum Nebensimplex bezüglich der Ecke m konstruiert. Durch diese Konstruktion entsteht ein Simplex der Struktur $\mathfrak{M}$. Im sphärischen Raum kann es als ein Simplex angesehen werden, in dem die Eckpunkte $1, 2, \dots, m$ durch ihre Gegenpunkte $\bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{m}$ ersetzt wurden. Man sieht sofort, daß diese Gegenpunkte dann wiederum durch stumpfe Kanten zu verbinden sind und die nicht veränderten Eckpunkte $m+1, m+2, \dots, n$ ebenfalls weiterhin durch stumpfe Kanten verbunden bleiben. Dagegen sind die übrigen Kanten durch ihre Supplementkanten zu ersetzen, die demzufolge nicht stumpf sind. Für die Anzahl der Kanten, die stumpf sind, gilt dann

für $n = 2m - 1$:

$$\binom{m}{2} + \binom{m-1}{2} = (m-1)^2$$

und für $n = 2m$:

$$\binom{m}{2} + \binom{m}{2} = m(m-1);$$

d. h., die Anzahl der stumpfen Kanten beträgt $d_0(n)$.

Da die m Eckpunkte, bezüglich derer sukzessiv die Nebensimplexe konstruiert werden sollen, beliebig ausgewählt werden können, gibt es demzufolge $\binom{n}{m}$ Möglichkeiten der Auswahl. Für gerades $n = 2m$ fallen aber immer jeweils zwei Möglichkeiten zusammen, so daß es auch in diesem Fall

$$\frac{1}{2} \binom{2m}{m} = \frac{(2m)!}{2 \cdot m! \cdot m!} = \frac{(2m-1)!}{m! \cdot (m-1)!} = \binom{2m-1}{m}$$

Möglichkeiten gibt.

Jetzt ist nur noch zu zeigen, daß ein Simplex $R^{(n)}$ der Struktur $\mathfrak{M}$ stets ein reduziertes ist. Dieses ergibt sich aus den folgenden Hilfssätzen.

Hilfssatz 4. *Gibt es in einem zulässigen Simplex $R^{(n)}$ ($n \geq 2$) einen Eckpunkt P_1 , von dem für $n = 2m - 1$ bzw. für $n = 2m$ mindestens m stumpfe Kanten ausgehen, dann ist die Anzahl der stumpfen Kanten im Nebensimplex $P_1 R^{(n)}$ um mindestens 1 niedriger. $R^{(n)}$ ist also kein reduziertes Simplex. Gibt es dagegen in $R^{(n)}$ einen Eckpunkt P_2 , von dem höchstens $m - 1$ stumpfe Kanten ausgehen, dann erniedrigt sich die Anzahl der stumpfen Kanten in $P_2 R^{(n)}$ nicht.*

Beweis. Im Nebensimplex $P_1 R^{(n)}$ ändern sich nur die Kanten, die von P_1 ausgehen. Von P_1 gehen in $P_1 R^{(n)}$ höchstens $(2m - 2) - m = m - 2$ bzw. $(2m - 1) - m = m - 1$ stumpfe Kanten aus, es wird also stets die Anzahl der stumpfen Kanten erniedrigt. Im Nebensimplex $P_2 R^{(n)}$ gehen von P_2 mindestens $(2m - 2) - (m - 1) = m - 1$ bzw. $(2m - 1) - (m - 1) = m$ stumpfe Kanten aus, es tritt also keine Erniedrigung sondern höchstens eine Erhöhung der Anzahl der stumpfen Kanten ein.

Definition 8. Das zulässige Simplex $R^{(2m)}$ ($m \geq 1$) bzw. $R^{(2m-1)}$ ($m \geq 2$) hat die Eigenschaft (M) genau dann, wenn von keinem Eckpunkt des Simplexes mehr als $m - 1$ stumpfe Kanten ausgehen.

Für gerade und ungerade Dimensionen werden jetzt getrennt die weiteren Hilfssätze formuliert.

Für $n = 2m$ ($m \geq 1$) gilt:

Hilfssatz 5. In einem zulässigen Simplex mit der Eigenschaft (M), dessen Kanten-skelett genau $m(m-1)$ stumpfe Kanten enthält, gehen von jedem Eckpunkt genau $m-1$ stumpfe Kanten aus.

Beweis. Jede stumpfe Kante verbindet zwei Eckpunkte. Durch die stumpfen Kanten werden darum insgesamt $2m(m-1)$ -mal Punkte miteinander verbunden. Die durchschnittliche Anzahl der Kanten, die von einem Punkt ausgehen, beträgt darum $\frac{2m(m-1)}{2m} = m-1$. Da es nach Voraussetzung nicht mehr als $m-1$ stumpfe Kanten geben kann, sind es für jeden Punkt genau $m-1$ stumpfe Kanten.

Hilfssatz 6. Gegeben sei ein zulässiges Simplex $R^{(2m)}$, in dem von jedem Eckpunkt genau $m-1$ stumpfe Kanten ausgehen. Gilt für jeden Eckpunkt P des Simplexes $R^{(2m)}$ die Eigenschaft

(S₂) alle Eckpunktpaare P_1, P_2 ($P_1 \neq P_2$; $P_1, P_2 \neq P$) des Simplexes $R^{(2m)}$, die nicht durch stumpfe Kanten mit P verbunden sind, sind stets untereinander durch eine stumpfe Kante verbunden,

genau dann ist $R^{(2m)}$ ein reduziertes Simplex. $R^{(2m)}$ ist darüber hinaus von der Struktur $\mathfrak{M}$.

Beweis. Gäbe es in $R^{(2m)}$, in dem von jedem Punkt genau $m-1$ stumpfe Kanten ausgehen, zwei Punkte P_1, P_2 , die sowohl untereinander nicht als auch beide mit P nicht durch eine stumpfe Kante verbunden sind, dann läßt sich zeigen, daß es ein Nebensimplex mit weniger stumpfen Kanten gibt. Es gilt nämlich:

- a) das Nebensimplex von $R^{(2m)}$ bezüglich P hat eine stumpfe Kante mehr,
- b) zu dem in a) entstandenen Simplex hat das Nebensimplex bezüglich P_1 eine stumpfe Kante weniger, es ist also wieder die alte Anzahl stumpfer Kanten erreicht,
- c) zu dem in b) entstandenen Simplex hat das Nebensimplex bezüglich P_2 drei stumpfe Kanten weniger, also eine Reduktion der Anzahl stumpfer Kanten um insgesamt 3 war möglich.

Vergleiche Abb. 4 für $n=6$ (nur die stumpfen Kanten sind gezeichnet); in Abb. 4b ist ein Nebensimplex zu dem in Abb. 4a dargestellt, das nach der obigen Anweisung erzeugt wurde und weniger stumpfe Kanten als das Ausgangssimplex in Abb. 4a hat.

