Beweis. Gilt dies nicht, so existieren beliebig große e, daß J_{e+1} nicht minimal über J_e ist; e_i sei die entsprechende Teilfolge der Indizes. Wir wählen Erweiterungen $J'_{e_i+1} \subsetneqq J_{e_{i+1}}$ von J_{e_i}; ist

$$J_e^{(i)} = \{h \in J_e, h \mid p \cdot H_{e_{j+1}} \in J'_{e_{j+1}} \quad \text{für} \quad j \geqq i, e_j + 1 \leqq e\},$$

so ist $\{J_e^{(i)}\}_e$ eine Kette von Erweiterungen und $\hat{J}^{(i)} = \varprojlim J_e^{(i)} \subseteqq (p \cdot H)^\wedge$, wobei $\hat{J}^{(i)} \subsetneqq J^{(i+1)}$ ist, denn wir können $h_e \in J_e^{(i+1)}$ wählen mit $h_e \notin J_e^{(i)}$, falls e groß ist. Daher ist

$$\hat{J}^{(i)} \subsetneqq \hat{J}^{(i+1)} \subsetneqq \hat{J}^{(i+2)} \subsetneqq \cdots,$$

was unmöglich ist, denn $p\hat{H}$ ist Noethersch.

2.3.2. Der Weierstraßsche Vorbereitungssatz für ein Ideal

Es sei wieder $H_e = H/\mathfrak{m}^e$, $H_\infty := H$, $e = 1, 2, \ldots, \infty$. Ist $\varrho \in R_+^m$ fest vorgegeben, $f \in H_e$, $f = \sum_{|\nu|=0}^{e-1} a_\nu t^\nu$, so setzen wir

$$\|f\| = \sup_\nu 2\delta(|\nu| + 1)^{m+2} |a_\nu| \varrho^\nu$$

$$\text{mit} \quad \delta = 2^{m+2} \sum_{\nu=0}^{\infty} (r + 1)^{-2}.$$

Motiv. Für die induktive Konstruktion konvergenter Potenzreihen f möchte man ein handliches Kriterium haben, wie man aus den ersten Koeffizienten a die folgenden wählen muß, um Konvergenz zu erreichen. Es gilt nämlich

2.3.2.1. **Bemerkung.** Ist $f \in \hat{H}$, so werde $\|f\|$ wie oben definiert. Dann ist $f \in H \Leftrightarrow \|f\|_\varrho < \infty$ für ein ϱ.

2.3.2.2. **Definition.** $\mathscr{B} = \mathscr{B}^e(\varrho) = \{f \in H_e, \|f\|_\varrho < \infty\}$.

Nun folgt leicht

2.3.2.3. **Satz.** *$\mathscr{B}^e(\varrho)$ ist eine Banachalgebra.*

Beweis. Man sieht leicht, daß $\| \ \|_\varrho$ eine vollständige Norm auf $\mathscr{B}^e$ ist. Zu überprüfen ist also nur die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung. Sind

$$f = \sum_{|\nu|=0}^{e-1} a_\nu t^\nu, \qquad g = \sum_{|\mu|=0}^{e-1} b_\mu t^\mu \in H_e,$$

so ist zu zeigen:

$$\|f \cdot g\| = \|f\| \cdot \|g\|.$$

Es gilt nun

$$f \cdot g = \sum_{|\lambda|=0}^{e-1} t^\lambda \Big(\sum_{\nu+\mu=2} a_\nu b_\mu \Big) =: \sum \alpha_\lambda t^\lambda$$

und

$$|\alpha_\lambda| = \Big| \sum_{\nu+\mu=\lambda} a_\nu b_\mu \Big| \leqq \sum |a_\nu| \, |b_\mu| = \sum_{r=0}^{|\lambda|} \sum_{\substack{|\nu|=r \\ \nu+\mu=\lambda}} |a_\nu| \, |b_\mu|,$$

und da die Zahl der m-Tupel ν mit $|\nu| = r$ stets $\leqq (r+1)^m$ ist, folgt für $\|f\| = c_1$, $\|g\| = c_2$

$$|\alpha_\lambda| = \sum_{r=0}^{\frac{1}{2}|\lambda|} \sum_{|\nu|=r} \frac{c_1}{2\delta(|\nu|+1)^{m+2}\varrho^\nu} \cdot \frac{c_2}{2\delta(|\lambda|-|\nu|)^{m+2}\varrho^{\lambda-\nu}}$$

$$\leqq \frac{c_1c_2}{4\delta^2\varrho^\lambda} \sum_{r=0}^{\frac{1}{2}|\lambda|} \frac{(r+1)^m}{(r+1)^{m+2}(|\lambda|-r+1)^{m+2}} \leqq \frac{c_1c_2\cdot 2^{m+1}}{\delta^2\varrho^\lambda(|\lambda|+2)^{m+2}} \sum_{r=0}^{\frac{1}{2}|\lambda|}(r+1)$$

$$\leqq \frac{c_1c_2\cdot 2^{m+1}}{\delta^2\varrho^\lambda(|\lambda|+2)^{m+2}} \cdot \delta \cdot 2^{m-2} = \frac{c_1\cdot c_2}{2\delta\varrho^\lambda(|\lambda|+1)^{m+2}},$$

d. h. $c_1 \cdot c_2 \geqq 2\delta\varrho^\lambda(|\lambda|+1)^{m+2}$ für alle λ, q. e. d.

