Wir wenden Satz 3.2.12. auf $\Lambda = \Lambda_r \cup \{t^\mu + \alpha\}$ an und erhalten ein neues System von Weierstraßpolynomen

$$\omega_j^{(r+1)} = t^{\nu_j^*} + \operatorname{red} \alpha_j^r, \qquad i = 1, \ldots, r,$$
$$\omega_{r+1}^{(r+1)} = t^\mu + \operatorname{red} \alpha,$$

und nach diesem Satz ist auch

$$\alpha_j^{(r+1)} = \operatorname{red} \alpha_j^{(r)} > \nu_{j'}^*, \qquad \alpha_{r+1}^{(r+1)} + \operatorname{red} \alpha > \mu =: \nu_{r+1}^*;$$

damit ist (i) klar, (iii) bis (v) waren schon erledigt, und es bleibt (ii) zu zeigen:
Es sei $g \in J$ reduziert bezüglich $\mathfrak{Z}_{r+1}$. Dann tritt kein Term $b_\mu t^\mu$ in g auf. Für die übrigen Multiindizes stimmen $\mathfrak{Z}_{r+1}$, $\mathfrak{Z}_r$ überein, d. h., es ist g auch reduziert bezüglich $\mathfrak{Z}_r$ d. h. $g \underset{+}{>} \mu$ (μ war minimal!).

Damit ist die Existenzaussage 2.3.2.15. bewiesen.
Die Eindeutigkeit von Λ ist klar, denn durch $\mathfrak{Z}$ sind die endlichen ν' eindeutig bestimmt, ebenso die reduzierten nach Satz 2.3.2.12.

Man erhält sofort

2.3.2.16. Folgerung. Wir haben eine kanonische bijektive Abbildung von H_e/J auf die Menge der bezüglich $\mathfrak{Z}$ reduzierten Potenzreihen.

2.3.2.17. Bemerkung. Die Konstruktion aus 2.3.2.15. liefert eine eindeutige Abbildung der Ideale J in die reduzierenden Systeme $\mathfrak{Z}$. Offenbar ist $\mathfrak{Z}$ eine biholomorphe Invariante von J.

2.3.3. Anwendung des Vorbereitungssatzes auf Erweiterungsketten

2.3.3.1. Satz. *Es sei J_{e+1} Erweiterung von J_e, $J_e \subseteqq H_e$, $J_{e+1} \subseteqq H_{e+1}$ und $\mathfrak{Z}_e$, $\mathfrak{Z}_{e+1}$ die (nach Konstruktion aus Satz 3.2.15.) zugehörigen reduzierenden Systeme. Es seien Z_e, $Z_{e+1} \subseteqq \mathrm{GL}(m, \mathbf{C})$ die entsprechenden offenen Teilmengen, für die nach einer Transformation aus $Z_e \cap Z_{e+1} \neq \emptyset$ eindeutig bestimmte Systeme*

$$\Lambda_e = \{\omega_1^e, \ldots, \omega_k^e\}, \qquad \Lambda_{e+1} = \{\omega_1^{e+1}, \ldots, \omega_l^{e+1}\}$$

gegeben sind. Dann gilt:

$$\mathfrak{Z}_e \leqq \mathfrak{Z}_{e+1}, \quad k \leqq l, \quad \omega_i^{e+1} \mid H_e = \omega_i^e \quad \textit{für } i = 1, \ldots, k$$

und

$$\omega_i^{e+1} \mid H_e = 0 \quad \textit{für } i = k+1, \ldots, l.$$

Beweis. Aus Konstruktion 3.2.15. folgt $\mathfrak{Z}_e \leqq \mathfrak{Z}_{e+1}$ (das Verfahren könnte evtl. später abbrechen), der Rest ist klar nach der Eindeutigkeitsaussage des Satzes.

2.3.3.2. Satz. *Es sei $J_e \subseteqq H_e$ ein Ideal, $\mathfrak{Z}$ das entsprechende reduzierende System, und es gebe eine Erweiterung J_{e+1} von J_e, der dasselbe $\mathfrak{Z}$ entspricht. Zu J_e gehöre $\Lambda = \{\omega_1^e, \ldots, \omega_k^e\}$, und es sei $\tilde{\omega}_1^{e+1}, \ldots, \tilde{\omega}_k^{e+1} \in H_e$ irgendeine Erweiterung zu einem System von Weierstraßpolynomen von $\mathfrak{Z}$ in H_{e+1}, so daß*

$$\tilde{J}_{e+1} := (\tilde{\omega}_1^{e+1}, \ldots, \tilde{\omega}_k^{e+1})\, H_e$$

minimale Erweiterung von J_e ist. Dann ist $\tilde{\omega}_1^{e+1}, \ldots, \tilde{\omega}_k^{e+1}$ ein System von Weierstraßpolynomen zu $\tilde{J}_{e+1}$.
Beweis. Es genügt zu zeigen, daß $\mathfrak{Z}$ zu $\tilde{J}_{e+1}$ gehört. Wir wissen (2.3.3.1.), daß $\mathfrak{Z}' \geqq \mathfrak{Z}$ ist, wenn $\mathfrak{Z}'$ zu $\tilde{J}_{e+1}$ gehört. Ist $\mathfrak{Z}' \underset{+}{>} \mathfrak{Z}$, so ist

$$\dim_{\mathbf{C}} H_{e+1}/J_{e+1} > \dim_{\mathbf{C}} H_{e+1}/\tilde{J}_{e+1}.$$

Dies führen wir zum Widerspruch.

Ist $\hat{J}_{e+1} \subseteqq J_{e+1}$ (J_{e+1} zu $\mathfrak{S}$ gehörig nach Voraussetzung) minimale Erweiterung von J_e, so ist

$$\dim_{\mathbf{C}} H_{e+1}/J_{e+1} \leqq \dim_{\mathbf{C}} H_{e+1}/\hat{J}_{e+1} = \dim_{\mathbf{C}} H_{e+1}/J_{e+1},$$

Widerspruch!

2.3.3.3. **Satz.** *Es sei $e_0 < e$, $J_{e_0} \subseteqq H_{e_0}$, $J_e \subseteqq H_e$ und J_e minimale Erweiterung von J_{e_0}. Zu J_{e_0}, J_e gehöre dasselbe $\mathfrak{S}$, und es seien $\Lambda_{e_0} = \omega_i^{e_0}$, $i = 1, \ldots, k$, $\Lambda_e = \{\omega_i^e\}$ die zugehörigen Systeme von Weierstraßpolynomen. Wir wählen $1 \leqq p_1 < \cdots < p_r \leqq k$, so daß*

$$\omega_{p_1}^{e_0}, \ldots, \omega_{p_r}^{e_0} \in J_{e_0}$$

ein minimales Erzeugendensystem bilden, und setzen

$$\omega_i^e = t^{\nu^*} + \sum_{\mu} a_{i\mu} t^{\mu}, \qquad \sum \text{ reduziert.}$$

Dann existieren γ_i^j, $a_{i\mu}^0 \in \mathbf{C}$, so daß für $|\mu| = e - 1$

$$a_{i\mu} = \sum_{j=1}^{r} \gamma_i^j a_{p_j\mu} + a_{i\mu}^0$$

gilt mit

$$\gamma_i^j \text{ unabhängig von } \mu,\ e,\ a_{p_j\mu},\ J_e$$

und

$$a_{i\mu}^0 \text{ unabhängig von } a_{p_j\mu}.$$

Beweis. Es ist

$$\omega_i^{e_0} = \sum_{j=1}^{r} c_{ij} \omega_{p_j}^{e_0}, \qquad c_{ij} \in H_{e_0 - O_j}, \qquad O_j = |\hat{O}(\omega_{p_j}^{e_0})|,$$

$c_{p_ij} = \delta_{ij}$; wir setzen (c_{ij} betrachtet als $\in H$)

$$h_i := \sum_{j=1}^{r} c_{ij} \omega_{p_j}^e = t^{\nu^*} + \beta_i$$

mit $\omega_i^{e_0} = t^{\nu^*} + \alpha_i^{e_0}$; wegen der Eindeutigkeit folgt

$$\operatorname{red} \beta_i = \sum a_{i\mu} t^{\mu} =: \alpha_i$$

($\omega_i^{e_0}$ ist Einschränkung von ω_i^e; ν entspricht ν_i); zur Untersuchung der Unabhängigkeit betrachten wir eine zweite minimale Erweiterung $\tilde{J}_e$ von J_{e_0} und o. B. d. A. $\tilde{J}_e/H_{e-1} = J_e/H_{e-1}$

$$\tilde{h}_i = \sum_{j=1}^{r} c_{ij} \omega_{p_j}^e,$$

$$\tilde{h}_i - h_i = \sum_{j=1}^{r} c_{ij}(\tilde{\omega}_{p_j}^e - \omega_{p_j}^e) = \tilde{\beta}_i - \beta_i = \sum_{j=1}^{r} c_{ij}(0) \sum_{|\mu| = e-1} (\tilde{a}_{p_j\mu} - a_{p_j\mu}) t^{\mu}$$

(da $\alpha_i = \tilde{\alpha}_i$ auf H_{e-1} ist), folglich ist $\tilde{h}_i - h_i$ reduziert, $\tilde{h}_i - h_i = \operatorname{red} \tilde{\beta}_i - \operatorname{red} \beta_i$. Wir setzen

$$\gamma_i^j = c_{ij}(0), \qquad a_{i\mu}^0 = a_{i\mu} - \sum_{j=1}^{r} \gamma_i^j a_{p_j\mu};$$