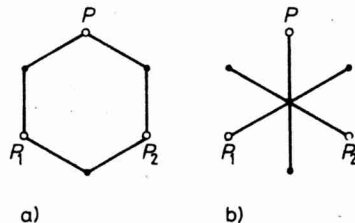


Abb. 4

Jetzt ist noch zu zeigen, daß für ein Simplex, in dem von jedem Punkt genau $m-1$ stumpfe Kanten ausgehen und bei dem für jeden Eckpunkt die Eigenschaft (S₂) gilt, keine Reduktion der Anzahl der stumpfen Kanten durch Nebensimplexbildung möglich ist:

Von einem beliebigen Eckpunkt P_1 von $R^{(2m)}$ gehen $m-1$ stumpfe Kanten aus, ihre anderen Endpunkte seien $P_2, P_3, \dots, P_m$. Zwei weitere davon verschiedene Punkte müssen wegen der Eigenschaft (S₂) untereinander durch eine stumpfe Kante verbunden sein. Das heißt, die restlichen Punkte $P_{m+1}, \dots, P_{2m}$ sind die Eckpunkte eines

Kantenskeletts, die untereinander nur durch stumpfe Kanten verbunden sind. Von P_{2m} gehen zu $P_{m+1}, \dots, P_{2m-1}$ seine $m-1$ stumpfen Kanten. Demzufolge müssen alle Punkte $P_1, P_2, \dots, P_m$ wegen der Eigenschaft (S_2) untereinander durch stumpfe Kanten verbunden sein. Auch das Kantenskelett für die Punkte $P_1, \dots, P_m$ besteht nur aus stumpfen Kanten; das Simplex $R^{(2m)}$ hat die Struktur $\mathfrak{M}$.

Es wird jetzt eines der beiden $(m-1)$ -dimensionalen Untersimplexe $R_1^{(m)}$ und $R_2^{(m)}$ von $R^{(2m)}$ betrachtet, die jeweils nur aus stumpfen Kanten bestehen, etwa $R_1^{(m)} = P_1, P_2, \dots, P_m$. Dann läßt sich für die sukzessiv konstruierten Nebensimplexe von $R^{(2m)}$ bezüglich der Eckpunkte von $R_1^{(m)}$ sagen, daß sich die Anzahl ihrer stumpfen Kanten jeweils erhöht um 1, 3, 5, ..., $2m-1$. Das letzte hat demnach genau

$$\sum_{v=1}^m (2v-1) = 2 \frac{m(m+1)}{2} - m = m^2$$

mehr, also insgesamt

$$m(m-1) + m^2 = m(2m-1) = \binom{2m}{2}$$

stumpfe Kanten. Das sind aber alle Kanten von $R^{(2m)}$.

Werden hingegen zuerst sukzessiv die Nebensimplexe bezüglich einiger Eckpunkte des einen Untersimplexes, etwa mit $N_1, N_2, \dots, N_{k-1}, N_k$ bezeichnet, betrachtet, bei denen sich die Anzahl der stumpfen Kanten, wie soeben erläutert, jeweils immer erhöht, und dann das Nebensimplex zu N_k bezüglich eines Punktes des anderen Untersimplexes, dann ergibt sich wieder dieselbe Anzahl stumpher Kanten wie in N_{k-1} . Folglich gelingt keine Reduktion der Anzahl der stumpfen Kanten. Es hat sich somit ergeben:

Hilfssatz 7. *Ein zulässiges Simplex von der Struktur $\mathfrak{M}$ ist ein reduziertes.*

Für $n = 2m-1$ ($m \geq 2$) gilt

Hilfssatz 8. *In einem zulässigen Simplex $R^{(2m-1)}$ mit der Eigenschaft (M), dessen Kantenskelett genau $(m-1)^2$ stumpfe Kanten enthält, gehen von mindestens m Eckpunkten jeweils $m-1$ stumpfe Kanten aus.*

Um eine Verschärfung von Hilfssatz 8 zu formulieren, ist eine weitere Definition nützlich.

Definition 9. Ein zulässiges Simplex $R^{(2m-1)}$ hat die Eigenschaft (MM) genau dann, wenn es die Eigenschaft (M) hat und wenn von jedem Eckpunkt von $R^{(2m-1)}$ mindestens $m-2$ stumpfe Kanten ausgehen.

Hilfssatz 9. *In einem zulässigen Simplex $R^{(2m-1)}$ mit der Eigenschaft (MM), dessen Kantenskelett genau $(m-1)^2$ stumpfe Kanten enthält, gibt es genau m Eckpunkte, von denen jeweils $m-1$ stumpfe Kanten ausgehen. Von den übrigen $m-1$ Eckpunkten gehen dann jeweils $m-2$ stumpfe Kanten aus.*

Beweis der Hilfssätze 8 und 9. Werden die $(m-1)^2$ stumpfen Kanten möglichst gleichmäßig auf die $2m-1$ Eckpunkte des Simplexes verteilt, dann ergeben sich für jeden Eckpunkt durchschnittlich

$$\frac{2(m-1)^2}{2m-1} = m-1 - \frac{m-1}{2m-1}$$

Kanten. Es können demzufolge nicht von jedem Eckpunkt $m-1$ stumpfe Kanten ausgehen.

Um die kleinste Anzahl der Eckpunkte zu bestimmen, von denen jeweils $m - 1$ stumpfe Kanten ausgehen müssen, muß die Anzahl der stumpfen Kanten, die jeweils von den anderen Eckpunkten ausgehen, möglichst groß sein, nämlich $m - 2$. Demzufolge ist anzusetzen, wenn x und y die Anzahl der Eckpunkte bedeutet, von denen $m - 1$ bzw. $m - 2$ stumpfe Kanten ausgehen,

$$x(m - 1) + y(m - 2) = 2(m - 1)^2,$$

$$x + y = 2m - 1.$$

Daraus ergibt sich $x = m$ und $y = m - 1$.

Bemerkung. Sollen von möglichst vielen Eckpunkten jeweils $m - 1$ Kanten ausgehen, dann läßt sich dieses für genau $\frac{2(m - 1)^2}{m - 1} = 2m - 2$ Eckpunkte realisieren.

Von genau einem Eckpunkt geht dann keine stumpfe Kante aus. Eine Realisierung dieser Aussage ist für $n = 7$ in Abb. 5 zu erkennen.

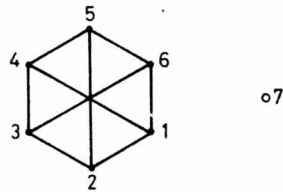


Abb. 5

Hilfssatz 10. Gegeben sei ein zulässiges Simplex $R^{(2m-1)}$ mit genau $(m - 1)^2$ stumpfen Kanten und der Eigenschaft (MM).

Gilt für jeden Punkt P des Simplexes $R^{(2m-1)}$, von dem genau $m - 1$ stumpfe Kanten ausgehen, die Eigenschaft

(S₁) jeder Eckpunkt P_1 ($\neq P$), von dem genau $m - 1$ stumpfe Kanten ausgehen, ist mit P durch eine stumpfe Kante verbunden,

genau dann ist $R^{(2m-1)}$ ein reduziertes Simplex. $R^{(2m-1)}$ ist darüber hinaus von der Struktur $\mathfrak{M}$.

