Beweis. ($\Rightarrow$) ist klar nach der Vorbemerkung (für $E = \mathcal{O} \hat{\otimes} A$, $E' = I$, $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}_A$).
($\Leftarrow$) Zu zeigen ist, daß

$$\mathfrak{a}_A \otimes_A (\mathcal{O} \hat{\otimes} A/I) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O} \hat{\otimes} A/I$$

injektiv ist. Nun steht aber links nichts weiter als

$$\begin{aligned} &\mathfrak{m}_A \cdot (\mathcal{O} \hat{\otimes} A)/\mathfrak{m}_A \cdot I \quad (\text{Rechtsexaktheit von } \otimes_A) \\ &= \mathfrak{m}_A \cdot (\mathcal{O} \hat{\otimes} A)/I \cap \mathfrak{m}_A \cdot \mathcal{O} \hat{\otimes} A \quad (\text{Voraussetzung}) \\ &\cong I + \mathfrak{m}_A \cdot \mathcal{O} \hat{\otimes} A/I = \operatorname{im} \alpha, \end{aligned}$$

q. e. d.
Mit (*) beweisen wir nun die gewünschte Aussage. Es sei $m = \operatorname{emdim} A$; $A = k\langle t_1, \ldots, t_m \rangle$.
φ ist flach $\Leftrightarrow$ Jede Relation $\sum p_i f_i = 0$ läßt sich zu $\sum P_i F_i = 0$ liften.
($\Rightarrow$) Ist $\sum p_i f_i = 0$, $F_i = f_i + \sum\limits_j t_j G_{ij}$, so ist

$$\sum p_i F_i = \sum_{i,j} p_i \cdot t_j G_{ij} \in \mathfrak{m}_A \cdot \mathcal{O} \hat{\otimes} A$$

Element von J, also (*),

$$\sum p_i F_i \in \mathfrak{m}_A J, \quad \text{d. h.} \quad \sum p_i F_i = \sum_{i,j} Q_{ij} t_j F_i,$$

daher

$$\sum_i \underbrace{(p_i - \sum_j Q_{ij} t_j)}_{P_i} F_i = \sum p_i F_i - \sum_j Q_{ij} t_j F_i = 0,$$

q. e. d.
($\Leftarrow$) Nach (*) genügt es zu zeigen, daß aus $H \in \mathfrak{m}_A \cdot \mathcal{O} \hat{\otimes} A$, $H \in J$, folgt $H \in \mathfrak{m}_A J$.
Es sei

$$H = \sum_i (p_i - \sum_j t_j R_{ij}) F_i \quad \text{mit} \quad p_i \in \mathcal{O} \hat{\otimes} 1 \quad (H \in J);$$

dann gilt aber $\sum\limits_i p_i f_i = 0$, und so gibt es eine Fortsetzung dieser Relation zu

$$\sum_i \underbrace{(p_i - \sum t_j Q_{ij})}_{P_i} F_i = 0.$$

Folglich ist $\sum\limits_i p_i F_i = \sum\limits_{i,j} t_j Q_{ij} F_i$, daher

$$H = \sum_{i,j} t_j (Q_{ij} - R_{ij}) F_i \in \mathfrak{m}_A J,$$

q. e. d.

2.3. Deformationen lokaler analytischer Algebren

Wir betrachten hier nur die Kategorie der konvergenten Potenzreihenalgebren über dem Grundkörper $\mathbf{C}$ der komplexen Zahlen. Die Darstellung folgt Grauerts Arbeit [8].

2.3.1. Erweiterungsketten von Untermoduln von $p \cdot H_e$

Es sei $H = \mathbf{C}\{t_1, \ldots, t_m\}$ eine freie Algebra konvergenter Potenzreihen, $H_e = H/\mathfrak{m}^e$, $p \cdot (\ )$ bezeichne stets die p-fache direkte Summe.
Es seien $J_e \subseteq p \cdot H_e$ und $J_{e+1} \subseteq p \cdot H_{e+1}$ zwei Untermoduln.

Definition. (i) J_{e+i}, $i \geqq 1$, heißt *Erweiterung* von J_e, wenn $J_{e+i}/p \cdot H_e = J_e$ ist.
(ii) J_{e+i} heißt *minimale Erweiterung* von J_e, wenn überdies folgendes gilt: Ist $\tilde{J}_{e+i} \subseteqq J_{e+i}$ Erweiterung von J_e, so ist $\tilde{J}_{e+i} = J_{e+i}$.

2.3.1.1. Satz. *Es sei $h_1, \ldots, h_k \in J_e$ ein minimales (d. h. unverkürzbares) Erzeugendensystem. Dann gilt:*

(i) *J_{e+1} ist Erweiterung von $J_e \Leftrightarrow$ Es gibt Erzeugende $\hat{h}_1, \ldots, \hat{h}_l \in J_{e+1}$ mit $\hat{h}_i \mid p \cdot H_e = h_i$ für $i = 1, \ldots, k$ und $\hat{h}_i \mid p \cdot H_e = 0$ für $i > k$.*

(ii) *Ist J_{e+1} minimale Erweiterung von J_e, so läßt sich $l = k$ wählen. Jede Fortsetzung $\hat{h}_1, \ldots, \hat{h}_k$ von $h_1, \ldots, h_k$ ist dann Erzeugendensystem von J_{e+1}.*

(iii) *Ist $\hat{h}_1, \ldots, \hat{h}_k$ Erzeugendensystem von J_{e+1} mit $\hat{h}_i \mid p \cdot H_e = h_i$, so ist J_{e+1} minimale Erweiterung von J_e.*

Beweis. (i) ($\Rightarrow$) Ist $\varphi: J_{e+1} \twoheadrightarrow J_e$ die kanonische Abbildung, $\hat{h}_1, \ldots, \hat{h}_k \in J_{e+1}$ beliebig mit $\hat{h}_i \mid p \cdot H_e = h_i$, so ergänzen wir diese durch ein Erzeugendensystem von $\ker \varphi$ zu $\hat{h}_1, \ldots, \hat{h}_l$.
(ii) ist trivial.
(iii) Ist $g \in H_e$, so sei $g(0)$ das Bild von g bei $H_e \twoheadrightarrow H_e/m_e = \mathbf{C}$ ($m_e = m \cdot H_e$). Nach dem Lemma von NAKAYAMA gilt

$$\sum_{i=1}^{k} a_i h_i = 0 \; (a_i \in H_e) \Rightarrow a_i(0) = 0, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Es ist zu zeigen, daß J_{e+1} minimal ist. Ist dies nicht so, dann existieren $\tilde{h}_1, \ldots, \tilde{h}_k \in J_{e+1}$, die Fortsetzungen der h_i sind und nicht ganz J_{e+1} erzeugen (nach (i)). Dann gilt

$$\tilde{h}_i = \sum_j a_{ij} \hat{h}_j, \quad a_{ij} \in H, \tag{$*$}$$

und $\hat{h}_j$ gemäß (iii). Ist $\underline{a_{ij}} := a_{ij}/H_e$, so ist dann $\sum_j (\underline{a_{ij}} - \delta_{ij}) h_j = 0$ in $p \cdot H_e$, deshalb $a_{ij}(0) = \delta_{ij}$, und daher ist das lineare Gleichungssystem ($*$) nach den $\hat{h}_j$ auflösbar, d. h., $\tilde{h}_1, \ldots, \tilde{h}_k$ erzeugen J_{e+1}, Widerspruch.

2.3.1.2. Korollar. *Sind J_{e+1}, $\tilde{J}_{e+1}$ minimale Erweiterungen von J_e, so ist*

$$J_{e+1} \cap p \cdot \mathfrak{m}^e = \tilde{J}_{e+1} \cap p \cdot \mathfrak{m}^e.$$

Beweis. Sind $\{\hat{h}_i\} \subseteqq J_{e+1}$, $\{\tilde{h}_i\} \subseteqq J_{e+1}$ Fortsetzungen der h_i, so sind dies nach 2.1. (ii) Erzeugendensysteme. Ist $g \in J_{e+1} \cap p \cdot m^e$, so ist $g = \sum a_i \hat{h}_i$ mit $a_i(0) = 0$ (da $g \mid H_e = 0$ ist). Daher ist $\sum a_i(\hat{h}_i - \tilde{h}_i) = 0$ in H_{e+1}, d. h.

$$g = \sum a_i \hat{h}_i = \sum a_i \tilde{h}_i \in \tilde{J}_{e+1} \cap p \cdot \mathfrak{m}^e,$$

q. e. d.

2.3.1.3. Folgerung. $\dim_{\mathbf{C}} p \cdot H_{e+1}/J_{e+1} = \dim_{\mathbf{C}} p \cdot H_{e+1}/\tilde{J}_{e+1}$.

Beweis. Es genügt zu zeigen: Die endlichdimensionalen Vektorräume J_{e+1} und $\tilde{J}_{e+1}$ haben dieselbe Dimension. Das ist aber trivial.

2.3.1.4. Satz. *Es sei $(J_e)_{e \geqq e_0}$ sei eine Kette von Erweiterungen in $\{p \cdot H_e\}_e$, d. h., es sei stets $J_{e+1} \mid p \cdot H_e = J_e$. Dann gibt es ein $e_1 \geqq e_0$, so daß $\{J_e\}_{e \geqq e_1}$ eine Kette minimaler Erweiterungen ist (d. h., J_{e+1} ist minimale Erweiterung von J_e).*