für $|\nu| = e$, daher gibt es (vgl. 2.3.4.3.) eine Konstante $M = 1$, so daß für alle ν, $|\nu| = e$, eine Lösung $(A_\nu, c_{i\nu}, k_{i\nu})$ von $(**)$ existiert, und

$$\|A_\nu\|, \|c_{i\nu}\|, \|k_{i\nu}\| = M \cdot \|\gamma_\nu^e - \gamma_\nu^e\|,$$

und für geeignetes θ heißt dies

$$\|A_\nu u^\nu\|, \|c_{i\nu} u^\nu\|, \|k_{i\nu} u^\nu\| \leqq K,$$

q. e. d.

2.4. Algebraisierung formaler Deformationen

In 2. 1. haben wir uns mit dem Problem der Existenz formaler semiuniverseller Deformationen befaßt. Im algebraischen Fall werden wir uns wiederum eine solche Deformation vorgeben, die wir dann auf geeignete Weise approximieren. Mit den Bezeichnungen aus 2.1. sei wieder $(\bar{B}, (\eta_\nu))$ eine formale semiuniverselle Deformation, $\eta_\nu \in D(\bar{B}(\mathfrak{m}^{\nu+1}))$, wobei nach Konstruktion $\bar{B} = \Lambda[[X_1, \ldots, X_n]]/(f_1, \ldots, f_m)$ ist.

Problem (A): Existiert ein $B = \Lambda\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ mit $B^\wedge = \bar{B}$ sowie $D(B)$, das alle η_ν induziert?

Problem (B): Ist ein beliebiges Paar (B, η) mit Eigenschaft (A) schon semiuniversell (in der Kategorie der lokalen Henselschen Λ-Algebren)?

Der erste Satz wird nun zeigen, daß sich die Frage (B) positiv beantworten läßt, wenn der Funktor D noch gewisse zusätzliche Eigenschaften hat.

2.4.1. Definition. Es sei F: (A-Algebren) $\to$ Ens ein Funktor. F heißt *lokal von endlicher Darstellung*, wenn er mit gefilterten induktiven Limites vertauschbar ist. Es gilt der folgende

2.4.2. Satz. *Es sei A eine lokale, als Henselscher Ring endlich erzeugte, Λ-Algebra und Λ ein lokaler Henselscher Ring, der durch eine Algebra von endlichem Typ über einem Körper oder einem exzellenten diskreten Bewertungsring erzeugt wird. Dann gilt: Ist F: (A-Algebren) $\to$ Ens ein Funktor und $\bar{\eta} \in F(A^\wedge)$, so gibt es ein $\eta \in F(A)$ mit $\bar{\eta} \equiv \bar{\eta} \bmod \mathfrak{m}_A^c$ zu gegebenem $c \in N$.*

Dieser Approximationssatz liefert nun

2.4.3. Satz. *Es sei Λ wie in Satz 2.4.2. D sei lokal von endlicher Darstellung. Dann gilt: Ist B eine lokale Henselsche Λ-Algebra von endlichem Typ und induziert (B, η) eine formale semiuniverselle Deformation, so ist (B, η) semiuniversell.*
An D stellen wir jedoch dabei die zusätzliche Forderung, daß

$$D(A) \to \text{lim-proj } D(A/\mathfrak{m}_A^n)$$

injektiv ist für jede komplette lokale Λ-Algebra A.

Beweis. Es ist (UD 1) nachzuweisen für beliebige lokale Henselsche Λ-Algebren A. Da D und $\mathrm{Hom}_\Lambda(B, \square)$ mit gefilterten induktiven Limites vertauschbar sind, kann man sich auf den Fall beschränken, daß A als Henselsche Λ-Algebra endlich erzeugt ist. Es ist nun zu zeigen: Jedes Diagramm

$$\begin{tikzcd}
(B,\eta) \arrow[r, dashed, "u"] \arrow[dr, "u"'] & (A,\xi) \arrow[d] \\
& (A/I,\bar{\xi})
\end{tikzcd}$$

läßt sich ergänzen. Es sei nun für A-Algebren C stets

$$(A, \zeta) \to (C, \zeta_C).$$

Dann definiert, falls $\hat{u}: B \to A^\wedge$ eine formale Ergänzung des obigen Diagramms ist, die Zuordnung

$$F(C) = \{\nu \in \operatorname{Hom}_A(B, C), D(\nu)\,\eta = \zeta_C, \nu \equiv \hat{u} \bmod IC\}$$

einen Funktor, der lokal von endlicher Darstellung ist, und nach dem vorigen Satz läßt sich nun $\hat{u} \in F(\bar{A})$ durch ein $u \in F(A)$ approximieren, q. e. d.

2.4.4. Satz (M. Artin). *Es sei Λ ein Henselscher Noetherscher lokaler Ring mit Restklassenkörper k und Maximalideal $\mathfrak{m}$. $\bar{B}$ sei eine komplette Noethersche Λ-Algebra, $\bar{\eta} \in D(\bar{B})$, so daß $(\bar{B}, (\bar{\eta}_n))$ eine formale semiuniverselle Deformation für D ist ($\bar{\eta}_n =$ Bild von $\bar{\eta}$ in $D(B(\mathfrak{m}_B^{n+1}))$). D sei lokal von endlicher Darstellung. Dann gibt es eine lokale Henselsche Λ-Algebra B, einen Isomorphismus $B^\wedge \simeq \bar{B}$ und ein $\eta \in D(B)$, so daß $\bar{\eta}_n$ durch η induziert wird.*

Beweis. Wenn $\bar{B}$ Komplettierung einer Henselschen Λ-Algebra von endlichem Typ ist, kann man nach der Approximationseigenschaft $\bar{\eta}$ durch ein $\eta \in D(B) \bmod \mathfrak{m}_B^2$ approximieren und ist fertig. Dies ist jedoch allgemein nicht klar. Daher verläuft Artins Beweis folgendermaßen:
$\bar{B}$ wird als endliche Algebra über der Komplettierung einer Henselschen Λ-Algebra A (von endlichem Typ) dargestellt, und gleichzeitig wird $(\bar{B}, \bar{\eta})$ durch ein Paar (B, η) in geeigneter Weise approximiert. Man kann sich von vornherein auf den Fall beschränken, daß Λ ein Körper oder diskreter Bewertungsring ist. Ist dies nämlich noch nicht der Fall, so ist Λ von endlichem Typ über einem Körper oder diskreten Bewertungsring Λ_0 (im Henselschen Sinne). Für $\mu \in \operatorname{Hom}_{\Lambda_0}(\Lambda, A)$ bezeichne μA den Ring A mit der durch μ induzierten Λ-Algebrastruktur.
Ist

$$D_0(A) = \{(\mu, \zeta), \mu \in \operatorname{Hom}_{\Lambda_0}(\Lambda, A), \zeta \in D(\mu A)\},$$

dann ist D_0 ein Funktor auf der Kategorie der lokalen Henselschen Λ_0-Algebren; D_0 ist ebenfalls lokal von endlicher Darstellung, und ist $v: \Lambda \to \bar{B}$ die gegebene Λ-Algebrastruktur auf $\bar{B}$, so ist $(v, \bar{\eta}) \in D_0(\bar{B})$ ebenfalls formal semiuniversell.
Eine Algebraisierung von $(v, \bar{\eta})$ liefert dann auch eine Algebraisierung vom $\bar{\eta}$.

Im folgenden sei also Λ ein Körper oder ein Henselscher diskreter Bewertungsring, dann enthält $\bar{B}$ einen Unterring

$$A^\wedge = \Lambda^\wedge[[x_1, \ldots, x_n]] \simeq \Lambda^\wedge[[X_1, \ldots, X_n]],$$

so daß $\bar{B}$ endlich über $A^\wedge$ ist. Der Unterring $A^\wedge$ ist natürlich algebraisierbar ($A^\wedge =$ Komplettierung von $A = \Lambda\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$). Es zeigt sich, daß bei geeigneter Wahl von A dann auch $(\bar{B}, \bar{\eta})$ algebraisiert werden kann.
Wenn man jeder A-Algebra A' die Menge aller Paare (B', η'), B' eine endliche A'-Algebra, $\eta' \in D(B')$, zuordnet, so ist dieser Funktor von endlicher Darstellung, und $(\bar{B}, \bar{\eta})$ läßt sich folglich beliebig genau durch ein (B', η'), B' eine endliche A-Algebra, $\eta' \in D(B')$, approximieren. Die formale Semiuniversalität von $(\bar{B}, \bar{\eta})$ impliziert dann einen Λ-Homomorphismus $\bar{B} \to B'^\wedge$; dieser ist natürlich surjektiv, sofern man $\bar{B}$ bis mindestens zur Ordnung 2 approximiert.

Um zu erreichen, daß er auch injektiv ist, benötigt man allerdings noch mehr Information über B'.
Es sei A' eine A-Algebra, M' ein A'-Modul und $L_0, \ldots, L_n$ endliche Λ-Moduln. Dann definieren wir nach M. ARTIN: Eine $(x_1, \ldots, x_n)$-Vorbereitung vom Typ $(L_0, \ldots, L_n)$ von M' ist eine Folge von A'-Homomorphismen

$$L_\nu \otimes_\Lambda A'_\nu \underset{V_\nu}{\overset{U_\nu}{\rightleftarrows}} M' \otimes_{A'} A'_\nu =: M'_\nu$$

mit $U_\nu \circ V_\nu = X_{\nu+1} \circ \mathrm{id}_{M_\nu}$, $V_\nu \circ U_\nu = X_{\nu+1} \circ \mathrm{id}_{L_\nu \otimes_\Lambda A'_\nu}$ für $\nu \leqq n$ (wobei wir $x_{n+1} = 1$ setzen).
Hierbei bezeichne A'_ν den Restklassenring $A'/(x_1A' + \cdots + x_\nu A')$, $(A'_0 := A')$.

Hilfssatz. *Bei geeigneter Wahl von $x_1, \ldots, x_n \in \bar{B}$ gibt es Λ-Moduln L_ν, so daß $\bar{B}$ als A-Modul eine $(x_1, \ldots, x_n)$-Vorbereitung vom Typ $(L_0, \ldots, L_n)$ besitzt ($A^\wedge = \Lambda^\wedge[[x_1, \ldots, x_n]]$).*

Beweis. Da $A^\wedge_n = \Lambda^\wedge$ ist, ist $\bar{B} \otimes_{A^\wedge} A^\wedge_n$ endlicher $\Lambda^\wedge$-Modul, also stets vom Typ $L_n \otimes_\Lambda \Lambda^\wedge$. (Jeder endliche Λ-Modul ist direkte Summe von $\Lambda^\wedge$-Moduln vom Typ $\Lambda^\wedge/p^e\Lambda^\wedge = \Lambda/p^e\Lambda$ und von freien Bestandteilen, p bezeichnet dabei ein Primelement, falls Λ diskreter Bewertungsring ist.)
Angenommen, $x_1, \ldots, x_n$ sind so, daß für $v < s$ bereits Λ-Moduln L_ν mit Homomorphismen $L_\nu \otimes A^\wedge_\nu \rightleftarrows \bar{B}_\nu$ mit den geforderten Eigenschaften existieren.
$\bar{B}_s$ ist ein endlicher $A^\wedge_s = \Lambda^\wedge[[x_{s+1}, \ldots, x_n]]$-Modul; da die Lokalisierung von $A^\wedge_s$ in $pA^\wedge_s$ ein diskreter Bewertungsring mit p als Primelement oder ein Körper ist, ist sofort klar, daß es eine Zariskiumgebung $B(x)$ von $pA^\wedge_s$ gibt $(x \in A^\wedge_s)$, über der $\bar{B}_s$ vom Typ $L_s \otimes_\Lambda A^\wedge_s$ ist mit einem geeigneten Λ-Modul L_s. Da $\dim (A^\wedge_s/xA^\wedge_s) < \dim (A^\wedge_s)$ und x zu p prim ist, kann man $(x_1, \ldots, x_n)$ durch eine Folge $(x'_1, \ldots, x'_n)$ mit $x'_\nu = x_\nu$, $v \leqq s$, $x'_{s+1} =$ geeignete Potenz von x, $x'_\nu \in A^\wedge$, ersetzen, so daß $A^\wedge$ endlich über dem Unterring $\Lambda^\wedge[[x'_1, \ldots, x'_n]]$ ist.
Für Moduln über regulären lokalen Ringen gilt aber stets $\operatorname{cod} h + dh = \dim$, also ist $A^\wedge$ freier $\Lambda^\wedge[[x'_1, \ldots, x'_n]]$-Modul. Also erfüllt $(x'_1, \ldots, x'_n)$ die geforderten Bedingungen für $v \leqq s$ (indem man die L_ν, $\nu \leqq s$, geeignet abändert). Durch Induktion folgt daraus der Hilfssatz.

Die weitere Beweisidee von Satz 2.4.4. ist nun, $x_1, \ldots, x_n$ und $(L_0, \ldots, L_n)$ zu fixieren, so daß $\bar{B}$ eine $(x_1, \ldots, x_n)$-Vorbereitung vom Typ $(L_0, \ldots, L_n)$ besitzt, und diese mit zu approximieren. Dazu ist zu zeigen:

Hilfssatz. *Für A-Algebren A' sei*

$$P(A') = \left\{ (B', \eta', [U_\nu, V_\nu]) \;\middle|\; \begin{array}{l} B' \textit{ endliche } A'\textit{-Algebra, } \eta' \in D(B'), \\ [U_\nu, V_\nu] \ (x_1, \ldots, x_n)\textit{-Vorbereitung} \\ \textit{von } B' \textit{ über } A' \textit{ vom Typ } (L_0, \ldots, L_n). \end{array} \right\}$$

Dann ist $A' \to P(A')$ ein Funktor lokal von endlicher Darstellung (auf der Kategorie der lokalen Henselschen, Noetherschen Λ-Algebren).

Beweis. Die Vorgabe von (B', η') ist durch endlich viele Daten bestimmt, die der $[U_\nu, V_\nu]$ mit den geforderten Eigenschaften ebenfalls wie folgt:
Ist $B' = B'_0 \otimes_{A'_0} A'$ (A'_0 eine A-Algebra, so daß B' über A'_0 definiert ist), so daß $A' = \varinjlim (A'_\alpha)$ ist, A'_α A'_0-Algebren, so sind $[U_\nu, V_\nu]$ durch ihre Wirkung auf L_ν bzw. B'_0 bestimmt, q. e. d.

Wir können also $(\bar{B}, \bar{\eta})$ mit der fixierten $(x_1, \ldots, x_n)$-Vorbereitung $[\bar{U}_\nu, \bar{V}_\nu]$ modulo $\mathfrak{m}_{A^\wedge}^c$ approximieren durch eine endliche A-Algebra B, ein $\eta \in D(B)$ und eine Vorbereitung $[U, V]$. Das heißt, wenn man alles mit $A/\mathfrak{m}_A^{c+1}$ tensoriert, sind $(\bar{B}, \bar{\eta}, [\bar{U}_\nu, \bar{V}_\nu])$ und $(B, \eta, [U_\nu, V_\nu])$ isomorph. Wie bereits bemerkt, induziert die Semiuniversalität von $\bar{\eta}$ sukzessive Λ-Homomorphismen $\bar{B} \to B/\mathfrak{m}_A^{m+1}B$, $m = c, c+1, \ldots$, also einen Λ-Homomorphismus $\varphi: \bar{B} \to B^\wedge$, der im Fall $c \geqq 1$ auf alle Fälle surjektiv ist, und so daß $\bar{\eta}$ bei $\bar{B} \to B/\mathfrak{m}_A^{m+1}B$ in η_m (= Bild von η) übergeht. Es ist also zu zeigen, daß φ auch injektiv ist, sofern c hinreichend groß ist.

Es ist $\varphi(x_\nu) = x_\nu + y_\nu$, $y_\nu \in \mathfrak{m}_A^{c+1}\bar{B}^\wedge$, also wird $\mathfrak{m}_A B^\wedge$ auch durch $p, x_1, \ldots, x_s$, $\varphi(x_{s+1}), \ldots, \varphi(x_n)$ erzeugt $(0 \leqq s \leqq n)$, und daher gilt

$$\mathfrak{m}_A^m B_s^\wedge = \left(\sum_{\nu=s+1}^{n} \varphi(x_\nu)\, B_s^\wedge + pB_s^\wedge\right)^m. \tag{1}$$

Die entscheidende Bemerkung ist nun die, daß die Multiplizität der einzelnen $B_s^\wedge$ bezüglich $\mathfrak{m}_A A_s^\wedge$ durch die Vorbereitung eindeutig bestimmt ist, sie ist nämlich gleich der Anzahl der freien Summanden von L_s (da $L_\nu \otimes_\Lambda A_s^\wedge \to B_s^\wedge$ injektiv ist und der Kokern durch x_{s+1} annuliert wird, also kleinere Dimension hat).

(Ist $d = \dim A_s$, dann ist die Multiplizität eine additive Funktion auf der Kategorie der A_s-Moduln, die auf der Unterkategorie der Moduln der Dimension $< d$ verschwindet.)

Wegen (1) hat also $B_s^\wedge$ bezüglich des Ideals $\sum_{\nu=s+1}^{n} \varphi(x_\nu)\, B_s^\wedge + pB_s^\wedge$ dieselbe Multiplizität wie $\bar{B}_s$ bezüglich des Ideals $\sum_{\nu=s+1}^{n} x_\nu \bar{B}_s + p\bar{B}_s$; daher haben alle Elemente des Kerns von $\bar{B}_s \to B_s^\wedge$ eine kleinere Dimension als $\dim \bar{B}_s$.

Wir betrachten zunächst den Fall, daß Λ ein Körper ist. Wegen $x_{s+1}\bar{B}_s \subseteqq L_s \otimes_\Lambda A_s^\wedge$, und da $L_s \otimes_\Lambda A_s^\wedge$ frei ist, also alle von 0 verschiedenen Elemente dieselbe Dimension haben, gilt dann

(2) $\qquad x_{s+1}\bar{B}_s \cap K_s = 0.$

Offenbar ist $K_n = 0$, da $\bar{B}_n \to B_n^\wedge$ surjektiv und beide Seiten Algebren vom gleichen Rang über Λ sind.

Aus (2) folgt daher durch Induktion nach $n - s$, daß $K_s = 0$ für alle s, also insbesondere $K_0 = \operatorname{Kern} \varphi = 0$ ist.

Im Fall eines diskreten Bewertungsrings Λ ist der Beweis im Prinzip derselbe, man betrachte hier jedoch auch noch die Multiplizitäten von $\bar{B}_s/p^m\bar{B}_s$ und $B_s^\wedge/p^m B_s^\wedge$, die wieder durch die Vorbereitung eindeutig bestimmt sind und übereinstimmen; bezeichnet man diese Multiplizitäten als Funktion von m mit $e(m)$, so ist $e(m)$ stückweise linear, und der Anstieg an der Stelle m ist gleich der Anzahl der Summanden von L_s, deren Länge $\geqq m$ ist.

Da wieder alle von 0 verschiedenen Elemente von $L_s \otimes_\Lambda A\, /p^m A_s^\wedge$ $(m \geqq 1)$ dieselbe Dimension haben, folgt wie oben $\bar{B}_n/p^m\bar{B}_n \simeq B_n^\wedge/p^m B_n^\wedge$ für alle m, also $K_n = 0$ und ebenso Gleichung (2), also $K_s = 0$ für alle s, q. e. d.