Beweis. Gäbe es in dem Simplex zwei Punkte P und P_1 , von denen jeweils genau $m - 1$ stumpfe Kanten ausgehen, die aber nicht durch eine stumpfe Kante miteinander verbunden sind, dann läßt sich zeigen, daß es ein Nebensimplex mit weniger Kanten gibt. Es gilt nämlich:

a) das Nebensimplex von $R^{(2m-1)}$ bezüglich P hat genauso viele stumpfe Kanten wie $R^{(2m-1)}$,

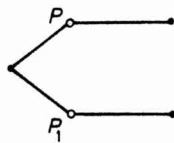
b) zu dem in a) entstandenen Simplex hat das Nebensimplex bezüglich P_1 zwei stumpfe Kanten weniger, weil hier von P_1 ja m stumpfe Kanten ausgingen, im Nebensimplex demzufolge nur $m - 2$ stumpfe Kanten ausgehen können.

In Abb. 6a ist ein solches Simplex im Fall $n = 5$ mit seinem entsprechenden Nebensimplex in Abb. 6b zu sehen (nur die stumpfen Kanten sind gezeichnet). Die Anzahl der stumpfen Kanten ist entsprechend der obigen Anweisung erniedrigt worden.

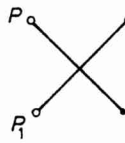
Jetzt ist noch zu zeigen, daß für ein Simplex $R^{(2m-1)}$ mit genau $(m - 1)^2$ stumpfen Kanten, der Eigenschaft (MM) und bei dem für jeden Eckpunkt, von dem genau $m - 1$ stumpfe Kanten ausgehen, die Eigenschaft (S₁) erfüllt ist, keine Reduktion der Anzahl der stumpfen Kanten durch Nebensimplexbildung eintreten kann:

Es wird ein beliebiger Eckpunkt P_1 betrachtet, von dem genau $m - 1$ stumpfe Kanten ausgehen. Deren andere Endpunkte seien $P_2, P_3, \dots, P_m$. Dieses sind aber sämtliche Eckpunkte, von denen genau $m - 1$ stumpfe Kanten ausgehen. Da für diese m Punkte jeweils die Eigenschaft (S_1) erfüllt sein soll, sind alle diese Punkte untereinander durch stumpfe Kanten verbunden, das Untersimplex mit den Eckpunkten $P_1, P_2, \dots, P_m$ besteht nur aus stumpfen Kanten. Da von diesen Punkten nicht mehr als jeweils $m - 1$ stumpfe Kanten ausgehen können, sind diese m Punkte mit den restlichen $m - 1$ Punkten nicht durch stumpfe Kanten verbunden. Folglich sind für diese restlichen Punkte $P_{m+1}, \dots, P_{2m-1}$ noch die restlichen stumpfen Kanten, von denen es

$$(m - 1)^2 - \binom{m}{2} = \binom{m - 1}{2}$$



a)



b)

Abb. 6

gibt, zu verteilen. Das ist jedoch nur so möglich, daß sämtliche Kanten zwischen diesen $m - 1$ Punkten stumpf sind. Also hat das Simplex $R^{(2m-1)}$ die Struktur $\mathfrak{M}$. Es werden jetzt die beiden Untersimplexe $R_1 = R^{(m)}$ und $R_2 = R^{(m-1)}$ von $R^{(2m-1)}$ der Struktur $\mathfrak{M}$ betrachtet, deren Skelette jeweils nur stumpfe Kanten besitzen. Für $R^{(2m-1)}$ erhöhen sich in den sukzessiv konstruierten Nebensimplexen bezüglich der Eckpunkte von R_1 die Anzahlen der stumpfen Kanten jeweils um 2, 4, 6, ..., $2m - 2$. Das letzte Nebensimplex hat demnach genau

$$\sum_{v=1}^{m-1} 2v = 2 \binom{m}{2} = m(m - 1)$$

stumpfe Kanten mehr. Also enthält dieses Nebensimplex insgesamt

$$(m - 1)^2 + m(m - 1) = \binom{2m - 1}{2}$$

stumpfe Kanten, d. h., alle Kanten sind stumpf.

Wird hingegen ein Nebensimplex von $R^{(2m-1)}$ bezüglich eines Eckpunktes von R_1 betrachtet, dann ergibt sich wiederum ein Simplex der Struktur $\mathfrak{M}$. Werden erst sukzessiv Nebensimplexe $N_1, N_2, \dots, N_{k-1}, N_k$ bezüglich Eckpunkten von R_2 betrachtet, wobei, wie soeben erläutert, die Anzahl der stumpfen Kanten erhöht wird, und dann das Nebensimplex zu N_k bezüglich einer Ecke von R_1 , dann wird die Anzahl der stumpfen Kanten wieder erniedrigt auf die Anzahl der stumpfen Kanten in N_{k-1} . Somit gilt schließlich

Hilfssatz 11. *Ein zulässiges Simplex $R^{(2m-1)}$ von der Struktur $\mathfrak{M}$ ist ein reduziertes.*

Damit ist der Satz 5 vollständig bewiesen.

In diesem Zusammenhang gilt auch noch

Hilfssatz 12. *Gegeben sei ein zulässiges Simplex $R^{(2m-1)}$ mit genau $(m - 1)^2$ stumpfen*

Kanten und der Eigenschaft (M). Die Eigenschaft (MM) sei nicht erfüllt. Dann ist $R^{(2m-1)}$ kein reduziertes Simplex.

Beweis. Wenn (MM) nicht erfüllt ist, besitzt $R^{(2m-1)}$ mehr als m Eckpunkte, von denen jeweils $m - 1$ stumpfe Kanten ausgehen. Darum gehen in einem solchen Simplex auf Grund des Beweises zu den Hilfssätzen 8 und 9 von mindestens $m + 1$ Eckpunkten jeweils $m - 1$ stumpfe, von den übrigen Eckpunkten jeweils höchstens $m - 2$ stumpfe Kanten aus. Es gibt dann wenigstens einen Eckpunkt P , von dem weniger als $m - 2$ stumpfe Kanten ausgehen, weil sonst für die Gesamtanzahl der Kanten folgendes gelten müßte:

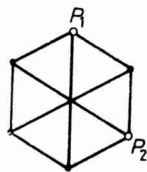
Wenn es genau $m + z$ ($z > 0$) Eckpunkte gibt, von denen jeweils genau $m - 1$ stumpfe Kanten, von den übrigen Eckpunkten jeweils genau $m - 2$ stumpfe Kanten ausgehen, ergibt sich

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[(m - 1)(m + z) + (m - 2)(2m - 1 - (m + z)) \right] \\ &= m^2 - 2m + 1 + \frac{z}{2} > (m - 1)^2. \end{aligned}$$

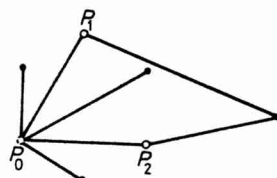
Man sieht daraus auch, daß sich nur für ein gerades z ein Kantenskelett mit genau $(m - 1)^2 + z/2$ stumpfen Kanten realisieren läßt, wenn für $R^{(2m-1)}$ die Eigenschaft (MM) gelten soll.

Nun gibt es unter den Eckpunkten, von denen jeweils genau $m - 1$ stumpfe Kanten ausgehen, mindestens zwei Punkte P_1 und P_2 , die nicht durch eine stumpfe Kante verbunden sein können, weil von P_1 genau $m - 1$ stumpfe Kanten ausgehen und es aber mehr als m Punkte gibt, von denen genau $m - 1$ stumpfe Kanten ausgehen. Jetzt läßt sich sofort ein Nebensimplex mit weniger stumpfen Kanten angeben:

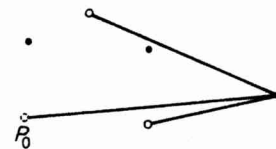
a) Es wird das Nebensimplex von $R^{(2m-1)}$ bezüglich P_1 konstruiert; dieses hat die gleiche Anzahl stumpfer Kanten.



a)



b)



c)

Abb. 7

b) Für dieses Nebensimplex $P_1 R^{(2m-1)}$ wird das Nebensimplex bezüglich P_2 betrachtet. Dieses hat wenigstens zwei stumpfe Kanten weniger.

