Beiträge zur Algebra und Geometrie
5 (1976), 23–32

# Orientierung in angeordneten affinen Räumen

WALTER BÖRNER

## 1. Grundlagen

In der folgenden Arbeit, die als Beitrag zur „synthetischen" Geometrie in einem $n$-dimensionalen affinen Raum verstanden werden soll, wird eine Einführungsmöglichkeit des Begriffes der Orientierung dargestellt, die auf Inzidenz-, Parallelitäts- und Anordnungsaxiomen beruht; von Koordinaten wird kein Gebrauch gemacht, wohl aber von Verschiebungen. (Über das Verhältnis eines solchen Weges zu den sonst üblichen siehe [1] und die dort angeführte Literatur.)
Als axiomatische Grundlage für das hier darzulegende Vorgehen kann eine mit Mitteln der Verbandstheorie aufgebaute Definition des Begriffes $n$-dimensionaler Raum dienen (siehe [2], [3], [4]). Die diesbezüglichen grundlegenden Definitionen und Sachverhalte, die für die Einführung des Orientierungsbegriffes hier benötigt werden, seien zunächst zusammengestellt. Die ohne Beweise aufgeführten Sätze können als Axiome aufgefaßt werden.
Es sei $n$ eine feste natürliche Zahl $\geqq 2$. Ein *$n$-dimensionaler affiner Raum* kann gekennzeichnet werden als eine Menge, deren Elemente *Punkte* heißen, zusammen mit einem System von Teilmengen, dessen Elemente *Teilräume* heißen; jedem Teilraum $T$ ist eine *Dimension*, nämlich eine natürliche Zahl $\dim T$ mit $0 \leqq \dim T \leqq n$ zugeordnet; die *nulldimensionalen* Teilräume sind genau die Einermengen, der einzige *$n$-dimensionale Teilraum* ist die Menge aller Punkte, die eindimensionalen Teilräume heißen *Geraden*, die zweidimensionalen heißen *Ebenen*, die $(n-1)$-dimensionalen heißen *Hyperebenen*. Zu je $k+1$ Punkten $(0 \leqq k \leqq n)$, die nicht in einem $(k-1)$-dimensionalen Teilraum enthalten sind, gibt es genau einen $k$-dimensionalen Teilraum, der diese Punkte enthält (Verbindungsraum dieser Punkte). Unter der *Hülle* $\mathcal{H}(m)$ einer Punktmenge $m$ soll der im Sinne des Enthaltenseins kleinste $m$ enthaltende Teilraum verstanden werden. Teilräume $T_1$, $T_2$ gleicher Dimension heißen *parallel* (in Zeichen: $T_1 \parallel T_2$), wenn $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ und $\dim \mathcal{H}(T_1 \cup T_2) = 1 + \dim T_1$ gilt oder wenn $T_1 = T_2$ ist. Für Teilräume $T_1$, $T_2$ unterschiedlicher Dimension (etwa $\dim T_1 < \dim T_2$) bedeutet $T_1 \parallel T_2$: Es gibt einen Teilraum $T'$ mit $T' \subset T_2$, $\dim T' = \dim T_1$ und $T' \parallel T_1$. Zu jedem Teilraum $T$ und zu jedem Punkt $P$ gibt es genau einen zu $T$ gleichdimensionalen parallelen Teilraum durch $P$. Parallelität ist bei gleicher Dimension Äquivalenzrelation. Der *Durchschnitt zweier Teilräume* ist ein Teilraum oder leer, und es gilt für nicht punktfremde Teilräume $T$, $U$ der *Dimensionssatz* $\dim (T \cap U) = \dim T + \dim U - \dim \mathcal{H}(T \cup U)$. Die Menge

aller Punkte gestattet eine kommutative Gruppe von mit Ausnahme der Identität fixpunktfreien Abbildungen auf sich, die *Verschiebungen* genannt werden; zu zwei beliebigen Punkten gibt es genau eine Verschiebung, die den einen Punkt auf den anderen abbildet; die Bildmenge eines Teilraumes ist ein dazu paralleler gleichdimensionaler Teilraum. Eine Menge, die aus allen zu einer festen Geraden parallelen Geraden besteht, heißt *Richtung*. Die Verbindungsgeraden von Original- und Bildpunkten einer von der identischen Abbildung verschiedenen Verschiebung bilden eine Richtung (*Verschiebungsrichtung*). Sind $H_1$, $H_2$ zwei Hyperebenen, $\mathfrak{R}$ eine weder zu $H_1$ noch $H_2$ parallele Richtung, so versteht man unter der *Parallelprojektion* von $H_1$ auf $H_2$ in Richtung $\mathfrak{R}$ die Abbildung $\pi$ mit $\pi(X) = G(X) \cap H_2$, wobei $X$ ein Punkt von $H_1$ und $G(X)$ die Gerade in Richtung $\mathfrak{R}$ durch $X$ ist. Jeder $k$-dimensionale Teilraum $(1 \leqq k \leqq n)$ ist für sich genommen ein $k$-dimensionaler affiner Raum.