Wir führen unter den Multiindizes nun eine Ordnungsrelation ein.

2.3.2.4. Definition. Es seien $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_m)$, $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m)$ zwei m-dimensionale Multiindizes. Wir definieren

$$\nu < \mu \Leftrightarrow \begin{cases} |\nu| < |\mu| \\ \text{oder} \\ \exists\, k \leqq m \quad \text{mit} \quad \nu_k < \mu_k, \nu_{k+i} = \mu_{k+i} \\ \text{für} \quad i = 1, \ldots, m-k. \end{cases}$$

Ist $\alpha \in H_e$, $\alpha = \sum_\mu a_\mu t^\mu$, so sei $\hat{O}(\alpha) = \min(\mu, a_\mu \neq 0)$. Für $\hat{O}(\alpha) > \nu$ schreiben wir auch $\alpha > \nu$.

Für $\hat{O}$ gilt natürlich

$$\hat{O}(\alpha_1 + \alpha_2) \geqq \min(\hat{O}(\alpha_1), \hat{O}(\alpha_2)) \quad \text{und} \quad \hat{O}(\alpha_1 \cdot \alpha_2) = \hat{O}(\alpha_1) + \hat{O}(\alpha_2).$$

2.3.2.5. Satz. *Es sei ν ein m-Multiindex, $\alpha = \sum a_\mu t^\mu \in H_e$, $\alpha > \nu$, $\bar{\delta} > 0$ gegeben. Dann existieren positive Zahlen $\varrho_1, \varrho_2 = \varrho_2(\varrho_1), \ldots, \varrho_m = \varrho_m(\varrho_1, \ldots, \varrho_{m-1})$, $\gamma = \gamma(\varrho)$ mit*

$$\|\alpha\|_{\gamma\varrho} = \bar{\delta}(\gamma\varrho)^\nu,$$

und diese Ungleichung bleibt erhalten, wenn man die ϱ_i und γ in der Weise $\varrho_1 = \varrho_1^*$, $\varrho_2 \leqq \varrho_2^*(\varrho_1), \ldots, \varrho_m \leqq \varrho_m^*(\varrho_1, \ldots, \varrho_{m-1})$, $\gamma = \gamma^*(\varrho)$ verkleinert.

Beweis. Es ist

$$\alpha = \sum_{|\mu|=|\nu|}^0 a_\mu t^\mu + \sum_{|\mu|>|\nu|}^1 a_\mu t^\mu;$$

$\sum^0$ ist endlich, und $a_\mu t^\mu$ sei ein Term davon, k so, daß $\mu_k > \nu_k$, $\nu_{k+1} = \mu_{k+1}, \ldots, \nu_m = \mu_m$ ist. Sind nun $\varrho_1, \ldots, \varrho_{k-1}$ gegeben, so gibt es ein ϱ_k mit $\|a_\mu t^\mu\|_\varrho \leqq \bar{\delta}\varrho^\mu$ ($\varrho_{k+1}, \ldots, \varrho_m$ beliebig). Wir wählen nun ϱ erst für die Glieder mit $k = 1$, dann für $k = 2$ und lassen ϱ_1 unverändert, usw., so daß

$$\|\textstyle\sum^0\|_\varrho = \bar{\delta}\varrho$$

ist, und o. B. d. A. können wir ϱ durch $\tilde{\gamma}\varrho$ ersetzen. Nach 2.3.2.1. ist für kleine $\tilde{\varrho} = \tilde{\gamma}\varrho$ nun $\|\sum_{\tilde{\varrho}}^1\| < \infty$, und für beliebige $\hat{\gamma} \leqq 1$ gilt dann

$$\|\textstyle\sum^1\|_{\hat{\gamma}\tilde{\varrho}} = \hat{\gamma}^{|\nu|+1}\|\sum^1\|_{\tilde{\varrho}},$$

daher

$$\|\textstyle\sum^1\|_{\hat{\gamma}\tilde{\gamma}\varrho} \leqq \bar{\delta}(\hat{\gamma}\tilde{\gamma}\varrho)^\nu \quad \text{für kleine } \hat{\gamma}, \text{ d. h.,}$$

für $\gamma = \tilde{\gamma} \cdot \hat{\gamma}$ ist auch $\|\sum^1\|_{\gamma\varrho} = \bar{\delta}(\gamma\varrho)^\nu$, q. e. d.