Vergleiche für $n = 7$ das Beispiel in Abb. 7a und 7b; durch Bildung eines weiteren Nebensimplexes bezüglich P_0 ergibt sich hier Abb. 7c. Dieses ist übrigens ein reduziertes Simplex. (Es sind nur die stumpfen Kanten gezeichnet.)

Satz 6. Ein zulässiges Simplex $R^{(n)}$ ($n \geq 2$), dessen Kantenskelett aus genau $a_0(n)$ stumpfen Kanten besteht, ist genau dann von der Struktur $\mathfrak{M}$, wenn $R^{(n)}$ ein reduziertes Simplex ist.

Beweis. Nach Satz 5 hat ein Simplex von der Struktur $\mathfrak{M}$ genau $a_0(n)$ stumpfe Kanten und ist ein reduziertes Simplex. Man muß sich jetzt noch überlegen, daß ein reduziertes Simplex $R^{(n)}$ mit genau $a_0(n)$ stumpfen Kanten von der Struktur $\mathfrak{M}$ ist. Das läßt sich aber aus den Hilfssätzen 4, 6, 10 und 12 sofort ableiten. Denn es gilt: Nach Hilfssatz 4 muß $R^{(n)}$ die Eigenschaft (M) besitzen, wenn es ein reduziertes Simplex sein soll. Für $n = 2m$ muß nach Hilfssatz 6 für ein solches reduziertes Simplex die Eigenschaft (S_2) erfüllt sein. Das ist, wiederum nach Hilfssatz 6, nur möglich, wenn es von der Struktur $\mathfrak{M}$ ist. Für $n = 2m - 1$ ist nach Hilfssatz 12 das Simplex $R^{(n)}$ mit der Eigenschaft (M), für das die Eigenschaft (MM) nicht gilt, nicht reduziert. Nach Hilfssatz 10 muß für ein solches reduziertes Simplex mit der Eigenschaft (MM) auch die Eigenschaft (S_1) erfüllt sein. Das ist, wiederum nach Hilfssatz 10, nur möglich, wenn es die Struktur $\mathfrak{M}$ hat. Damit ist Satz 6 vollständig bewiesen.

5. Simplexbaukasten

Für die Polyederstruktur $[\mathfrak{P}, \mathfrak{E}, *, \sim]$ (vgl. E. HERTEL [9]) wird die Menge $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{P}$ ein (*universeller*) *Polyederbaukasten* genannt, wenn die Operation „*“ die elementar-geometrische Addition bedeutet. Wird unter der Operation „*“ sowohl die elementar-geometrische Addition als auch, soweit ausführbar, die elementar-geometrische Subtraktion verstanden, dann heißt die Menge $\mathfrak{P}$, wenn für diese die Eigenschaft der Abgeschlossenheit bezüglich Addition und Subtraktion erfüllt ist, eine (elementar-geometrische) *$\mathfrak{P}$ -Kategorie* über $\mathfrak{E}$ (vgl. H. HADWIGER [8]).

Es gilt der Satz, daß die Menge der Simplexe in $\mathfrak{R}_x^{(r)}$ ($x = 0, \pm 1$) ein Polyederbaukasten für alle r -dimensionalen Polyeder des betreffenden Raumes ist. Andererseits ist die Menge der eigentlichen r -dimensionalen Polyeder aus $\mathfrak{R}_x^{(r)}$ die kleinste Polyederkategorie über der Menge der r -dimensionalen Orthoscheme desselben Raumes (vgl. [8] für $x = 0$). Um der noch unbeantworteten Frage näherzukommen, ob die Menge der Orthoscheme einen Simplexbaukasten und damit bereits einen Polyederbaukasten darstellt, wird jetzt für $x = 1$ ein Simplexbaukasten angegeben, der die Menge der Orthoscheme als eine echte Teilmenge enthält. Es gilt

Satz 7. In $\mathfrak{R}_1^{(r)}$ ($r \geq 1$) ist die Menge $\mathfrak{E}^{(r+1)}$ aller zulässigen r -dimensionalen Simplexe mit nichtstumpfen Kanten ein Simplexbaukasten für alle zulässigen r -dimensionalen Simplexe.

Beweis. Der Beweis wird durch vollständige Induktion nach der Dimensionszahl geführt. Für den Fall der Dimension $r = 1$ ist die Zerlegung einer stumpfen Kante in zwei Kanten, die jeweils beide nicht stumpf sind, in trivialer Weise stets möglich, indem diese Kante in eine solche von der Größe $\pi/2$ und in eine Restkante von einer Größe kleiner als $\pi/2$ zerlegt wird.

Nunmehr wird angenommen, der Satz sei richtig für die Dimension $r - 1$. Dann kann für die vollständige Zerlegung eines zulässigen r -dimensionalen Simplexes $R^{(n)}$ ($n = r + 1$) in Teilsimplexe mit nichtstumpfen Kanten folgender Algorithmus angewendet werden:

1. Es wird ein beliebiger Eckpunkt P von $R^{(n)}$ ausgewählt. Diesem Eckpunkt P liegt in $R^{(n)}$ die $(r - 1)$ -dimensionale Wand w_P gegenüber. Sie ist ein zulässiges Simplex.

Für praktische Zwecke ist es von Vorteil — hinsichtlich einer einfachen Übersicht der Konstruktion sowie hinsichtlich der Erreichung einer möglichst geringen Anzahl von

Teilsimplexen aus $\mathfrak{S}^{(n)}$ —, einen solchen Eckpunkt P nach folgenden Gesichtspunkten auszuwählen: Ist k die Anzahl der stumpfen Kanten, die vom Eckpunkt P von $R^{(n)}$ ausgehen, dann sollte P ein Eckpunkt sein, für den $m = \text{Max}(k, n - 1 - k)$ möglichst groß ist. Falls es dann sowohl Punkte mit $k = m$ als auch Punkte mit $n - 1 - k = m$ gibt, dann sollte für den auszuwählenden Punkt P die Bedingung $m = n - 1 - k$ gelten. Es sei angemerkt, daß hierdurch P im allgemeinen jedoch nicht eindeutig bestimmt ist.