Bezüglich der *Anordnung* wird vorausgesetzt, daß jede Gerade eine (linear) dicht geordnete Menge ohne größtes und kleinstes Element ist. In üblicher Weise wird der Begriff der *Zwischenrelation* definiert. Die Zwischenrelation ist invariant gegen Parallelprojektion. Ein beliebiger $(k-1)$-dimensionaler Teilraum $T$ $(1 \leqq k \leqq n)$ erzeugt in jedem $T$ enthaltenden $k$-dimensionalen Teilraum $U$ genau eine Zerlegung der Menge $U - T$ in zwei Klassen $h_1$, $h_2$, *$k$-dimensionale Halbräume* genannt (auch: *Seiten* von $T$), derart, daß zwei Punkte genau dann in verschiedenen Klassen liegen, wenn zwischen ihnen ein Punkt von $T$ liegt; $h_1$, $h_2$ heißen dann *entgegengesetzt*, $T$ heißt *Begrenzungsraum* von $h_1$ bzw. $h_2$, in Zeichen: $T = \operatorname{Begr} h_i$; $\operatorname{Begr} h_i$ ist durch $h_i$ eindeutig bestimmt; $U\ (= \mathcal{H}(h_i))$ heißt *Trägerraum* des Halbraumes $h_i$ $(i = 1, 2)$. Eindimensionale Halbräume werden *Strahlen* genannt, der Begrenzungsraum eines Strahles heißt *Anfangspunkt* des Strahles; der Strahl mit dem Anfangspunkt $X$, der den Punkt $Y\ (\neq X)$ enthält, werde mit $XY^+$ bezeichnet. $(n-1)$-dimensionale Halbräume werden *Halbhyperebenen* genannt. Sind zwei Punktmengen $m_1$, $m_2$ in entgegengesetzten Halbräumen enthalten, so sagt man, daß der Begrenzungsraum dieser Halbräume die Mengen $m_1$ und $m_2$ trennt. Die Zwischenrelation ist invariant gegen Verschiebung, folglich auch die Eigenschaft, Halbraum oder Begrenzungsraum zu sein, getrennt zu werden usw. Eine Verschiebung läßt die Ordnungsrelation auf den Geraden in Verschiebungsrichtung invariant. Eine Verschiebung, deren Richtung parallel zu einem Teilraum $T$ ist, bildet die von $T$ erzeugten Halbräume auf sich ab. Es gelten folgende leicht zu verifizierende Hilfssätze:

Hilfssatz 1. *Ist $h$ ein $k$-dimensionaler Halbraum $(2 \leqq k \leqq n)$, $T$ ein zu* Begr $h$ *nicht paralleler $(k-1)$-dimensionaler Teilraum von $\mathcal{H}(h)$, so ist $T \cap h$ ein $(k-1)$-dimensionaler Halbraum, und es ist* $\operatorname{Begr}(T \cap h) = T \cap \operatorname{Begr} h$.

Hilfssatz 2. *Ist $h$ ein $k$-dimensionaler Halbraum $(2 \leqq k \leqq n)$, $G$ eine in* Begr $h$ *enthaltene Gerade, $G'$ eine zu $G$ parallele Gerade, so ist $G' \subset h$ oder $G' \cap h = \emptyset$.*

Sind $s_1$, $s_2$, $s_3$ drei in derselben Ebene enthaltene Strahlen mit gemeinsamem Anfangspunkt, so soll die Aussage „$s_1$ trennt $s_2$ und $s_3$" bedeuten, daß die Trägergerade von $s_1$ die Strahlen $s_2$ und $s_3$ trennt. Es gilt folgender Satz über drei Strahlen (Beweis siehe [1]):

Hilfssatz 3. *Von drei in derselben Ebene enthaltenen Strahlen mit gemeinsamem Anfangspunkt hat entweder genau einer die Eigenschaft, die beiden anderen zu trennen, oder alle drei haben diese Eigenschaft.*

Die folgenden Betrachtungen über das Verhalten von Halbhyperebenen bei Parallelprojektion erweisen sich im weiteren als nützlich.
Es seien $H_1$, $H_2$ zwei nicht parallele Hyperebenen. $H_i$ erzeugt zwei $n$-dimensionale Halbräume $h_{i1}$, $h_{i2}$ $(i = 1, 2)$. Die vier Mengen $h_{1i} \cap h_{2j}$ $(i, j \in \{1, 2\})$ mögen die vier von $H_1$, $H_2$ erzeugten *Sektoren* heißen. Ist $G$ eine beliebige weder in $H_1$ noch in $H_2$ enthaltene Gerade durch einen Punkt $P$ aus $H_1 \cap H_2$, so ist $G - \{P\}$ entweder in $v_1 := (h_{11} \cap h_{21}) \cup (h_{12} \cap h_{22})$ oder in $v_2 := (h_{11} \cap h_{22}) \cup (h_{12} \cap h_{21})$ enthalten, denn jeder der beiden von $P$ auf $G$ erzeugten Strahlen ist in einem der vier Sektoren enthalten, und ist einer in $h_{1i} \cap h_{2j}$ enthalten, so der andere in $h_{1,i+1} \cap h_{2,j+1}$ (Addition im Index modulo 2). Ordnet man jeder Geraden $G$, die nicht in $H_1 \cup H_2$ enthalten ist, aber einen Punkt $X$ von $H_1 \cap H_2$ enthält, diejenige der beiden Mengen $v_1$, $v_2$ zu, in der $G - \{X\}$ enthalten ist, so wird zwei parallelen derartigen Geraden dieselbe Menge zugeordnet; denn es gibt eine Verschiebung, die die eine Gerade auf die andere abbildet, wobei die Hyperebenen und Halbräume und folglich $v_1$ und $v_2$ als Ganzes festbleiben. Es ist daher sinnvoll, einer jeden weder zu $H_1$ noch zu $H_2$ parallelen Richtung $\mathcal{R}$ eine der Mengen $v_1$, $v_2$ zuzuordnen, nämlich diejenige, in der eine beliebige zu $\mathcal{R}$ gehörende durch einen Punkt von $H_1 \cap H_2$ gehende Gerade (ohne den Punkt aus $H_1 \cap H_2$) enthalten ist. Richtungen, denen dieselbe Menge zugeordnet ist, sollen bezüglich $H_1$, $H_2$ *sektorgleich* heißen; es gibt zwei Klassen sektorgleicher Richtungen.
Die Hyperebene $H_i$ $(i = 1, 2)$ wird durch $H_1 \cap H_2$ in zwei Halbhyperebenen $h_i'$, $h_i''$ zerlegt. Ist $\pi$ eine Parallelprojektion von $H_1$ auf $H_2$ in einer weder zu $H_1$ noch zu $H_2$ parallelen Richtung, so ist leicht nachzuweisen, daß die Bildmenge von $h_1'$ (bzw. $h_1''$) eine der Halbhyperebenen $h_2'$ oder $h_2''$ ist. $\pi$ induziert also eine Abbildung des Halbhyperebenenpaares $(h_1', h_1'')$ entweder auf das Paar $(h_2', h_2'')$ oder auf $(h_2'', h_2')$. Es gilt