Nach dieser technischen Vorbemerkung wenden wir uns der Betrachtung gewisser zahlentheoretischer Funktionen zu, die wir später als Weierstraßinvarianten von Idealen in H interpretieren werden.

2.3.2.6. **Definition.** Es sei $\mathfrak{s} = (s_1, \ldots, s_m)$ ein m-Tupel von Abbildungen gewisser Teilmengen von $N^0, \ldots, N^{m-1}$ in $N \cup \{\infty\}$ mit

$$\begin{array}{ll} s_1 = \text{const}, & \\ s_2 = s_2(\nu_1) & \text{definiert für } 0 \leqq \nu_1 < s_1 \text{ mit } s_2(\nu_1) = \infty, \\ & \text{falls } s_1 = \infty \text{ für alle } \nu_1 \text{ ist,} \\ \vdots & \\ s_p = s_p(\nu_1, \ldots, \nu_{p-1}) & \text{definiert für } 0 \leqq \nu_1 < s_1, \ldots, \\ & 0 \leqq \nu_{p-1} < s_{p-1}(\nu_1, \ldots, \nu_{p-2}) \quad \text{mit} \\ & s_{p-1}(\nu_1, \ldots, \nu_{p-2}) = \infty \Rightarrow \\ & s_p(\nu_1, \ldots, \nu_{p-1}) = \infty \quad \text{für alle } \nu_{p-1}. \end{array}$$

Weiter sei $e \in N \cup \{\infty\}$ gegeben, und es gelte stets

$$s_p(\nu_1, \ldots, \nu_{p-1}) = \begin{cases} e - \nu_1 - \cdots - \nu_{p-1} \\ \text{oder } \infty. \end{cases}$$

(i) $\mathfrak{s}$ heißt dann *reduzierendes System zu e* (bzw. einfach *reduzierendes System*, falls $e = \infty$ ist).

(ii) $h \in H_e$ heißt *reduziert* bezüglich $\mathfrak{s}$, falls

$$h = \sum_{\substack{0 \leq \nu_1 < s_1 \\ 0 \leq \nu_2 < s_2(\nu_1) \\ \vdots \\ 0 \leq \nu_m < s_m(\nu_1, \ldots, \nu_{m-1}) \\ |\nu| < e}} a_\nu t^\nu$$

ist.

(iii) $\nu = \Phi$ sei zugelassen. Der Multiindex $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_i)$ mit $0 \leqq i \leqq m$ heißt *maximal* bezüglich des reduzierenden Systems $\mathfrak{s}$, falls $0 \leqq \nu_j < s_j(\nu_1, \ldots, \nu_{j-1})$ ist für $j = 1, \ldots, i$ sowie $s_i(\nu_1, \ldots, \nu_{i-1}) < \infty$ und $s_{i+1}(\nu_1, \ldots, \nu_i) = \infty$ (falls $i < m$) ist.

2.3.2.7. **Bemerkung.** Zum reduzierenden System $\mathfrak{s}$ gibt es nur endlich viele maximale Multiindizes. (Denn mit $s_i < \infty$ sind auch $s_1, \ldots, s_{i-1} < \infty$ an der Stelle ν.)

2.3.2.8. **Bemerkung.** Es sei $h \in H_e$ reduziert bezüglich $\mathfrak{s}$ und $(\nu_1, \ldots, \nu_i) = \nu'$ maximaler Multiindex. Setzen wir

$$h(\nu') := \sum_{\substack{\nu_{i+1}, \ldots, \nu_m \in N \\ \nu_{i+1} + \cdots + \nu_m < e - |\nu'|}} a_{\nu, \nu_{i+1}, \ldots, \nu_m} t_{i+1}^{\nu_{i+1}} \cdots t_m^{\nu_m},$$

so gilt

$$h = \sum_{\nu' \text{ maximal}} t_1^{\nu_1} \cdots t_i^{\nu_i} h(\nu').$$

Beweis. Einfaches Durchnumerieren der Indizes; wir wählen ν_1 fest, dann $\nu_2 \in \{0, \ldots, s_2(\nu_1) - 1\}$, darauf $\nu_3 \in \{0, \ldots, s_3(\nu_1, \nu_2) - 1\}$ usw., bis zum ersten Mal $s_{i+1}(\nu_1, \ldots, \nu_i) = \infty$ wird (oder $i = m$). So werden alle Terme von 2.3.6. (ii) genau einmal durchlaufen.

2.3.2.9. Definition. Es sei $\mathfrak{S}$ ein reduzierendes System.

(i) $(\nu_1, \ldots, \nu_i) = \nu$ sei Multiindex mit $1 \leqq i < m$.
ν heißt *endlich* bezüglich $\mathfrak{S}$, falls $0 \leqq \nu_j < s_j(\nu_1, \ldots, \nu_{j-1})$ ist für $j = 1, \ldots, i$ und $s_{i+2}(\nu_1, \ldots, \nu_i)$.

(ii) Sind $\mathfrak{S}, \tilde{\mathfrak{S}}$ reduzierende Systeme, so heißt $\mathfrak{S} \leqq \tilde{\mathfrak{S}}$ („$\tilde{\mathfrak{S}}$ höchstens stärker reduzierend als $\mathfrak{S}$"), falls

$$s_{i+1}(\nu_1, \ldots, \nu_i) = \tilde{s}_{i+1}(\nu_1, \ldots, \nu_i)$$

ist für alle bezüglich $\mathfrak{S}$ endlichen $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_i)$.

Man sieht sogar: Man muß nicht fordern, daß $\tilde{s}_{i+1}$ für bezüglich $\mathfrak{S}$ endliche ν definiert ist, das gilt automatisch (Induktion über i). $\mathfrak{S} \leqq \tilde{\mathfrak{S}}$ heißt: Zu $\tilde{\mathfrak{S}}$ gibt es höchstens mehr endliche Multiindizes als zu $\mathfrak{S}$. Offensichtlich ist „$\leqq$" eine Halbordnung der reduzierenden Systeme.

2.3.2.10. Satz. *Es sei $\mathfrak{S}_1 \leqq \mathfrak{S}_2 = \cdots$ eine unendliche Folge reduzierender Systeme. Dann existiert ein $p_0 \in N$ mit $\mathfrak{S}_p = \mathfrak{S}_{p_0}$ für alle $p \geqq p_0$*

Beweis. Es gilt:

$$\mathfrak{S} \underset{+}{\overset{<}{}} \tilde{\mathfrak{S}} \Rightarrow \text{ Es gibt ein } \nu \text{ endlich } \tilde{\mathfrak{S}} \text{ mit } \nu \text{ nicht endlich } \mathfrak{S}.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $\mathfrak{S}_1 \underset{+}{\overset{<}{}} \mathfrak{S}_2 \underset{+}{\overset{<}{}} \cdots$ und überdies $\mathfrak{S}_{j+1} > \mathfrak{S}_j$ so groß, daß gilt:

Jeder bezüglich $\mathfrak{S}_j$ maximale Multiindex, der bezüglich $\mathfrak{S}_k$ mit $k > j$ endlich ist, ist schon bezüglich $\mathfrak{S}_{j+1}$ endlich.
(Das ist möglich, da zu $\mathfrak{S}_j$ nur endlich viele maximale Multiindizes existieren.)
Es gilt

$$\nu \text{ maximal } \mathfrak{S}_j, \text{endlich } \mathfrak{S}_{j+1} \Rightarrow \dim \nu \geqq j - 1. \qquad (*)$$

Daher wird die Folge für $j = m + 1$ stationär.
Hierbei ergibt sich $(*)$ durch Induktion über j:

$j = 1$ ist trivial; es sei

$j > 1$, und für alle ν maximal $\mathfrak{S}_{j-1}$ mit ν endlich $\mathfrak{S}_j$ sei $\dim \nu \geqq j - 2$.
Weiter sei $\bar{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_r)$ maximal s_j und endlich s_{j+1}. Dann ist $r > 0$ und $(\nu_1, \ldots, \nu_{r-1})$ endlich s_j, daher enthält $(\nu_1, \ldots, \nu_{r-1})$ einen bezüglich s_{j-1} maximalen Multiindex $(\nu_1, \ldots)$, d. h., es ist $r - 1 \geqq j - 2$ und daher $r = j - 1$, q. e. d.

2.3.2.11. Definition. Ist $\mathfrak{S}$ ein reduzierendes System zu e, $\nu' = (\nu_1, \ldots, \nu_i)$ endlich $\mathfrak{S}$, so schreiben wir stets

$$\nu^* := (\nu_1, \ldots, \nu_i, s_{i+1}(\nu_1, \ldots, \nu_i)).$$

Weiter sei $\Lambda \subseteqq H_e$. Dann heißt Λ ein *System von Weierstraßpolynomen* zu $\mathfrak{S}$, falls

$$\Lambda = \{\omega_{\nu'} = t^{\nu^*} + \mathrm{red}_{\nu'}, \nu' \text{ endlich}\}$$

ist mit $\mathrm{red}_{\nu'} > \nu^*$ reduziert (ν^* identifiziert mit dem m-dimensionalen Multiindex $(\nu^*, 0, \ldots, 0)$).

2.3.2.12. Satz. *Es sei $\Lambda = \{\omega_{\nu'} = t^{\nu^*}, \nu' \text{ endlich } \mathfrak{S}\}$ das triviale System von Weierstraßpolynomen, $\varrho \in R_+^m$ vorgegeben. Dann gibt es für jedes $h \in H_e$ mit $\|h\| < \infty$ eine eindeutig bestimmte Darstellung*

$$h = \sum_{\nu' \text{ endlich}} Q_{\nu'} \omega_{\nu'} + R,$$

R reduziert bezüglich $\mathfrak{s}$ und $Q_{\nu'} \in H_{e-|\nu^*|}$ Potenzreihen in $t_{i+1}, \ldots, t_m$ (für $\nu' = (\nu_1, \ldots, \nu_i)$). Weiter gilt

$$\hat{O}(R) \geqq \hat{O}(h), \qquad \hat{O}(Q_{\nu'}) + \nu^* \geqq \hat{O}(h),$$

$$\|Q_{\nu'}\| \leqq \|h\| \varrho^{-\nu^*}, \qquad \|R\| \leqq \|h\|.$$

Beweis. Induktion nach $\tau = \tau(\mathfrak{s}) = \max\{i, \exists\, (\nu_1, \ldots, \nu_i) \text{ endlich } \mathfrak{s}\}$.

$\tau = 0$: Nur $s_1 < \infty$, daher $\Lambda = \{t_1^{s_1}\}$; somit ist $h = Qt_1^{s_1} + R$ mit $\deg_{t_1} R < s_1$ (eindeutig). Die Abschätzungen folgen, da die Zerlegung in „disjunkte" Unterreihen vorgenommen wurde.

$\tau > 0$: Wir betrachten ein neues reduzierendes System $\mathfrak{s}^*$ zu e:

$$s_i(\nu_1, \ldots, \nu_{i-1}) = \begin{cases} s_i(\nu_1, \ldots, \nu_{i-1}) & \text{für } i \leqq \tau, \\ 0 & \text{für } i > \tau. \end{cases}$$

Dann ist $\tau(\mathfrak{s}^*) = \tau - 1$, daher

$$h = \sum_{\nu' \text{ endlich } \mathfrak{s}^*} Q_{\nu'} \omega_{\nu'} + R^*$$

und R^* reduziert bezüglich $\mathfrak{s}^*$. Nun ist $\Lambda = \Lambda^* \coprod A$ mit

$$\Lambda^* = \{\omega_{\nu'}, \nu' \text{ endlich } \mathfrak{s}^*\}, \qquad A = \{\omega_{\nu'}, \nu' \text{ maximal } \mathfrak{s}^*, \text{ endlich } \mathfrak{s}\},$$

wobei stets $\nu' = (\nu_1, \ldots, \nu_\tau)$ ist. Es sei nun

$$R^* = \sum_{\substack{\nu' = (\nu_1, \ldots, \nu_i) \\ \nu' \text{ maximal } \mathfrak{s}^*}} a_{\nu'}(t_{i+1}, \ldots, t_m)\, t^{\nu'}.$$

Wir müssen zeigen: Für $\omega_{\nu'} \in A$ läßt sich $t_{\tau+1}^{s_\tau(\nu_1, \ldots, \nu_\tau)}$ abspalten von $a_{\nu'} t^{\nu'}$. Nun ist

$$a_{\nu'} = Q_{\nu'}(t_{\tau+1}, \ldots, t_m) \cdot \frac{\omega_{\nu'}}{t^{\nu'}} + b_{\nu'}(t_{\tau+1}, \ldots, t_m)$$

eindeutig bestimmt mit dem Polynom $b_{\nu'}$ in $t_{\tau+1}$, $\deg_{t_{\tau+1}}(b_{\nu'}) < s_\tau(\nu')$. Also ist

$$R^* = \sum_{\omega_{\nu'} \in A} Q_{\nu'} \omega_{\nu'} + R, \quad R \text{ reduziert (bezüglich } \mathfrak{s}).$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist R eindeutig bestimmt, daher auch R und die $Q_{\nu'}$, q. e. d.

Wir betrachten nun ein beliebiges System von Weierstraßpolynomen. Dieses erfüllt nach 3.2.5. stets die Voraussetzungen der folgenden Verallgemeinerung der Weierstraßschen Formel (für geeignetes ϱ). Wir verwenden im folgenden Satz jedoch nicht, daß die $\alpha_{\nu'}$ reduziert sind!

2.3.2.13. Satz. *Es sei $\mathfrak{s}$ reduzierendes System zu e,*

$$\Lambda = \{\omega_{\nu'} = t^{\nu^*} + \alpha_{\nu'}, \nu' \text{ endlich } \mathfrak{s}\}$$

gegeben mit $\alpha_{\nu'} > \nu^*$ und $\|\alpha_{\nu'}\| \leqq \varepsilon \sigma^{-1} \varrho^{\nu^*}$ für ein $0 < \varepsilon < 1$ und $\sigma = |\mathfrak{s}| =$ Anzahl der endlichen ν' zu $\mathfrak{s}$. Dann gibt es für alle $h \in H_e$ mit $\|h\| < \infty$ eine eindeutige Darstellung

$$h = \sum_{\nu' \text{ endlich}} Q_{\nu'} \omega_{\nu'} + R$$

mit R reduziert, $Q_{\nu'}H_{e-|\nu^*|}$ Potenzreihe in $t_{t+1}, \ldots, t_m$ (für $\nu' = (\nu_1, \ldots, \nu_t)$). Dabei gilt weiter

$$\hat{O}(R) \geqq \hat{O}(h), \qquad \hat{O}(Q_{\nu'}) + \nu^* \geqq \hat{O}(h),$$

$$\|R\| \leqq \|h\| \cdot \frac{1}{1-\varepsilon}, \qquad \|Q_{\nu'}\| \leqq \|h\| \cdot \frac{\varrho^{-\nu^*}}{1-\varepsilon}.$$

Wir konstruieren Folgen $h_i, R_i, H_e, Q_{\nu'}^{(i)}, H_{e-|\nu^*|}$, deren Grenzfunktionen die gewünschte Zerlegung liefern.
Zunächst setzen wir $\tilde{\omega} = t^{\nu^*}$.
$i = 0 : h_0 =: h$.
$i > 0 : h_i$ sei schon konstruiert. Nach dem vorigen Satz ist

$$h_i = \sum_{\nu' \text{ endlich}} Q_{\nu'}^{(i+1)} \tilde{\omega}_{\nu'} + R_{i+1}$$

mit

$$\|Q_{\nu'}^{(i+1)}\| = \|h_i\| \varrho^{-\nu^*}, \qquad \|R_{i+1}\| = \|h_i\|. \tag{$*$}$$

Wir setzen

$$h_{i+1} := h_i - \sum_{\nu'} Q_{\nu'}^{(i+1)} \omega_{\nu'} - R_{i+1} = - \sum_{\nu'} \alpha_{\nu'} Q_{\nu'}^{(i+1)}.$$

Nach ($*$) folgt

$$\|h_{i+1}\| = |\mathfrak{z}|(\varepsilon\sigma^{-1}\varrho^{\nu^*}) \|h_i\| \varrho^{-\nu^*} = \varepsilon \|h_i\| \leqq \varepsilon^{i+1} \|h\|;$$

daher konvergiert $\sum\limits_i h_i$ und nach ($*$) auch $\sum R_i$, $\sum Q_{\nu'}^{(i)}$.
Bezeichnen wir die Summen mit h bzw. R bzw. $Q_{\nu'}$, so ist

$$h = \sum_{i=0}^{\infty} (h_i - h_{i+1}) = \sum_{\nu'} \left(\sum_{i=0}^{\infty} Q_{\nu'}^{(i+1)} \omega_{\nu'} \right) + \sum_{i=0}^{\infty} R_{i+1} = \sum_{\nu'} Q_{\nu'} \omega_{\nu'} + R.$$

Die Aussagen über $\hat{O}$ sind klar. Weiter ist

$$\|R\| \leqq \|\sum_i h_i\| \leqq \sum_i \varepsilon^{i+1} \|h\| = \frac{1}{1-\varepsilon} \|h\|$$

und

$$\|Q_{\nu'}\| = \varrho^{-\nu^*} \frac{1}{1-\varepsilon} \|h\|.$$

Wir zeigen die Eindeutigkeit der gefundenen Zerlegung. Es genügt zu zeigen, daß folgendes gilt: Ist $\sum\limits_{\nu'} Q_{\nu'}\omega_{\nu'} + R = 0$, $\|Q_{\nu'}\|$, $\|R\|$ und R reduziert, so ist $R = 0$, $Q_{\nu'} = 0$.
Ist $K = \|\sum\limits_{\nu'} Q_{\nu'}\omega_{\nu'} + R\|$, so ist nach (3.2.12.)

$$\|Q_{\nu'}\| \leqq K \cdot \varrho^{-\nu^*};$$

weiter gilt

$$R + \sum_{\nu'} Q_{\nu'} \tilde{\omega}_{\nu'} = - \sum_{\nu'} Q_{\nu'} \alpha_{\nu'},$$

und daher ist

$$K = \|R + \sum Q_{\nu'} \omega_{\nu'}\| = |\mathfrak{z}| \cdot (K \varrho^{-\nu^*}) \cdot \varepsilon\sigma^{-1} \varrho^{\nu^*} = \varepsilon \cdot K.$$

Aus $K \leqq \varepsilon K$ folgt aber $K = 0$; daher ist $R + \sum Q_{\nu'} \tilde{\omega}_{\nu'} = 0$, und die Eindeutigkeitsaussage von 3.2.12. liefert $R = 0$, $Q_{\nu'} = 0$, q. e. d.

Wir nennen R die *Reduktion von h bezüglich $\mathfrak{s}$.*

Es gilt überdies

2.3.2.14. Bemerkung. Die Koeffizienten von h und den $\omega_{\nu'}$ seien rationale Funktionen in $\mathcal{V} = (v_1, \ldots, v_k) \in \mathbb{C}^k$, die für $\mathcal{V} = 0$ definiert sind. Dann sind dies Koeffizienten von $Q_{\nu'}$ und R rational in $\mathcal{V}$.

Beweis. In einer Umgebung $V = V(0) \subseteqq \mathbb{C}^k$ sind die Voraussetzungen von 2.3.2.13. immer noch erfüllt (für geeignetes ϱ). Dann sind dort die Koeffizienten von R, $Q_{\nu'}$ Funktionen von $\mathcal{V}$ über V.

$e < \infty$: $Q_{\nu'}$, R genügen linearen Gleichungen mit den Koeffizienten von $\omega_{\nu'}$ und h. Nach 2.3.2.13. hat das System eine eindeutige Lösung, die dann nach der Determinantentheorie rational in den Koeffizienten $\omega_{\nu'}$, h ist, q. e. d.

$e = \infty$: Wir entwickeln schrittweise für wachsendes $e < \infty$.

Der folgende Satz ist das Hauptresultat dieses Abschnitts und liefert uns eine „Division mit Rest durch ein Ideal".

2.3.2.15. Satz. *Ist $J \subsetneqq H_e$ ein Ideal, so existiert ein reduzierendes System $\mathfrak{s}$ zu e und eine Zariski-offene Teilmenge $Z \subseteqq \mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$, so daß nach einer beliebigen Transformation mit einem $g \in Z$ gilt: J besitzt ein eindeutig bestimmtes Erzeugendensystem aus Weierstraßpolynomen zu $\mathfrak{s}$.*

Beweis. Wir zeigen induktiv die folgende Aussage:

(A_r): Es gibt ein reduzierendes System $\mathfrak{s}_r = (s_1^{(r)}, \ldots, s_m^{(r)})$ zu e und $\Phi \neq Z_r \subseteqq \mathrm{GL}$ (Z_r Zariski-offen) und nach einer beliebigen Koordinatentransformation mit $g \in Z_r$ ein System

$$\Lambda_r = \{\omega_j^r = \omega_{\nu_j} = t^{\nu_j^*} + \alpha_j^r, \qquad j = 1, \ldots, r\}$$

von Weierstraßpolynomen zu $\mathfrak{s}_r$ mit

(i) $\nu_{j+1}^* > \nu_j^*$.

(ii) $h \in J$ reduziert zu $\mathfrak{s}_r \Rightarrow h > \nu_r^*$.

(iii) Die Koeffizienten von ω_j^r sind reguläre rationale Funktionen von $g \in Z_r$.

(iv) $\Lambda_r \subseteqq J$.

(v) $Z_{r-1} \supseteqq Z_r$, $\mathfrak{s}_{r-1} \lneqq \mathfrak{s}_r$ für $r > 0$.

red_r bezeichnet die Reduktion bezüglich Λ_r.

Nach 3.2.10. und (v) folgt dann die Existenzaussage des Satzes, falls wir zeigen können:

a) (A_0),

b) (A_r) und $\mathrm{red}_r J \neq 0 \Rightarrow$ (A_{r+1}).

Nun ist (A_0) trivial, wenn wir $\mathfrak{s}_0 = (\infty, \ldots, \infty)$, $Z_0 = \mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$, $\Lambda_0 = \Phi$ setzen.
Es sei (A_r) bewiesen, $\mathrm{red}_r J \neq 0$. Es sei μ minimal mit der Eigenschaft: Es gibt eine Transformation aus Z_r und ein $h \in \mathrm{red}_r J$, so daß $a_\mu t^\mu \neq 0$ ein Term von h ist.
Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $a_\mu = 1$ und $h = t^\mu + \alpha$, $\nu_r^* < \mu < \alpha$ (wegen (ii)). Ist $j \in J$ fixiert mit $\mathrm{red}_r j = h$, so sind die Koeffizienten von α rationale Funktionen von $g \in Z_r$ (3.2.14.); es sei Z_{r+1} deren Definitionsbereich in Z_r. Weiter sei

$$\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_i, 0, \ldots, 0) \quad \text{mit} \quad \mu_i > 0.$$

Wir definieren $\mathfrak{Z}_{r+1}$ durch

$$s_i^{(r+1)}(\mu_1, \ldots, \mu_{i-1}) = \mu_i,$$
$$s_j^{(r+1)}(\nu_1, \ldots, \nu_{j-1}) = s_j^{(r)}(\nu_1, \ldots, \nu_{j-1}) \quad \text{für } \nu = (\nu_1, \ldots, \nu_{j-1}) \text{ endlich } \mathfrak{Z}_r,$$
$$s_j^{(r+1)}(\nu_1, \ldots, \nu_{j-1}) = \infty \text{ sonst}.$$

Wir zeigen:

(α) $\qquad s_i^{(r)}(\mu_1, \ldots, \mu_{i-1}) = \infty,$

(β) $\qquad s_{i-1}^{(r)}(\mu_1, \ldots, \mu_{i-2}) < \infty.$

Damit ist dann $\mathfrak{Z}_{r+1}$ wohldefiniert, und $(\mu_1, \ldots, \mu_{i-1}) =: \nu_{r+1}$ ist maximal zu $\mathfrak{Z}_r$, endlich zu $\mathfrak{Z}_{r+1}$.

(α) h reduziert $\Rightarrow \mu_i < s_i^{(r)}(\mu_1, \ldots, \mu_{i-1})$,
und falls $(\mu_1, \ldots, \mu_{i-1})$ endlich $\mathfrak{Z}_r$ ist, ergibt (ii)

$$h > (\mu_1, \ldots, \mu_{i-1}, s_i^{(r)}(\mu_1, \ldots, \mu_{i-1})), \text{ Widerspruch!}$$

(β) Annahme: $s_{i-1}^{(r)}(\mu_1, \ldots, \mu_{i-2}) = \infty$. Wir wählen δ, ϱ so, daß

$$\|\alpha_{\nu'}\|_\varrho \leqq \delta \varrho^{\nu^*}, \qquad \|\alpha\|_\varrho \leqq \delta \varrho^\mu$$

ist (Satz 3.5. anwendbar wegen $\alpha > \mu > \nu^*$).
Da Z_{r+1} offen ist, können wir auf die Koordinaten hinreichend kleine Drehungen und Streckungen anwenden, ohne die Situation zu verändern. Es sei

$$t_i = \varrho_i \tilde{t}_i \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Wir haben $\tilde{\omega}_{\nu'} = \tilde{t}^{\nu^*} + \tilde{\alpha}_{\nu'}$ mit $\tilde{\alpha}_{\nu'} = \varrho^{-\nu^*} \cdot \alpha_{\nu'}(\varrho_i \tilde{t}_i)$ (Diese Eigenschaft kann man induktiv zu (iii) hinzunehmen) und setzen $\tilde{h} = \tilde{t}^\mu + \alpha$ mit $\alpha = \varrho^{-\mu}\alpha$. Es folgt für $\tilde{\varrho} = (1, \ldots, 1)$

$$\|\tilde{\alpha}_{\nu'}\|_{\tilde{\varrho}} \leqq \delta, \qquad \|\tilde{\alpha}\|_{\tilde{\varrho}} \leqq \delta.$$

Eine Drehung um einen kleinen Winkel φ in der (t_{i-1}, t_i)-Ebene liefert

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{i-1} \\ t_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{t}_{i-1}\cos\varphi & -\tilde{t}_i \sin\varphi \\ \tilde{t}_{i-1}\sin\varphi & \tilde{t}_i\cos\varphi \end{pmatrix},$$

d. h.

$$\tilde{t}^\mu \overset{\varphi}{\mapsto} \tilde{t}^{(\mu_1, \ldots, \mu_{i-2})} (a\tilde{t}_{i-1}^{\mu_{i-1}+\mu_i} + \beta) =: \gamma$$

mit $a = \sin^{\mu_i}\varphi \cos^{\mu_{i-1}}\varphi$, $\beta = \beta(\tilde{t}_{i-1}, \tilde{t}_i)$ homogen vom Grad $\mu_{i-1} + \mu_i$, und t_i tritt in allen Gliedern auf.

Behauptung: $\mathrm{red}_r \tilde{\alpha} =: \hat{\alpha}$ enthält den Term $a\tilde{t}^{(\mu_1, \ldots, \mu_{i-2})}\tilde{t}_{i-1}^{\mu_{i-1}+\mu_i}$ (damit folgt (β), denn offenbar ist $(\mu_1, \ldots, \mu_{i-2}, \mu_{i-1} + \mu_i) < \mu$ im Widerspruch zur Minimalität von μ).
Mit $\tilde{t}^\mu + \tilde{\alpha} \in J$ haben wir $\gamma + \varphi\tilde{\alpha} \in J$, $\gamma + \hat{\alpha} \in \varphi J$, und dies ist reduziert (reduziert wegen $s_{i-1}^{(r)}(\mu) = \infty$). Für kleines δ wird $\hat{\alpha}$ klein, und bei Verkleinerung von ϱ_i bleibt der Term

$$a\tilde{t}_{i-1}^{\mu_{i-1}+\mu_i}\tilde{t}^{(\mu_1, \ldots, \mu_{i-2})}$$

unberührt, tritt also nicht in $\hat{\alpha}$ auf, q. e. d.