2. Zu P wird in dem r -dimensionalen elliptischen Raum die Polare p konstruiert. Aus p schneiden sämtliche Kanten (oder deren Verlängerung) von $R^{(n)}$, die P als den einen Endpunkt haben, $n - 1$ Punkte aus. Diese Punkte werden durch das Kantenskelett verbunden, das als Projektion des Kantenskeletts der Wand w_P bei der (Zentral-)Projektion vom Zentrum P aus auf p entsteht. Dieses Kantenskelett ist ein solches eines zulässigen $(r - 1)$ -dimensionalen Simplexes w'_P , was sich sofort aus der Hyperkugeleigenschaft für die Wand w_P ableiten läßt. Denn wird eine $(r - 1)$ -dimensionale Hyperkugel h_{r-1} , die w_P in ihrem Inneren enthält, zusammen mit dem Kantenskelett von w_P von P aus auf p projiziert, dann enthält das Bild h'_{r-1} von h_{r-1} das Kantenskelett des Bildes w'_P von w_P ganz in seinem Inneren. Der größte Durchmesser ϱ von h'_{r-1} ist kleiner als $\pi/2$, da der Radius von h_{r-1} kleiner als $\pi/2$ ist. Folglich gibt es eine Hyperkugel mit Radius ϱ in p , die h'_{r-1} und damit das projizierte Kantenskelett in ihrem Inneren enthält.

3. Gehen in $R^{(n)}$ von P mindestens eine stumpfe Kante und mindestens eine nicht-stumpfe, aber nicht orthogonale Kante aus, dann ist der Durchschnitt von w_P und p ein $(r - 1)$ -dimensionales Polyeder, das w'_P in zwei Teilpolyeder zerlegt. Diese beiden Teilpolyeder sind, falls nötig, durch „Eckenabschneiden“ mit Hilfe ihrer Diagonalen jeweils in zulässige Simplexe zu zerlegen. Die Gesamtzahl dieser Simplexe ist selbstverständlich endlich; sie mögen mit $w_P^{(i)'} (i = 1, 2, \dots, q_0)$ bezeichnet werden. Haben die von P ausgehenden Kanten in $R^{(n)}$ entweder alle eine Größe $\geq \pi/2$ (stumpf oder orthogonal) oder sind alle nichtstumpf, dann ist w'_P nicht zu zerlegen, und es wird $w_P^{(1)'} := w'_P$ und $q_0 := 1$ gesetzt.

4. Jedes $(r - 1)$ -dimensionale zulässige Simplex $w_P^{(i)'} (i = 1, 2, \dots, q_0)$ wird in zulässige Simplexe zerlegt, die keine stumpfen Kanten besitzen. Das ist auf Grund der Induktionsvoraussetzung gewährleistet. Dadurch wird schließlich w'_P in q zulässige Simplexe mit nichtstumpfen Kanten, nämlich in $R_1^{(n-1)'}, R_2^{(n-1)'}, \dots, R_q^{(n-1)'}$ vollständig zerlegt.

5. Die jeweiligen elliptischen Ebenen durch P einerseits und durch jeweils eine Kante der Simplexe $R_i^{(n-1)'}$ ($i = 1, \dots, q$) andererseits schneiden aus der Wand w_P als Projektion der Simplexkanten von $R_i^{(n-1)'}$ wiederum Kanten aus. Diese werden derart zu Kantenskeletten zusammengefaßt (eine Kante kann dabei zu mehreren Kantenskeletten gehören), so daß die Projektion dieser Kantenskelette von P aus jeweils die Kantenskelette der Simplexe $R_i^{(n-1)'}$ ($i = 1, \dots, q$) ergibt. Diese Kantenskelette sind eindeutig bestimmt und geben Anlaß zu den zulässigen Simplexen $R_i^{(n-1)'}$ ($i = 1, \dots, q$). Sie stellen eine Zerlegung der Wand w_P von $R^{(n)}$ in zulässige Simplexe mit nichtstumpfen Kanten dar.

6. Die Zerlegung der Wand w_P in die Simplexe $R_i^{(n-1)'}$ induziert eine Zerlegung des Simplexes $R^{(n)}$ in Teilsimplexe, die alle P als einen Eckpunkt und jeweils $R_i^{(n-1)'}$ ($i = 1, \dots, q$) als die dem Eckpunkt P gegenüberliegende Wand besitzen. Bei einem jeden solchen Teilsimplex können nur solche Kanten stumpf sein, die P als einen Endpunkt haben. Ferner besitzt die Projektion (Projektionszentrum P) der Wand von $R^{(n)}$ ($1 \leq i \leq q$), die gegenüber P liegt, auf die Polare p bei jedem $R_i^{(n-1)'}$ nur nicht-

stumpfe Kanten. Die Menge der Simplexe $R_i^{(n-1)}$ ($i = 1, \dots, q$) zerfällt in zwei Arten. Die Simplexe der ersten Art haben keine stumpfen Kanten. Die Simplexe der zweiten Art haben mindestens eine stumpfe Kante (mit P als dem einen Endpunkt). Die übrigen Kanten dieser Simplexe zweiter Art, die von P ausgehen, haben dann alle eine Größe $\geq \pi/2$.

7. Nunmehr wird das zulässige Simplex $R_i^{(n)}$ ($1 \leq i \leq q$) mit dem Eckpunkt P betrachtet, bei dem sämtliche Kanten, die P nicht als Endpunkt enthalten, nichtstumpf sind, und wobei für die Größe aller Kanten, die P als einen Endpunkt enthalten, entweder $\leq \pi/2$ (erster Art) oder $\geq \pi/2$ mit mindestens für eine Kante $> \pi/2$ (zweiter Art) gilt. Gehört $R_i^{(n)}$ zur ersten Art, dann ist keine weitere Zerlegung erforderlich, es gilt $R_i^{(n)} \in \mathfrak{S}^{(n)}$. Gehört $R_i^{(n)}$ zur zweiten Art, dann läßt sich $R_i^{(n)}$ durch Schnitt mit der Polaren p in zwei Polyeder zerlegen. Das eine mit dem Eckpunkt P ist ein orthopyramidales Simplex (alle Kanten, die von P ausgehen, sind orthogonal; vgl. [2]) und gehört zu $\mathfrak{S}^{(n)}$. Das zweite sei das Polyeder Q . Für dieses gilt das Folgende:

Da $R_i^{(n)}$ ein zulässiges Simplex ist, gibt es eine Hyperkugel h_0 , in deren Inneren $R_i^{(n)}$ enthalten ist. Das Kantenskelett von Q liegt demzufolge ebenfalls ganz im Inneren der Hyperkugel h_0 . Alle Kanten und Diagonalen von Q als Verbindung zweier beliebiger Eckpunkte von Q im Inneren von h_0 können nicht stumpf sein. Um dieses nachzuweisen, ist lediglich noch der Fall zu untersuchen, bei dem der eine Eckpunkt P_1 in p , der andere Eckpunkt P_2 nicht in p und P_1 nicht auf der Kante P, P_2 liegen vgl. Abb. 8; durch einen Winkelbogen mit einem Punkt werden rechte Dreiecks-

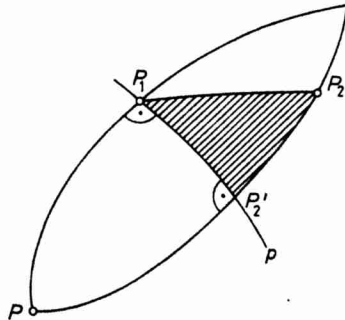


Abb. 8

winkel gekennzeichnet). Die Projektion von P_2 in p sei $P_2' (\neq P_1)$. Dann läßt sich aber immer die Kante P_1, P_2 innerhalb eines elliptischen Dreiecks legen, bei dem zwei Seiten die Größe $\pi/2$ haben und die dritte Seite P_1, P_2' eine Größe $\leq \pi/2$ hat. Demzufolge kann die Kante P_1, P_2 nicht stumpf sein.