Hilfssatz 4. *Sind $H_1$, $H_2$ zwei nicht parallele Hyperebenen, $\pi_1$, $\pi_2$ zwei Parallelprojektionen in bezüglich $H_1$, $H_2$ sektorgleichen Richtungen, so sind die von $\pi_1$, $\pi_2$ induzierten Abbildungen der Halbhyperebenenpaare einander gleich.*

Beweis. Es sei $P$ $(\notin H_1 \cap H_2)$ ein beliebiger Punkt von $h_1'$, $S$ ein beliebiger Punkt von $H_1 \cap H_2$ und $\tau$ die Verschiebung, die $P$ auf $S$ abbildet; die Richtung von $\tau$ ist dann parallel zu $H_1$. Da $\pi_1$, $\pi_2$ sektorgleiche Richtungen haben, gehören die Geraden durch $S$ in den beiden Projektionsrichtungen zur gleichen Menge $v_j$ $(j = 1$ oder $2)$, die Strahlen $\tau(P\pi_1(P)^+)$ und $\tau(P\pi_2(P)^+)$ also entweder a) zum gleichen Sektor oder b) zu zwei Sektoren, deren Vereinigung $v_j$ ergibt. Im Fall a) sind die genannten Strahlen in demselben Halbraum bezüglich $H_1$ enthalten, also auch ihre Originale $P\pi_1(P)^+$ und $P\pi_2(P)^+$, und somit liegen die Punkte $\pi_1(P)$ und $\pi_2(P)$ in derselben Halbhyperebene von $H_2$ bezüglich $H_1 \cap H_2$, d. h., $\pi_1$ und $\pi_2$ induzieren dieselbe Halbhyperebenenzuordnung. Der Fall b) kann nicht eintreten, denn er würde bedeuten, daß die Strahlen $\tau(P\pi_1(P)^+)$ und $\tau(P\pi_2(P)^+)$ in entgegengesetzten Halbräumen bezüglich der Hyperebene $H_2$, ihre Originale und somit die in $H_2$ liegenden Punkte $\pi_1(P)$ und $\pi_2(P)$ also in verschiedenen Seiten bezüglich $\tau^{-1}(H_2)$ enthalten wären, aber $H_2$ ist ganz in einem einzigen Halbraum bezüglich $\tau^{-1}(H_2)$ enthalten.

## 2. Orientierungsfiguren und Gleichorientierung

Eine Orientierung soll durch eine Punktmenge repräsentiert werden. Als zweckmäßig hierfür erweist sich der Begriff der Orientierungsfigur.
Es sei $k$ eine natürliche Zahl mit $1 \leq k \leq n$.

**Definition 1.** $f$ ist *$k$-dimensionale Orientierungsfigur* (OF) genau dann, wenn $f = \{A\} \cup h^1 \cup h^2 \cup \cdots \cup h^k$ ist mit:

(O 1) $h^i$ ist ein $i$-dimensionaler Halbraum ($i = 1, \ldots, k$),

(O 2) $h^i \subset \operatorname{Begr} h^{i+1}$ ($i = 1, \ldots, k-1$),

(O 3) $A$ ist Anfangspunkt von $h^1$.

Der Punkt $A$ wird *Anfangspunkt* von $f$ genannt, $h^1$ heißt *Randstrahl* von $f$ (in Zeichen: $h^1 = \operatorname{Rs} f$) und $\mathcal{H}(f)$ ($= \mathcal{H}(h^k)$) heißt *Trägerraum* von $f$.

**Folgerungen.**

(1) Es ist $\mathcal{H}(h^i) = \operatorname{Begr} h^{i+1}$ für $i = 1, \ldots, k-1$.

(2) Es ist $h^i \subset \operatorname{Begr} h^j$ für $1 \leqq i < j \leqq k$.

Der **Beweis** kann durch vollständige Induktion über $j$ erfolgen.

(3) Ist $f = \{A\} \cup h^1 \cup \cdots \cup h^k$ eine $k$-dimensionale OF und $T$ ein $(k-1)$-dimensionaler Teilraum durch $A$, der im Trägerraum von $f$ enthalten ist, aber $\operatorname{Rs} f$ nicht enthält, so ist $T \cap f$ eine $(k-1)$-dimensionale OF.

**Beweis.** Es ist $T \cap f = \{A\} \cup (T \cap h^2) \cup \cdots \cup (T \cap h^k)$. Wegen $h^1 \cap T = \{A\}$ folgt aus dem Dimensionssatz $\mathcal{H}(T \cup \mathcal{H}(h^1)) = \mathcal{H}(f)$ und somit wegen $h^1 \subset \mathcal{H}(h^l)$ für $1 \leqq l \leqq k$ erst recht $\mathcal{H}(T \cup \mathcal{H}(h^l)) = \mathcal{H}(f)$. Hieraus folgt, ebenfalls wegen des Dimensionssatzes, daß $T \cap \mathcal{H}(h^l)$ ein $(l-1)$-dimensionaler Teilraum $T_l$ ist. Folglich ist für $l = 2, \ldots, k$ wegen Hilfssatz 1

$$T \cap h^l = T \cap (\mathcal{H}(h^l) \cap h^l) = T_l \cap h^l$$

ein $(l-1)$-dimensionaler Halbraum, womit Eigenschaft (O 1) aus Definition 1 nachgewiesen ist. Ferner ist für $2 \leqq l \leqq k-1$ wegen Folgerung (1) und Hilfssatz 1

$$\begin{aligned} T \cap h^l &= T_l \cap h^l \subset T_{l+1} \cap \mathcal{H}(h^l) \subset T_{l+1} \cap \operatorname{Begr} h^{l+1} \\ &= \operatorname{Begr} (T_{l+1} \cap h^{l+1}) = \operatorname{Begr} (T \cap h^{l+1}), \end{aligned}$$

also gilt (O 2). Schließlich ist wegen Hilfssatz 1

$$\operatorname{Begr} (T \cap h^2) = \operatorname{Begr} (T_2 \cap h^2) = T_2 \cap \operatorname{Begr} h^2 = \{A\},$$

somit gilt (O 3).

Als Folgerung aus (3) beweist man leicht:

(4) Ist $f$ eine $k$-dimensionale OF ($2 \leqq k \leqq n-1$) und $T$ ein $k$-dimensionaler Teilraum durch den Anfangspunkt von $f$, der den Randstrahl von $f$ nicht enthält, und ist $\dim \mathcal{H}(T \cup f) = k$, so ist $T \cap f$ eine $(k-1)$-dimensionale OF.

Ferner:

(5) Ist $f_0$ eine $k$-dimensionale OF ($1 \leqq k \leqq n-1$) und $s$ ein Strahl, der denselben Anfangspunkt wie $f_0$ hat, aber nicht in $\mathcal{H}(f_0)$ enthalten ist, so gibt es genau eine $(k+1)$-dimensionale OF $f_1$ mit dem Randstrahl $s$ und der Eigenschaft $f_1 \cap \mathcal{H}(f_0) = f_0$.

Es sei $k$ eine natürliche Zahl mit $1 \leqq k \leqq n$.

**Definition 2.** $f_1$, $f_2$ seien zwei $k$-dimensionale OFen. Es wird induktiv über $k$ definiert:

a) Ist $k = 1$, so gilt $f_1 \operatorname{äq} f_2$ genau dann, wenn $f_1 = f_2$ ist.

b) Ist $2 \leqq k \leqq n$, so ist $f_1 \operatorname{äq} f_2$ gleichbedeutend damit, daß $f_1$ und $f_2$ denselben Trägerraum und denselben Anfangspunkt $A$ haben und daß eine der folgenden beiden Aussagen richtig ist:

(A 1) Die Randstrahlen von $f_1$ und $f_2$ sind nicht entgegengesetzt, und es gibt einen $A$ enthaltenden $(k-1)$-dimensionalen Teilraum $T$ des Trägerraumes von $f_1$, $f_2$, der die Randstrahlen von $f_1$ und $f_2$ nicht trennt und keinen von ihnen enthält, so daß $T \cap f_1$ äq $T \cap f_2$ ist.
(A 2) Die Randstrahlen von $f_1$ und $f_2$ sind entgegengesetzt, und es gibt eine $k$-dimensionale OF $f_3$ mit demselben Trägerraum und Anfangspunkt wie $f_1$ und $f_2$, so daß auf die Paare $f_1$, $f_3$ und $f_2$, $f_3$ jeweils die Aussage (A 1) zutrifft.

Statt „äq" soll auch „äquivalent" gesagt werden. Es gilt der

Satz 1. *Die in Definition 2 angegebene Relation „äq" ist über der Menge der $k$-dimensionalen OFen ($k = 1, \ldots, n$) eine Äquivalenzrelation, und die Anzahl der Klassen ist bei festgehaltenem Trägerraum und Anfangspunkt gleich 2.*

Beweis. Die Relation ist offensichtlich reflexiv und symmetrisch. Die Transitivität wird durch vollständige Induktion über die Dimension $k$ bewiesen; der Beweis fordert eine Reihe von Lemmata. Für $k = 1$ ist der Satz offenbar richtig. Zur Erleichterung der Sprechweise (Benutzung des Terminus Hyperebene) sei als Induktionsannahme die Richtigkeit des Satzes für $k = 1, \ldots, n-1$ vorausgesetzt; es ist zu zeigen, daß er für $k = n$ gilt.
Es ist leicht nachzuweisen, daß bei Parallelprojektion von einer Hyperebene $H_1$ auf eine Hyperebene $H_2$ die Bildmenge einer in $H_1$ enthaltenen $(n-1)$-dimensionalen OF eine in $H_2$ enthaltene OF ist.

Lemma 1. *Ist $f$ eine in der Hyperebene $H_1$ enthaltene $(n-1)$-dimensionale OF, ist $H_2$ eine Hyperebene durch den Anfangspunkt von $f$, die den Randstrahl von $f$ nicht enthält, und sind $\pi_1$, $\pi_2$ zwei Parallelprojektionen von $H_1$ auf $H_2$ mit bezüglich $H_1$, $H_2$ sektorgleichen Richtungen, so sind die OFen $\pi_1(f)$ und $\pi_2(f)$ äquivalent.*

Beweis. Der Randstrahl von $f$ ist ganz in einer von $H_1 \cap H_2$ in $H_1$ erzeugten Halbhyperebene enthalten, folglich sind auf Grund der Voraussetzung und wegen Hilfssatz 4 die Randstrahlen von $\pi_1(f)$ und $\pi_2(f)$ in derselben von $H_1 \cap H_2$ in $H_2$ erzeugten Halbhyperebene enthalten, und sie sind nicht entgegengesetzt. Bezeichnet man noch mit $p_i(f)$ die Menge der Punkte der Geraden in Richtung von $\pi_i$ $(i = 1, 2)$, die (mindestens) einen Punkt von $f$ enthalten, so gilt für $i = 1$ und $i = 2$: $\pi_i(f) = p_i(f) \cap H_2$ und (wegen $f \subset H_1$ und der Nichtparallelität von $H_1$ und der Richtung von $\pi_i$) $p_i(f) \cap H_1 = f$. Folglich gilt

$$\pi_i(f) \cap (H_1 \cap H_2) = p_i(f) \cap H_2 \cap (H_1 \cap H_2) = f \cap (H_1 \cap H_2),$$

also sind die $(n-2)$-dimensionalen OFen $\pi_1(f) \cap (H_1 \cap H_2)$ und $\pi_2(f) \cap (H_1 \cap H_2)$ gleich und somit äquivalent, womit für die OFen $\pi_1(f)$ und $\pi_2(f)$ die Bedingung (A 1) aus Definition 2 als erfüllt, also die Äquivalenz dieser OFen nachgewiesen ist.

Lemma 2. *Ist $f$ eine $n$-dimensionale OF, sind $H_1$ und $H_2$ zwei den Randstrahl von $f$ nicht enthaltende Hyperebenen durch den Anfangspunkt von $f$ und ist $\pi$ eine Parallelprojektion von $H_1$ auf $H_2$ in Richtung der Trägergeraden des Randstrahles von $f$, so ist $\pi(f \cap H_1) = f \cap H_2$.*

Beweis. Wegen Hilfssatz 2 ist eine zum Randstrahl $s$ von $f$ parallele Gerade durch einen in $f - s$ enthaltenen Punkt $P_0$ ganz in $f$ enthalten. Folglich gilt mit der im Beweis von Lemma 1 angegebenen Bedeutung von $p(f)$ die Gleichung $p(f) = f \cup s'$, wobei $s'$ der zu $s$ entgegengesetzte Strahl ist. Demnach ist

$$\pi(f \cap H_1) = p(f \cap H_1) \cap H_2 = p(f) \cap H_2 = (f \cup s') \cap H_2 = f \cap H_2.$$

Lemma 3. *Sind $f_1$, $f_2$ zwei in einer Hyperebene $H_1$ enthaltene äquivalente OFen und ist $\pi$ eine Parallelprojektion von $H_1$ auf eine Hyperebene $H_2$, so sind die OFen $\pi(f_1)$ und $\pi(f_2)$ ebenfalls äquivalent.*

Der Beweis kann unter Benutzung der Invarianz der Zwischenrelation gegen Parallelprojektion leicht durch Induktion über die Dimension $n$ geführt werden.

Lemma 4. *Sind $f_1$, $f_2$ zwei n-dimensionale OFen mit gleichem Anfangspunkt $A$ und sind $H_1$, $H_2$ zwei $A$ enthaltende Hyperebenen, die die Randstrahlen von $f_1$, $f_2$ nicht trennen und nicht enthalten, so gilt:*
*Aus* $f_1 \cap H_1$ äq $f_2 \cap H_1$ *folgt* $f_1 \cap H_2$ äq $f_2 \cap H_2$.

Beweis. Es sei $\pi_i$ die Parallelprojektion von $H_1$ auf $H_2$ in Richtung der Trägergeraden des Randstrahles von $f_i$ $(i = 1, 2)$. Da die Randstrahlen von $f_1$ und $f_2$ bezüglich $H_1$ und $H_2$ im gleichen Sektor enthalten sind, sind die Richtungen von $\pi_1$ und $\pi_2$ sektorgleich. Nach Lemma 1 sind somit die in $H_2$ enthaltenen $(n - 1)$-dimensionalen OFen $\pi_1(f_1 \cap H_1)$ und $\pi_2(f_1 \cap H_1)$ äquivalent. Wird nun $f_1 \cap H_1$ äq $f_2 \cap H_1$ vorausgesetzt, so folgt durch Anwenden von $\pi_2$ nach Lemma 3 die Beziehung $\pi_2(f_1 \cap H_1)$ äq $\pi_2(f_2 \cap H_1)$. Auf Grund der für die Dimension $n - 1$ gültigen Transitivität der Äquivalenz folgt $\pi_1(f_1 \cap H_1)$ äq $\pi_2(f_2 \cap H_1)$. Nach Lemma 2 ergibt sich hieraus $f_1 \cap H_2$ äq $f_2 \cap H_2$.

Lemma 5. *Sind $f_1$, $f_2$ zwei zweidimensionale OFen mit gemeinsamer Trägerebene, gemeinsamem Anfangspunkt $A$ und nicht in derselben Geraden enthaltenen Randstrahlen und sind $G$ und $H$ zwei in der Trägerebene von $f_1$, $f_2$ enthaltene, $A$ enthaltende Geraden, die keinen der Randstrahlen von $f_1$ und $f_2$ enthalten und von denen die eine die Randstrahlen trennt, die andere nicht, so ist $f_1 \cap G = f_2 \cap G$ genau dann, wenn $f_1 \cap H$ entgegengesetzt zu $f_2 \cap H$ ist.*

Beweis. Es sei $s_0$ der Strahl mit dem Anfangspunkt $A$ auf der trennenden Geraden, der in $f_1$ enthalten ist, und $s_1$ der Strahl mit dem Anfangspunkt $A$ auf der nichttrennenden Geraden, der in $f_1$ enthalten ist. Somit gilt:

$$s_0 \text{ trennt } \mathrm{Rs}\, f_1, \mathrm{Rs}\, f_2, \tag{1}$$

$$s_1 \text{ trennt } \mathrm{Rs}\, f_1, \mathrm{Rs}\, f_2 \text{ nicht.} \tag{2}$$

Aus $s_0 \subset f_1$ und $s_1 \subset f_1$ folgt

$$\mathrm{Rs}\, f_1 \text{ trennt } s_0, s_1 \text{ nicht.} \tag{3}$$

Wegen (1), (2), (3) und Hilfssatz 3 sind die folgenden Aussagen gleichbedeutend: $s_0$ trennt $s_1$, Rs $f_2$; $s_0$ trennt $s_1$, Rs $f_1$ nicht; $s_1$ trennt $s_0$, Rs $f_1$; $s_1$ trennt $s_0$, Rs $f_2$. Aus der Gleichwertigkeit der ersten und letzten dieser vier Aussagen und Hilfssatz 3, angewendet auf die Strahlen $s_0$, $s_1$, Rs $f_2$, folgt, daß Rs $f_2$ die Strahlen $s_0$ und $s_1$ trennt. Das ergibt, daß von den Strahlen $s_0$, $s_1$ genau einer in $f_2$ enthalten ist. Aus dieser Aussage folgt aber leicht die Behauptung des Lemmas.

Lemma 6. *Zwei k-dimensionale OFen ($1 \leq k \leq n$), die im Anfangspunkt und ihren ein- bis $(k - 1)$-dimensionalen Halbräumen übereinstimmen, aber entgegengesetzte k-dimensionale Halbräume haben, sind nicht äquivalent.*

Der Beweis erfolgt leicht durch Induktion über $k$.

Lemma 7. *Es seien $f_1$, $f_2$ zwei n-dimensionale OFen mit gemeinsamem Anfangspunkt $A$ und nicht in derselben Geraden enthaltenen Randstrahlen, $G$ und $H$ Hyperebenen durch $A$, aber nicht durch* Rs $f_1$ *oder* Rs $f_2$, *so daß gilt, wenn $h_i^n$ den n-dimen-*

*sionalen Halbraum von $f_i$ $(i = 1, 2)$ bezeichnet:*

$$(f_1 - h_1^n) \cap G = (f_2 - h_2^n) \cap G \subset H. \tag{1}$$

*Genau eine der Hyperebenen $G$, $H$ trennt* $\mathrm{Rs}\, f_1$, $\mathrm{Rs}\, f_2$. (2)

*Dann gilt: Von den Relationen $f_1 \cap G$ äq $f_2 \cap G$ und $f_1 \cap H$ äq $f_2 \cap H$ ist genau eine erfüllt.*

Beweis. Aus (1) folgt $(f_1 - h_1^n) \cap H = (f_2 - h_2^n) \cap H \subset G$. Somit unterscheiden sich $f_1 \cap G$ und $f_2 \cap G$ höchstens in ihren $(n-1)$-dimensionalen Halbräumen, ebenso $f_1 \cap H$ und $f_2 \cap H$. Der Teilraum $T := \mathcal{H}(\mathrm{Rs}\, f_1 \cup \mathrm{Rs}\, f_2)$ ist zweidimensional. Auf die Geraden $T \cap G$, $T \cap H$ und die zweidimensionalen OFen $T \cap f_1$, $T \cap f_2$ treffen die Voraussetzungen von Lemma 5 zu. Folglich besteht von den beiden Paaren von Halbräumen, die zu den OF-paaren $f_1 \cap G$, $f_2 \cap G$ und $f_1 \cap H$, $f_2 \cap H$ gehören, genau eines aus entgegengesetzten Halbräumen, das andere aus zwei gleichen. Nach Lemma 6 ergibt sich hieraus die Behauptung.

Lemma 8. *Sind $f_1$, $f_2$ zwei $n$-dimensionale OFen mit gleichem Anfangspunkt $A$ und nicht in derselben Geraden enthaltenen Randstrahlen, sind $G$ und $H$ zwei Hyperebenen durch $A$, von denen eine* $\mathrm{Rs}\, f_1$ *und* $\mathrm{Rs}\, f_2$ *trennt, die andere nicht, so gilt $f_1 \cap G$ äq $f_2 \cap G$ genau dann, wenn $f_1 \cap H$ äq $f_2 \cap H$ nicht gilt.*

Beweis. Es sei $G \cap H = U$ und $f_3$ eine beliebige in $U$ enthaltene $(n-2)$-dimensionale OF mit dem Anfangspunkt $A$, und $h_4$ sei derjenige der beiden von $U$ in $G$ erzeugten $(n-1)$-dimensionalen Halbräume, für den $f_4 := f_3 \cup h_4$ zu $f_1 \cap U$ äquivalent wird. Durch $f_4$ und $\mathrm{Rs}\, f_1$ ist nach Folgerung (5) eine $n$-dimensionale OF $f_1'$ bestimmt. Ferner sei $h_5$ derjenige der beiden von $U$ in $G$ erzeugten $(n-1)$-dimensionalen Halbräume, für den $f_5 := f_3 \cup h_5$ zu $f_2 \cap U$ äquivalent wird. Durch $f_5$ und $\mathrm{Rs}\, f_2$ ist nach Folgerung (5) eine $n$-dimensionale OF $f_2'$ bestimmt. Auf $f_1'$ und $f_2'$ treffen die Voraussetzungen von Lemma 7 zu, so daß unter Verwendung der Transitivität der Relation äq für $(n-1)$-dimensionale OFen auf die Behauptung von Lemma 8 geschlossen werden kann.

Nun seien $f_1, f_2, f_3$ drei $n$-dimensionale OFen mit $f_1$ äq $f_2$ und $f_2$ äq $f_3$, der gemeinsame Anfangspunkt sei $A$, und es sei $s_i := \mathrm{Rs}\, f_i$ für $i = 1, 2, 3$ sowie $S := \mathcal{H}(s_1 \cup s_2 \cup s_3)$. Es soll gezeigt werden, daß $f_1$ äq $f_3$ ist. Es gibt drei Fälle: Die Dimension von $S$ ist a) 3, b) 2, c) 1.

Zu a): Es gibt eine Hyperebene $H$ durch $A$, bezüglich derer die drei Randstrahlen im gleichen Halbraum liegen (man betrachte den zweidimensionalen Verbindungsraum dreier Punkte $\neq A$ auf den Randstrahlen, verschiebe ihn nach $A$ und nehme eine Hyperebene, deren Durchschnitt mit $S$ der verschobene Teilraum ist). Auf Grund der Voraussetzung $f_1$ äq $f_2$ folgt mit Hilfe von Lemma 4 die Äquivalenz von $f_1 \cap H$ und $f_2 \cap H$, ebenso folgt aus $f_2$ äq $f_3$ auch $f_2 \cap H$ äq $f_3 \cap H$, also wegen der Induktionsannahme und Definition 2 auch $f_1$ äq $f_3$.

Zu b): Es sind einige Fälle zu unterscheiden.

b 1) Keine zwei der drei Randstrahlen $s_1$, $s_2$, $s_3$ sind entgegengesetzt oder gleich. Dann gibt es im Fall $n \geqq 3$ einen nicht in $S$ enthaltenen Strahl $s$ und eine OF $f_2'$ mit dem Randstrahl $s$, die mit $f_2$ äquivalent ist. Auf $f_1, f_2, f_2'$, auf $f_2', f_2, f_3$ sowie auf $f_1, f_2', f_3$ ist jeweils Fall a) anwendbar, und es ergibt sich $f_1$ äq $f_3$. Ist $n = 2$ und gibt es eine Gerade $G$ durch $A$, bezüglich derer $s_1$, $s_2$, $s_3$ auf derselben Seite liegen, so sind die Durchschnitte $f_i \cap G$ für $i = 1, 2, 3$ alle gleich, also $f_1$ äq $f_3$; wenn es keine solche Gerade gibt, gibt es doch eine Gerade $G_1$ durch $A$, die $s_1$ und $s_3$ nicht trennt, sie trennt dann notwendig $s_1$ und $s_2$ sowie auch $s_2$ und $s_3$, und nach Lemma 5 ist $f_1 \cap G_1$ entgegengesetzt zu $f_2 \cap G_1$, ebenso $f_2 \cap G_1$ entgegengesetzt zu $f_3 \cap G_1$, also $f_1 \cap G_1 = f_3 \cap G_1$, d. h. $f_1$ äq $f_3$.

b 2) Zwei der drei Randstrahlen $s_1$, $s_2$, $s_3$ sind gleich. Dann folgt mit Hilfe von Definition 2 und Lemma 4 die Äquivalenz von $f_1$ und $f_3$.

b 3) Es ist $s_1$ entgegengesetzt zu $s_3$. Dann folgt aus Definition 2, Bedingung (A 2), unmittelbar die Äquivalenz von $f_1$ und $f_3$.

b 4) Es ist $s_1$ zu $s_2$ oder $s_2$ zu $s_3$ entgegengesetzt, o. B. d. A. $s_1$ zu $s_2$. Nach Definition 2 gibt es eine OF $f_4$, so daß auf $f_1$, $f_4$ und auf $f_4$, $f_2$ die Bedingung (A 1) aus Definition 2 zutrifft. Auf $f_4$, $f_2$, $f_3$ trifft einer der bereits betrachteten Fälle zu, so daß auch $f_4$ äq $f_3$ ist. Sind die Randstrahlen von $f_4$ und $f_3$ nicht entgegengesetzt, so trifft auf $f_1$, $f_4$, $f_3$ einer der Fälle a), b 1), b 2), b 3) zu, so daß $f_1$ äq $f_3$ wird. Sind dagegen die Randstrahlen von $f_3$ und $f_4$ entgegengesetzt, so betrachte man eine Hyperebene $H$ durch $A$, die $s_1$ und Rs $f_4$ nicht trennt (sie trennt dann auch $s_2$ und $s_3$ nicht) sowie eine Hyperebene $H_1$ durch $A$, die Rs $f_4$ und $s_2$ nicht trennt (sie trennt dann auch $s_1$ und $s_3$ nicht). Dann gelten nach Voraussetzung die drei Relationen

$$f_1 \cap H \text{ äq } f_4 \cap H, \quad f_2 \cap H \text{ äq } f_3 \cap H \quad \text{und} \quad f_2 \cap H_1 \text{ äq } f_4 \cap H_1 .$$

Aus den beiden ersten folgt mit Lemma 8: $f_1 \cap H_1$ nicht äq $f_4 \cap H_1$, $f_2 \cap H_1$ nicht äq $f_3 \cap H_1$, und hieraus ergibt sich zusammen mit der dritten $f_1 \cap H_1$ äq $f_3 \cap H_1$, also $f_1$ äq $f_3$.

Zu c): Es sind drei Fälle zu unterscheiden.

c 1) Sind die drei Randstrahlen gleich, so ergibt sich $f_1$ äq $f_3$ sofort aus der Betrachtung von $f_i \cap H$ mit einer $s_i$ nicht enthaltenden Hyperebene $H$ durch $A$ $(i = 1, 2, 3)$.

c 2) Sind nicht alle drei $s_i$ gleich, aber $s_1 = s_3$, so gibt es eine OF $f_4$, deren Randstrahl nicht in $S$ enthalten ist, so daß $f_1$ äq $f_4$ und $f_4$ äq $f_2$ gilt. Auf $f_4$, $f_2$, $f_3$ trifft Fall b 4) zu, so daß $f_4$ äq $f_3$ gilt, und auf $f_1$, $f_4$, $f_3$ trifft dann Fall b 2) zu, so daß $f_1$ äq $f_3$ folgt.

c 3) Ist $s_1 \neq s_3$ und (o. B. d. A.) $s_2 = s_1$, so gibt es eine OF $f_4$, deren Randstrahl nicht in $S$ enthalten ist, mit $f_2$ äq $f_4$ und $f_4$ äq $f_3$, wegen b 2) ergibt sich $f_1$ äq $f_4$, hieraus wegen b 3) $f_1$ äq $f_3$.

Damit ist „äq" als Äquivalenzrelation nachgewiesen. Durch Induktion ergibt sich leicht, daß die Anzahl der Äquivalenzklassen bei festgehaltener Dimension, festem Anfangspunkt und Trägerraum gleich 2 ist. Damit ist Satz 1 bewiesen.

Hilfssatz 5. *Sind $f_1$, $f_2$ OFen und ist $\tau$ eine Verschiebung, so folgt aus $f_1$ äq $f_2$ die Beziehung $\tau(f_1)$ äq $\tau(f_2)$.*

Der Beweis folgt aus Definition 2 und den Invarianzeigenschaften von Verschiebungen.

Der Begriff der Gleichorientierung von OFen wird nun unter Verwendung der Verschiebungsgruppe definiert.

Definition 3. Sind $f_1$, $f_2$ Orientierungsfiguren, so ist $f_1$ mit $f_2$ genau dann *gleichorientiert*, wenn es eine Verschiebung gibt, die $f_1$ auf eine zu $f_2$ im Sinne von Definition 2 äquivalente Orientierungsfigur abbildet.

Aus Satz 1, Hilfssatz 5, der Gruppeneigenschaft der Verschiebungen und der Tatsache, daß die identische Abbildung die einzige Verschiebung ist, die einen Punkt auf sich selbst abbildet, folgert man leicht den grundlegenden

Satz 2. *Die Gleichorientierung von Orientierungsfiguren ist eine Äquivalenzrelation, und es gibt in jedem Trägerraum zwei Äquivalenzklassen.*

Die beiden Äquivalenzklassen gleichorientierter $n$-dimensionaler Orientierungsfiguren sollen *Orientierungsklassen* des $n$-dimensionalen affinen Raumes genannt werden.

## 3. Orientierungsklassen von Punkt-$(n+1)$-Tupeln

In Verallgemeinerung der Bezeichnungsweise für Strahlen bezeichne $XY^-$ den Strahl mit dem Anfangspunkt $X$ auf der Verbindungsgeraden von $X$ und $Y$, der $Y$ nicht enthält; und ist $f$ eine $(k-1)$-dimensionale Orientierungsfigur, $X$ ein nicht in $\mathcal{H}(f)$ enthaltener Punkt, so sei $fX^+$ (bzw. $fX^-$) die $k$-dimensionale Orientierungsfigur $f \cup h^k$, wobei $h^k$ der $X$ enthaltende (bzw. nicht enthaltende) Halbraum in $\mathcal{H}(f \cup \{X\})$ bezüglich $\mathcal{H}(f)$ ist.

Definition 4. Unter der *Orientierungsklasse eines der Bedingung*

$$\dim \mathcal{H}(\{A_0, A_1, \ldots, A_n\}) = n$$

*genügenden Punkt-$(n+1)$-Tupels* $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ wird die Orientierungsklasse verstanden, der die Orientierungsfigur $A_0A_1^+ \ldots A_n^+$ angehört.

Satz 3. *Unterwirft man die Punkte des $(n+1)$-Tupels $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ einer ungeraden Permutation, so ändert sich seine Orientierungsklasse.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß sich die Orientierungsklasse bei Vertauschung „benachbarter" Punkte $A_i$ und $A_{i+1}$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ ändert. Es sei

$$f_1 := A_0 \ldots A_{i-1}^+ A_i^+ A_{i+1}^+ A_{i+2}^+ \ldots A_n^+ ,$$
$$f_2 := A_0 \ldots A_{i-1}^+ A_{i+1}^+ A_i^+ A_{i+2}^+ \ldots A_n^+ .$$

a) $i = 0$. Die Verschiebung $\tau$, die $A_1$ auf $A_0$ abbildet, führt infolge der Invarianzeigenschaften von Verschiebungen $f_2$ in $A_0A_1^- A_2^+ \ldots A_n^+$ $(= \tau(f_2))$ über. Ist $H$ eine $A_0A_1^+$ nicht enthaltende Hyperebene, so ist $f_1 \cap H = \tau(f_2) \cap H$. Mit Definition 2 (Aussage (A 2)) und Lemma 8 kann hieraus gefolgert werden, daß $f_1$ und $\tau(f_2)$ nicht äquivalent sind, also sind $f_1$ und $f_2$ nicht gleichorientiert.

b) $i = 1$. Es sei zunächst die Dimension $n$ gleich 2. $G$ sei eine $A_0A_1^+$ und $A_0A_2^+$ nicht trennende Gerade und $f_1 \cap G = s$. Dann gilt: $A_0A_1^+$ trennt $A_0A_2^+$ und $s$ nicht, und $s$ trennt $A_0A_1^+$ und $A_0A_2^+$ nicht. Nach Hilfssatz 3 trennt $A_0A_2^+$ die Strahlen $A_0A_1^+$ und $s$, also ist $f_2 \cap G$ der zu $s$ entgegengesetzte Strahl. Es sei nun $n > 2$. $H$ sei eine $A_0A_1^+$ und $A_0A_2^+$ nicht trennende Hyperebene. Die Betrachtung der Durchschnitte $f_i \cap \mathcal{H}(\{A_0, A_1, A_2\})$ $(i = 1, 2)$, $H \cap \mathcal{H}(\{A_0, A_1, A_2\})$ ergibt auf Grund des eben behandelten zweidimensionalen Falles, daß $f_1 \cap H$ und $f_2 \cap H$ entgegengesetzte Randstrahlen haben, in den zwei- und höherdimensionalen Halbräumen stimmen diese $(n-1)$-dimensionalen Orientierungsfiguren überein. Wie im Fall a) schließt man hieraus mit Definition 2 und Lemma 8, daß sie nicht äquivalent und somit $f_1$ und $f_2$ nicht gleichorientiert sind.

c) $i > 1$. Dieser Fall kann auf Fall b) zurückgeführt werden, denn bei dem auf Grund von Definition 2 vorzunehmenden Schnitt von $f_1$, $f_2$ mit einer die Randstrahlen von $f_1$ und $f_2$ nicht trennenden Hyperebene durch $A_0$ entstehen zwei Orientierungsfiguren, die in der Form $A_0X_1^+ \ldots X_{i-1}^+ X_i^+ \ldots X_{n-1}^+$ bzw. $A_0X_1^+ \ldots X_i^+ X_{i-1}^+ \ldots X_{n-1}^+$ dargestellt werden können, und bei Weiterführung dieses Vorgehens (Schnitt mit $(n-2)$-dimensionalem Teilraum usw.) stellt sich schließlich der Fall b) ein. Damit ist Satz 3 bewiesen.

## LITERATUR

[1] BÖRNER, W.: Orientierung in angeordneten Translationsebenen. Wiss. Z. Univ. Rostock, 23. Jg. 1974, Math.-Nat. Reihe, Heft 8.
[2] HERMES, H.: Einführung in die Verbandstheorie. Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1955.
[3] LENZ, H.: Grundlagen der Elementarmathematik. 3. Aufl., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1975.
[4] LINGENBERG, R.: Grundlagen der Geometrie I. Bibliographisches Institut, Mannheim 1969.

Manuskripteingang: 30. 9. 1974

## VERFASSER:

WALTER BÖRNER, Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena