

## Werk

**Titel:** 2.2. Charakterisierung von Deformationen durch Gleichungen

**Jahr:** 1976

**PURL:** [https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?301416052\\_0005|log24](https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?301416052_0005|log24)

## Kontakt/Contact

[Digizeitschriften e.V.](#)  
SUB Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen

✉ [info@digizeitschriften.de](mailto:info@digizeitschriften.de)

zwei Deformationen  $A' \rightarrow P', A \rightarrow P$  und erhalten eine Abbildung

$$\left. \begin{array}{l} D_{\mathcal{P}}(A'') \xrightarrow{\Phi} D_{\mathcal{P}'}(B), \\ P'' \mapsto Q \end{array} \right\} \text{ (falls } P' \otimes_{A'} A \simeq P \text{ ist),}$$

bei der  $\Phi(P'')$  im Urbild von  $(P', P'') \in D_{\mathcal{P}_0}(A') \times_{D_{\mathcal{P}_0}(A)} D_{\mathcal{P}_0}(A'')$  liegt.  $\Phi$  konstruieren wir wie folgt: Ist  $P'' \in D^1(P | A'', J \otimes_{A'} P)$ , so ist  $0 \rightarrow JP'' \rightarrow P'' \rightarrow P \rightarrow 0$  exakt, daher

$$0 \rightarrow JP'' \rightarrow P' \times_{\mathcal{P}} P'' \rightarrow P' \rightarrow 0,$$

und aus

$$JP'' \simeq J \otimes_{A'} P \simeq J \otimes_{A'} (P' \otimes_{A'} A) \simeq J \otimes_{A'} P' \simeq J \otimes_B P'$$

folgt, daß  $Q := P' \otimes_{\mathcal{P}} P'' \in D^1(P' | B, J \otimes_B P')$  ist. Da bei

$$D^1(P | A'', J \otimes_{A'} P) \rightarrow D^1(P' | B, J \otimes_B P')$$

Nebenklassen mod  $D^1(P | A, J \otimes_{A'} P)$  in Nebenklassen mod  $D^1(P' | A', J \otimes_B P')$  übergehen, folgt mit 2.1.7. leicht die Existenz von  $\Phi$ .

Ebenso beweist man Eigenschaft (ii) des Kriteriums 2.1.3. und erhält so die Behauptung.

## 2.2. Charakterisierung von Deformationen durch Gleichungen

Für unsere Untersuchungen brauchen wir zunächst ein Flachheitskriterium, dessen Beweis bei BOURBAKI, Algèbre commutative, zu finden ist.

2.2.1. Definition. Es sei  $A$  ein Ring,  $\mathfrak{m}$  ein Ideal von  $A$ . Dann heißt  $M \bmod A$  *idealsepariert* bezüglich  $\mathfrak{m}$ , falls für alle Ideale  $\mathfrak{a}$  von  $A$  gilt:  $\mathfrak{a} \otimes_A M$  ist separiert in der  $\mathfrak{m}$ -adischen Topologie.

2.2.2. Satz. Es sei  $(A, \mathfrak{m})$  ein Noetherscher lokaler Ring,  $A/\mathfrak{m} = k$ , und der  $A$ -Modul  $M$  sei idealsepariert bezüglich  $\mathfrak{m}$ . Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent:

- (i)  $M$  ist  $A$ -flach.
- (ii)  $\text{Tor}_1^A(N, M) = 0$  für alle  $N \in \text{mod } A$  mit  $\mathfrak{m}N = 0$ .
- (ii')  $\text{Tor}_1^A(N, M) = 0$  für alle  $N \in \text{mod } A$ , die durch eine Potenz von  $\mathfrak{m}$  annulliert werden.
- (iii)  $\mathfrak{m} \otimes_A M \rightarrow \mathfrak{m}M$  ist bijektiv.
- (iv) Wenn wir

$$\text{gr}(A) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} \mathfrak{m}^r / \mathfrak{m}^{r+1}, \quad \text{gr}(M) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} \mathfrak{m}^r M / \mathfrak{m}^{r+1} M$$

setzen, so ist die Eigenschaft

(GR) Der kanonische Morphismus  $\text{gr}(A) \otimes_{\text{gr}(A)} \text{gr}_0(M) \rightarrow \text{gr}(M)$  ist bijektiv erfüllt.

- (v) Für alle  $n \geq 1$  ist  $M/\mathfrak{m}^n M$  flacher  $A/\mathfrak{m}^n$ -Modul.

Aus dem Satz erhalten wir leicht:

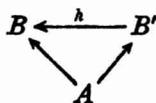
2.2.3. Korollar: Ist  $f: A \rightarrow B$  ein lokaler Homomorphismus lokaler Noetherscher Ringe, so ist  $f$  flach genau dann, wenn  $\mathfrak{m}_A \otimes_A B \rightarrow B$  injektiv ist.

**Beweis.** Zu zeigen ist  $(\Leftarrow)$ , wofür nach dem Satz  $((i) \Leftrightarrow (iii))$  hinreichend ist, daß  $B$  idealsepariert bezüglich  $\mathfrak{m}_A$  ist.  $\mathfrak{a} \subseteq A$  sei ein Ideal; zu zeigen ist, daß  $N = \mathfrak{a} \otimes_A B$  separiert in der  $\mathfrak{m}_A$ -adischen Topologie ist.

Nun ist  $N$  von endlichem Typ über  $B$ , daher in der  $\mathfrak{m}_B$ -adischen Topologie separiert (Krullscher Durchschnittssatz), also erst recht in der  $\mathfrak{m}_A$ -adischen ( $\mathfrak{m}_A B \subseteq \mathfrak{m}_B$ , q. e. d.

Wir betrachten von nun an wieder eine beliebige der drei in der Einleitung genannten Kategorien  $\mathcal{E}$  über  $k$  und bezeichnen mit  $k\langle X_1, \dots, X_n \rangle$  die von den  $n$  Unbestimmten  $X_i$  erzeugte freie Algebra dieser Kategorie.

2.2.4. Satz. Es sei



ein kommutatives Diagramm in  $\mathcal{E}$ . Dann gilt:

- (i) Ist  $h \otimes_A k$  surjektiv, so ist  $h$  surjektiv.
- (ii) Ist  $h \otimes_A k$  injektiv und  $B$  über  $A$  flach, so ist  $h$  injektiv.

**Beweis.** (i) Die Surjektion  $B'/\mathfrak{m}_A B' \rightarrow B/\mathfrak{m}_A B$  liefert bei Faktorisierung nach  $\mathfrak{m}_B$

$$k = B'/\mathfrak{m}_B \twoheadrightarrow B/\mathfrak{m}_B,$$

daher  $B/\mathfrak{m}_B B = k$ , d. h.  $\mathfrak{m}_B B = \mathfrak{m}_B$ , also

$$h(\mathfrak{m}_{B'}) \equiv \mathfrak{m}_B \pmod{\mathfrak{m}_B^2},$$

d. h.  $h$  surjektiv, also auch  $k$ .

(ii) Ist  $B$  flach über  $A$ , so ist nach dem vorigen Satz (wobei jede der Graduierungen die  $\mathfrak{m}_A$ -adische sei)

$$\gamma_B: \text{gr}(A) \otimes_k B/\mathfrak{m}_A B \xrightarrow{\sim} \text{gr}(B).$$

**Behauptung a):**  $\text{gr}(h)$  ist injektiv.

**Behauptung b):**  $\text{gr}(h)$  injektiv  $\Rightarrow h$  injektiv.

**Zu a).** Wir haben

$$\begin{array}{ccc} \text{gr}(A) \otimes_k B'/\mathfrak{m}_A B' & \xrightarrow{1 \otimes \text{gr}_0(h)} & \text{gr}(A) \otimes_k B/\mathfrak{m}_A B \\ \downarrow \gamma_{B'} & & \downarrow \gamma_B \\ \text{gr}(B') & \xrightarrow{\text{gr}(h)} & \text{gr}(B) \end{array}$$

und da  $\gamma_B$  bijektiv,  $1 \otimes \text{gr}_0(h)$  injektiv ist, folgt  $\text{gr}(h)$  injektiv, q. e. d.

**Zu b).** Vorbemerkung.  $h^{-1}(\mathfrak{m}_A^v B) = \mathfrak{m}_A^v B'$

**Beweis.** Zu zeigen ist die Inklusion  $\subseteq$ . Da  $\text{gr}(h)$  injektiv ist, folgt

$$\mathfrak{m}_A^v B' \cap h^{-1}(\mathfrak{m}_A^{v+1} B) \subseteq \mathfrak{m}_A^{v+1} B'$$

und induktiv nach  $k \geq 0$

$$\mathfrak{m}_A^{v-k} B' \cap h^{-1}(\mathfrak{m}_A^{v+1} B) \subseteq \mathfrak{m}_A^{v+1} B'. \tag{*}$$

So ergibt (\*) für  $k = v$

$$h^{-1}(\mathfrak{m}_A^{v+1} B) \subseteq \mathfrak{m}_A^{v+1} B',$$

q. e. d. Nun gilt nach der Vorbemerkung

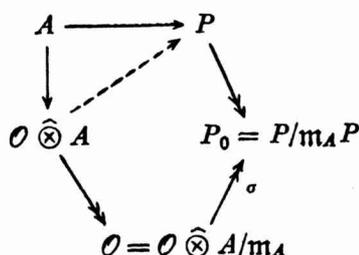
$$h^{-1}(0) \subseteq \bigcap h^{-1}(\mathfrak{m}_A^r B) = \bigcap \mathfrak{m}_A^r B' = 0,$$

daher ist  $h$  injektiv, q. e. d.

2.2.5. Korollar. In der Kategorie  $\mathcal{E}$  ist ein Morphismus  $h: B' \rightarrow B$  von  $A$ -Algebren in eine flache  $A$ -Algebra  $B$  genau dann ein Isomorphismus, wenn der induzierte Morphismus der speziellen Fasern über  $A$  ein Isomorphismus ist.

2.2.6. Satz. Es sei  $(\varphi: A \rightarrow P, P/\mathfrak{m}_A P \simeq P_0)$  eine Deformation von  $A$ , und es sei eine Einbettung von  $P_0$  durch  $P_0 = k(X_1, \dots, X_n)/I_0$  gegeben;  $k(X_1, \dots, X_n) =: \mathcal{O}$ . Dann gilt:

(i) Es existiert eine Fortsetzung der Einbettung von  $P_0$  zu einer Einbettung von  $\mathcal{O} \hat{\otimes} A$ , d. h.



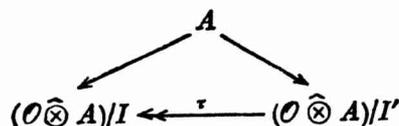
(ii) Es sei  $I = \ker \psi$  und  $I_0 = (f_1, \dots, f_d)$ . Sind dann  $F_1, \dots, F_d \in I$  und  $F_i \equiv f_i \pmod{\mathfrak{m}_A(\mathcal{O} \hat{\otimes} A)}$ , so ist  $I = (F_1, \dots, F_d)$ .

(iii) Es sei  $\varphi$  ein beliebiger Morphismus, der obigem Diagramm genügt und für den  $I = \ker \psi$ ,  $I_0 = \ker \sigma$  durch jeweils ein bestimmtes Erzeugendensystem mit (ii) gegeben sind. Dann ist  $\varphi$  Deformation von  $P_0$  (d. h. flach) genau dann, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

Sind  $p_i \in \mathcal{O}$  mit  $\sum_{i=1}^d p_i f_i = 0$  auf  $P_0$ , so existieren  $P_i \in \mathcal{O} \hat{\otimes} A$  mit  $P_i \equiv p_i \pmod{\mathfrak{m}_A(\mathcal{O} \hat{\otimes} A)}$  und  $\sum_{i=1}^d P_i F_i = 0$  auf  $P$ .

Beweis. (i) Die Existenz von  $\psi$  ist klar, die Surjektivität folgt dann aus dem letzten Satz (i).

(ii) Ist  $I' = (F_1, \dots, F_d) \subseteq I$ , so haben wir



und nach dem letzten Korollar ist  $\tau$  Isomorphismus, d. h.  $I' = I$ .

(iii) Vorbemerkung  $E' \subseteq E \pmod A$  sei ein Untermodul,  $E/E'$  flach über  $A$ ,  $\mathfrak{a} \subseteq A$  ein Ideal; dann gilt

$$\mathfrak{a}E' = E' \cap \mathfrak{a}E \text{ (Beweis trivial).}$$

Daraus folgt leicht:

$$\varphi: P \leftarrow A \text{ ist flach} \Leftrightarrow I \cap (\mathfrak{m}_A \cdot \mathcal{O} \hat{\otimes} A) = \mathfrak{m}_A \cdot I. \quad (*)$$