8. Q kann darum wiederum durch „Eckenabschneiden“ stets in zulässige Simplexe mit nichtstumpfen Kanten zerlegt werden. Damit ist eine vollständige Zerlegung von $R^{(n)}$ in Simplexe aus der Menge $\mathfrak{S}^{(n)}$ angegeben. Satz 7 ist somit bewiesen.

Jetzt soll ein Hilfssatz über die möglichen Größen der Kanten (Seiten) eines zulässigen Simplexes $R^{(3)}$ (Dreieck) angegeben werden.

Hilfssatz 13. Bei einem zulässigen Dreieck können hinsichtlich der Größen der Seiten genau die folgenden sieben Fälle auftreten (vgl. Abb. 9; stumpfe Seiten sind durch Verstärkung, stumpfe (Dreiecks-)Winkel durch einen verstärkten Winkelbogen gekennzeichnet):

1. keine stumpfe Seite und kein stumpfer Winkel,
2. keine stumpfe Seite und ein stumpfer Winkel,

3. eine stumpfe Seite und ein stumpfer Winkel,
(der stumpfe Winkel liegt der stumpfen Seite gegenüber),
4. zwei stumpfe Seiten und ein stumpfer Winkel
(eine stumpfe und eine nichtstumpfe Seite erzeugen die Schenkel des Winkels),
5. zwei stumpfe Seiten und zwei stumpfe Winkel
(die beiden stumpfen Seiten erzeugen die Schenkel des dritten nichtstumpfen Winkels),
6. zwei stumpfe Seiten und drei stumpfe Winkel,
7. drei stumpfe Seiten und drei stumpfe Winkel.

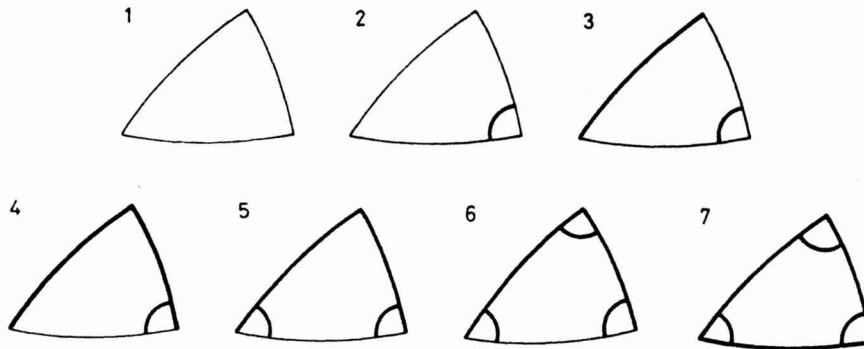


Abb. 9

Beweis. Betrachtet werden zulässige Dreiecke in der elliptischen Ebene. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann vorausgesetzt werden, daß diese höchstens eine stumpfe Seite besitzen. Andernfalls gibt es ein geeignetes Nebendreieck mit höchstens einer stumpfen Seite. Ein solches Dreieck D , dessen längste Seite a sei, kann in ein gleichschenkliges zulässiges Dreieck G eingebettet werden, dessen Seiten die Größen $\pi/2$, $\pi/2$ und $|a|$ besitzen (vgl. Abb. 10). Der Seite a liegt in D die Ecke A

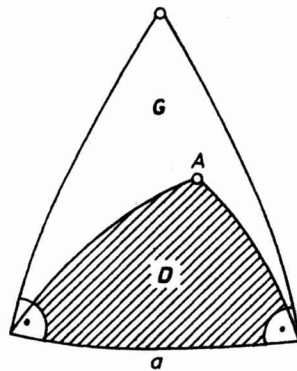


Abb. 10

gegenüber. Ist die Seite a nichtstumpf ($0 < |a| \leq \pi/2$), dann besitzt nach Voraussetzung D keine stumpfen Seiten. Es kann in D höchstens bei A ein stumpfer Winkel vorkommen. Ist die Seite a stumpf ($\pi/2 < |a| < \pi$), dann sind nach Voraussetzung die beiden anderen Seiten von D nicht stumpf. Bei A muß dann in D ein stumpfer Winkel vorkommen. Konkrete einfache Beispiele für diese ersten drei Fälle sind die Dreiecke G selber für die beiden Fälle 1 und 3 und für den Fall 2 das Dreieck mit den

Seiten der Größen $\pi/2$, $\pi/3$, $\pi/3$. Die Fälle 4 bis 7 ergeben sich dann auf Grund der eingangs gemachten Bemerkung über die Nebendreiecke.

Hilfssatz 14. *Besitzt ein zulässiges Dreieck D des zweidimensionalen elliptischen Raumes keine stumpfen Seiten, höchstens eine orthogonale Seite und keine stumpfen Winkel, dann kommt in D höchstens ein rechter Winkel vor.*

Beweis. Dieser Hilfssatz ergibt sich einerseits sofort aus Sätzen der sphärischen Geometrie. In Analogie zum Beweis von Hilfssatz 13 läßt sich andererseits das Dreieck D ebenfalls in einem doppeltrechtwinkligen zulässigen Dreieck einbetten, bei dem die Seite, an der die beiden rechten Winkel anliegen, dieselbe Größe wie eine der beiden Katheten von D hat (vgl. Abb. 11).

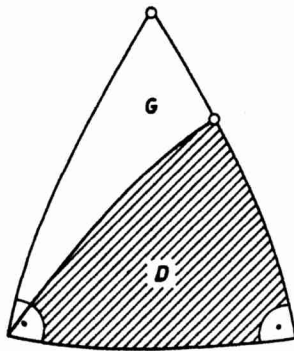


Abb. 11

In Abb. 12 sind Beispiele für die Zerlegung eines Simplexes $R^{(n)}$ in Teilsimplexe aus $\mathfrak{S}^{(n)}$ für $n = 3$ dargestellt. In Abb. 12a hat das Dreieck $R^{(3)} = P, P_1, P_2$ genau eine stumpfe Kante P_1, P_2 , und in Abb. 12b hat es drei stumpfe Kanten. $R_1^{(2)'}$ ist hier eine Kante und hat die Größe $\pi/2$. Wenn das Simplex $R^{(3)}$ genau zwei stumpfe Kanten hat, dann läßt es sich entweder genauso wie in Abb. 12b zerlegen, wenn bei P ein stumpfer Winkel oder, wie in Abb. 12c, wenn bei P kein stumpfer Winkel liegt. Das sind, abgesehen von dem Fall eines Dreiecks mit nichtstumpfen Kanten, das bereits selbst zu $\mathfrak{S}^{(3)}$ gehört, gemäß Hilfssatz 13 alle Möglichkeiten für ein zulässiges Simplex $R^{(3)}$. Es gilt

Satz 8. *Für jedes zulässige Simplex $R^{(3)}$ gibt es eine Zerlegung in höchstens sechs zulässige Teilsimplexe $R_i^{(3)}$ ($i = 1, 2, \dots, q$; $q \leq 6$) mit $R_i^{(3)} \in \mathfrak{S}^{(3)}$. Für jedes zulässige Simplex $R^{(4)}$ gibt es eine Zerlegung in höchstens 32 zulässige Teilsimplexe $R_i^{(4)}$ ($i = 1, 2, \dots, q$; $q \leq 32$) mit $R_i^{(4)} \in \mathfrak{S}^{(4)}$.*

Beweis. Der erste Teil dieses Satzes folgt aus den vorigen Betrachtungen. Es ist darum lediglich noch der Nachweis für $n = 4$ zu führen. Eine Klassifikation der Simplexe $R^{(4)}$ (Tetraeder) nach der Anzahl ihrer stumpfen Kanten ergibt für die einzelnen Tetraedertypen in erster grober Abschätzung jeweils die folgenden Höchstzahlen von Teiltetraedern aus $\mathfrak{S}^{(4)}$, in die $R^{(4)}$ zerlegt werden kann:

1. keine stumpfen Kanten: Tetraeder ist selbst aus $\mathfrak{S}^{(4)}$;
2. eine stumpfe Kante: höchstens 6 Teiltetraeder aus $\mathfrak{S}^{(4)}$;
3. zwei stumpfe Kanten:
 - a) von genau einem Eckpunkt ausgehend: höchstens 6 Teiltetraeder aus $\mathfrak{S}^{(4)}$,
 - b) gegenüberliegend: höchstens 16 Teiltetraeder aus $\mathfrak{S}^{(4)}$;

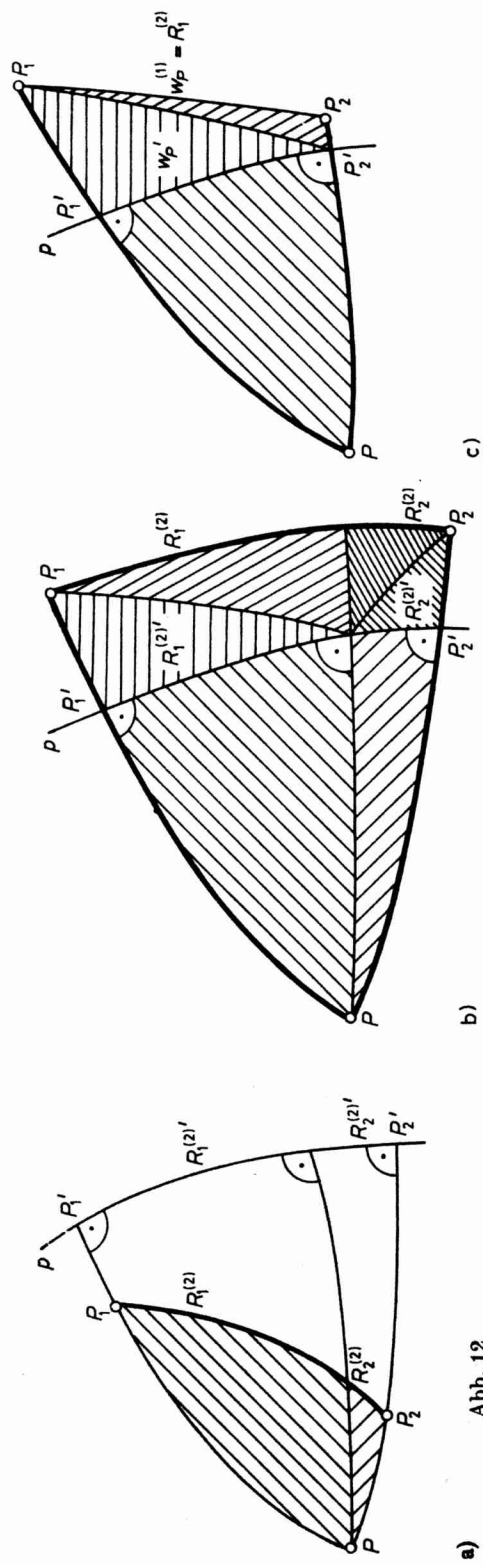


Abb. 12

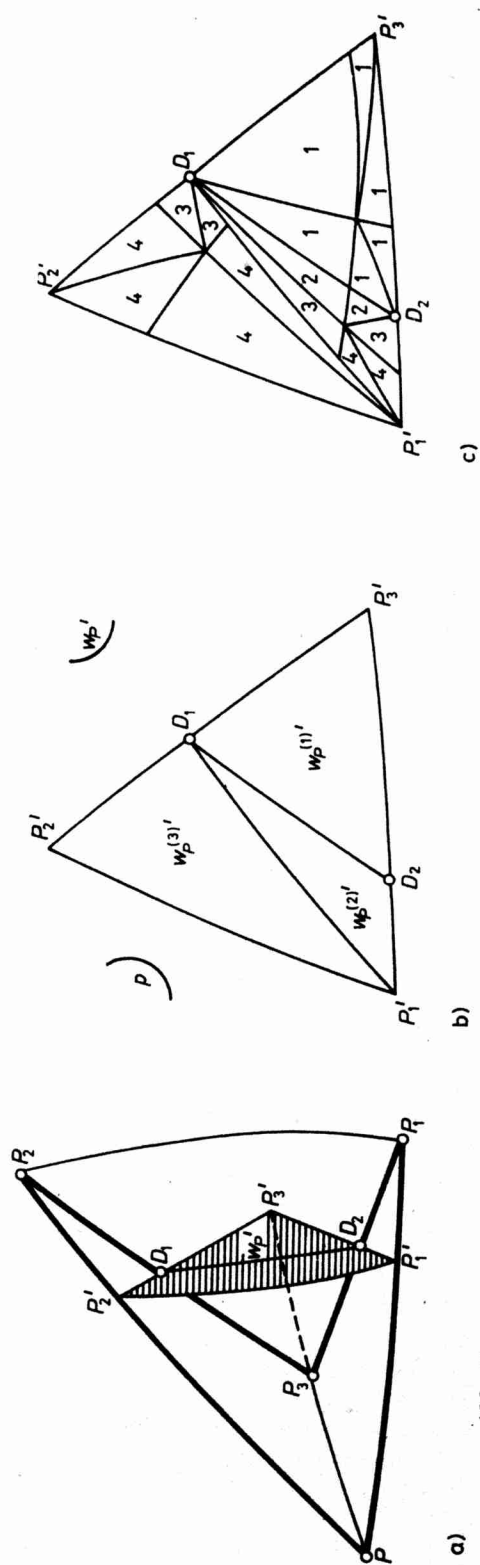


Abb. 13

4. drei stumpfe Kanten:

- a) von einem Eckpunkt ausgehend: höchstens 24 Teiltetraeder aus $\mathfrak{S}^{(4)}$,
- b) ein Dreieck bildend: höchstens 6 Teiltetraeder aus $\mathfrak{S}^{(4)}$,
- c) nicht von genau einer Ecke ausgehend und kein Dreieck bildend: höchstens 30 Teiltetraeder aus $\mathfrak{S}^{(4)}$;

5. vier stumpfe Kanten:

- a) die zwei nichtstumpfen Kanten von genau einem Eckpunkt ausgehend: höchstens 24 Teiltetraeder aus $\mathfrak{S}^{(4)}$,
- b) die zwei nichtstumpfen Kanten sind gegenüberliegend: höchstens 46 Teiltetraeder aus $\mathfrak{S}^{(4)}$;

6. fünf stumpfe Kanten: höchstens 24 Teiltetraeder aus $\mathfrak{S}^{(4)}$;7. sechs stumpfe Kanten: höchstens 24 Teiltetraeder aus $\mathfrak{S}^{(4)}$.

Es soll jetzt hier nur der Typ 5b), der zunächst zu der höchstmöglichen Anzahl von Teiltetraedern aus $\mathfrak{S}^{(4)}$ führt, falls die beiden nichtstumpfen Kanten noch zusätzlich nichtorthogonal sind, explizit zur Veranschaulichung des Zerlegungsalgorithmus dargestellt werden.

Es seien P, P_3 und P_1, P_2 die beiden nichtstumpfen und nichtorthogonalen Kanten des Tetraeders $R^{(4)} = P, P_1, P_2, P_3$, die Projektion der Wand w_P von P aus in die Polare p von P sei $w'_P = P'_1, P'_2, P'_3$ (vgl. Abb. 13a) (Schritte 1 und 2 des Algorithmus). Der Durchschnitt von w_P und p gibt die elliptische Kante D_1, D_2 . Durch D_1, D_2 wird w'_P in das elliptische Dreieck $w^{(1)'}_P = D_1, D_2, P'_3$ und in das ebene elliptische Viereck P'_1, D_2, D_1, P'_2 zerlegt. Durch Eckenabschneiden entsteht aus dem Viereck etwa $w^{(2)'}_P = D_1, D_2, P'_1$ und $w^{(3)'}_P = P'_1, D_1, P'_2$ (vgl. Abb. 13b) (Schritt 3). Jetzt werden die Dreiecke $w^{(i)'}_P$ ($i = 1, 2, 3$) in zulässige Simplexe $R^{(3)'}_j$ (jeweils höchstens sechs Dreiecke; $j = 1, 2, \dots, q$; $q \leq 18$) zerlegt (Schritt 4). In Abb. 13c ist die Maximalzahl von 18 Teildreiecken angegeben. In jedem Dreieck ist eingezeichnet, zu wieviel Teiltetraedern von $R^{(4)}$ jedes $R^{(3)'}_j$ dann jeweils Anlaß gibt (Schritte 5 bis 8). Man beachte dabei, daß die Dreiecke in $w^{(1)'}_P$ Teiltetraeder erster Art und die übrigen Teildreiecke solche zweiter Art induzieren. Als Maximalzahl von möglichen Teiltetraedern aus $\mathfrak{S}^{(4)}$ ergibt sich demzufolge $6 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 4 = 46$.

Wird nun eine feinere Abschätzung der Anzahl der Teiltetraeder aus $\mathfrak{S}^{(4)}$ vorgenommen, so ergibt sich, daß im Höchstfall für den Typ 5b) eine Zerlegung von $w^{(3)'}_P$ in sechs Teiltetraeder aus $\mathfrak{S}^{(4)}$ nur vorliegen kann, wenn in $w^{(3)'}_P$ drei stumpfe Winkel vorkommen. Das bedeutet, daß sich für $w^{(1)'}_P$ und $w^{(2)'}_P$ eine Zerlegung in jeweils höchstens drei Teiltetraeder aus $\mathfrak{S}^{(4)}$ nötig macht, so daß man mit einer Höchstzahl von insgesamt 32 Teiltetraedern aus $\mathfrak{S}^{(4)}$ — immer noch als größte Anzahl der Teiltetraeder im Vergleich zu allen anderen möglichen Tetraedertypen — auskommt. Aus Abb. 14 kann hierfür in analoger Weise wie vorhin aus Abb. 13c abgelesen werden: $4 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 32$.

Da ein Simplex $R^{(n)}$ aus $\mathfrak{S}^{(n)}$ keine stumpfen Kanten hat, gilt auf Grund der Hilfsätze 13 und 14

Satz 9. Die dreieckigen Wände eines zulässigen Simplexes $R^{(n)} \in \mathfrak{S}^{(n)}$ ($n \geq 3$) enthalten jeweils höchstens einen stumpfen Dreieckswinkel. Enthält eine dreieckige Wand von $R^{(n)} \in \mathfrak{S}^{(n)}$ keinen stumpfen Dreieckswinkel, dann enthält sie höchstens einen rechten Dreieckswinkel, wenn mindestens zwei Kanten dieser Wand nicht orthogonal sind. Eine dreieckige Wand von $R^{(n)} \in \mathfrak{S}^{(n)}$ kann nicht gleichzeitig einen stumpfen und einen rechten Dreieckswinkel enthalten.

Damit liegen in den zulässigen Simplexen aus $\mathfrak{S}^{(n)}$ für die dreieckigen Wände dieselben Verhältnisse hinsichtlich des Vorkommens von stumpfen bzw. rechten Dreieckswinkeln wie bei jedem beliebigen anderen Simplex des euklidischen oder des

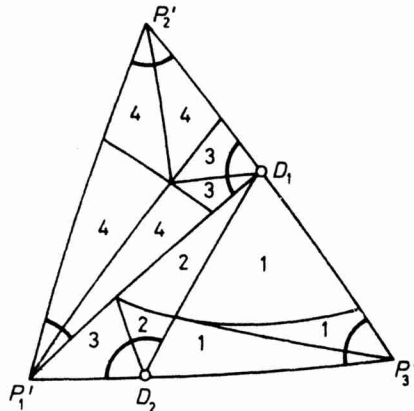


Abb. 14

hyperbolischen r -dimensionalen Raumes ($r = n + 1$) vor. Darum können Simplexe bezüglich des Vorkommens von stumpfen und nichtstumpfen Dreieckswinkeln in Räumen konstanter Krümmung (bei positiver Krümmung eingeschränkt auf zulässige Simplexe aus $\mathfrak{S}^{(n)}$) gemeinsam weiteruntersucht werden.

LITERATUR

- [1] BÖHM, J.: Simplexinhalt in Räumen konstanter Krümmung beliebiger Dimension. J. reine angew. Math. 202 (1959), 16—51.
- [2] BÖHM, J.: Einige kombinatorisch-topologische Eigenschaften von allgemeinen r -dimensionalen Orthoschemen. Math. Nachr. 61 (1974), 51—67.
- [3] BÖHM, J., u. a.: Geometrie I, 2. Aufl. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1976.
- [4] COXETER, H. S. M.: On Schläfli's generalisation of Napier's Pentagramma Mirificum. Bull. Calcutta Math. Soc. 28 (1936), 125—144.
- [5] COXETER, H. S. M.: Regular Complex Polytopes. Cambridge Univ. Press, London 1973.
- [6] FEJES TÓTH, L.: Reguläre Figuren. Akadémiai Kiadó, Budapest/B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1965.
- [7] GRÜNBAUM, B.: Convex Polytopes. Interscience, London—New York—Sydney 1967.
- [8] HADWIGER, H.: Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie. Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1957.
- [9] HERTEL, E.: Polyederstrukturen. Math. Nachr. 62 (1974), 57—63.
- [10] HOPF, H.: Curvatura Integra. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl., 1926, S. 134 ff.
- [11] SCHLÄFLI, L.: Gesammelte mathematische Abhandlungen, Bd. 1 (Theorie der vielfachen Kontinuität; aus dem Jahre 1852). Birkhäuser Verlag, Basel 1950, S. 227 ff.

Manuskripteingang: 15. 12. 1975

VERFASSER:

JOHANNES BÖHM, Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena

