zwei Deformationen $A' \to P'$, $A \to P$ und erhalten eine Abbildung

$$\left.\begin{array}{c} D_p(A'') \xrightarrow{\Phi} D_{p'}(B), \\ P'' \mapsto Q \end{array}\right\} \quad (\text{falls } P' \otimes_{A'} A \simeq P \text{ ist}),$$

bei der $\Phi(P'')$ im Urbild von $(P', P'') \in D_{P_0}(A') \times_{D_{P_0}(A)} D_{P_0}(A'')$ liegt. Φ konstruieren wir wie folgt: Ist $P'' \in D^1(P \mid A'', J \otimes_A P)$, so ist $0 \to JP'' \to P'' \to P \to 0$ exakt, daher

$$0 \to JP'' \to P' \times_p P'' \to P' \to 0,$$

und aus

$$JP'' \simeq J \otimes_A P \simeq J \otimes_A (P' \otimes_{A'} A) \simeq J \otimes_{A'} P' \simeq J \otimes_B P'$$

folgt, daß $Q := P' \otimes_p P'' \in D^1(P' \mid B, J \otimes_B P')$ ist. Da bei

$$D^1(P \mid A'', J \otimes_{A''} P) \to D^1(P' \mid B, J \otimes_B P')$$

Nebenklassen $\mod D^1(P \mid A, J \otimes_A P)$ in Nebenklassen $\mod D^1(P' \mid A', J \otimes_B P')$ übergehen, folgt mit 2.1.7. leicht die Existenz von Φ.
Ebenso beweist man Eigenschaft (ii) des Kriteriums 2.1.3. und erhält so die Behauptung.

2.2. Charakterisierung von Deformationen durch Gleichungen

Für unsere Untersuchungen brauchen wir zunächst ein Flachheitskriterium, dessen Beweis bei Bourbaki, Algèbre commutative, zu finden ist.

2.2.1. Definition. Es sei A ein Ring, $\mathfrak{m}$ ein Ideal von A. Dann heißt M mod A *idealsepariert* bezüglich $\mathfrak{m}$, falls für alle Ideale $\mathfrak{a}$ von A gilt: $\mathfrak{a} \otimes_A M$ ist separiert in der $\mathfrak{m}$-adischen Topologie.

2.2.2. Satz. *Es sei $(A, \mathfrak{m})$ ein Noetherscher lokaler Ring, $A/\mathfrak{m} = k$, und der A-Modul M sei idealsepariert bezüglich $\mathfrak{m}$. Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent:*

(i) *M ist A-flach.*

(ii) $\mathrm{Tor}_1^A(N, M) = 0$ *für alle* $N \in \mathrm{mod}\, A$ *mit* $\mathfrak{m}N = 0$.

(ii') $\mathrm{Tor}_1^A(N, M) = 0$ *für alle* $N \in \mathrm{mod}\, A$, *die durch eine Potenz von* $\mathfrak{m}$ *annulliert werden.*

(iii) $\mathfrak{m} \otimes_A M \to \mathfrak{m}M$ *ist bijektiv.*

(iv) *Wenn wir*

$$\mathrm{gr}(A) = \bigoplus_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{m}^\nu/\mathfrak{m}^{\nu+1}, \qquad \mathrm{gr}(M) = \bigoplus_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{m}^\nu M/\mathfrak{m}^{\nu+1}M$$

setzen, so ist die Eigenschaft
(GR) *Der kanonische Morphismus*
$$\mathrm{gr}(A) \otimes_{\mathrm{gr}_0(A)} \mathrm{gr}_0(M) \to \mathrm{gr}(M) \text{ ist bijektiv}$$
erfüllt.

(v) *Für alle $n \geqq 1$ ist $M/\mathfrak{m}^n M$ flacher $A/\mathfrak{m}^n$-Modul.*

Aus dem Satz erhalten wir leicht:

2.2.3. Korollar: *Ist $f : A \to B$ ein lokaler Homomorphismus lokaler Noetherscher Ringe, so ist f flach genau dann, wenn $\mathfrak{m}_A \otimes_A B \to B$ injektiv ist.*

Beweis. Zu zeigen ist ($\Leftarrow$), wofür nach dem Satz ((i) $\Leftrightarrow$ (iii)) hinreichend ist, daß B idealsepariert bezüglich $\mathfrak{m}_A$ ist. $\mathfrak{a} \subseteqq A$ sei ein Ideal; zu zeigen ist, daß $N = \mathfrak{a} \otimes_A B$ separiert in der $\mathfrak{m}_A$-adischen Topologie ist.
Nun ist N von endlichem Typ über B, daher in der $\mathfrak{m}_B$-adischen Topologie separiert (Krullscher Durchschnittssatz), also erst recht in der $\mathfrak{m}_A$-adischen ($\mathfrak{m}_A B \subseteqq \mathfrak{m}_B$, q. e. d.

Wir betrachten von nun an wieder eine beliebige der drei in der Einleitung genannten Kategorien $\mathscr{C}$ über k und bezeichnen mit $k\langle X_1, \ldots, X_n\rangle$ die von den n Unbestimmten X_i erzeugte freie Algebra dieser Kategorie.

2.2.4. **Satz.** *Es sei*

$$\begin{tikzcd} B & & B' \arrow[ll, "h"'] \\ & A \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm in $\mathscr{C}$. Dann gilt:

(i) *Ist $h \otimes_A k$ surjektiv, so ist h surjektiv.*

(ii) *Ist $h \otimes_A k$ injektiv und B über A flach, so ist h injektiv.*

Beweis. (i) Die Surjektion $B'/\mathfrak{m}_A B' \to B/\mathfrak{m}_A B$ liefert bei Faktorisierung nach $\mathfrak{m}_{B'}$

$$k = B'/\mathfrak{m}_{B'} \twoheadrightarrow B/\mathfrak{m}_{B'} B,$$

daher $B/\mathfrak{m}_{B'} B = k$, d. h. $\mathfrak{m}_{B'} B = \mathfrak{m}_B$, also

$$h(\mathfrak{m}_{B'}) \equiv \mathfrak{m}_B \bmod \mathfrak{m}_B^2,$$

d. h. h surjektiv, also auch k.
(ii) Ist B flach über A, so ist nach dem vorigen Satz (wobei jede der Graduierungen die $\mathfrak{m}_A$-adische sei)

$$\gamma_B \colon \operatorname{gr}(A) \otimes_k B/\mathfrak{m}_A B \xrightarrow{\sim} \operatorname{gr}(B).$$

Behauptung a): $\operatorname{gr}(h)$ ist injektiv.
Behauptung b): $\operatorname{gr}(h)$ injektiv $\Rightarrow h$ injektiv.
Zu a). Wir haben

$$\begin{tikzcd} \operatorname{gr}(A) \otimes_k B'/\mathfrak{m}_A B' \arrow[r, "1 \otimes \operatorname{gr}_0(h)"] \arrow[d, "\gamma_{B'}"] & \operatorname{gr}(A) \otimes_k B/\mathfrak{m}_A B \arrow[d, "\gamma_B"] \\ \operatorname{gr}(B') \arrow[r, "\operatorname{gr}(h)"'] & \operatorname{gr}(B) \end{tikzcd}$$

und da γ_B bijektiv, $1 \otimes \operatorname{gr}_0(h)$ injektiv ist, folgt $\operatorname{gr}(h)$ injektiv, q. e. d.
Zu b). **Vorbemerkung.** $h^{-1}(\mathfrak{m}_A^\nu B) = \mathfrak{m}_A^\nu B'$
Beweis. Zu zeigen ist die Inklusion $\subseteqq$. Da $\operatorname{gr}(h)$ injektiv ist, folgt

$$\mathfrak{m}_A^\nu B' \cap h^{-1}(\mathfrak{m}_A^{\nu+1} B) \subseteqq \mathfrak{m}_A^{\nu+1} B'$$

und induktiv nach $k \geqq 0$

$$\mathfrak{m}_A^{\nu-k} B' \cap h^{-1}(\mathfrak{m}_A^{\nu+1} B) \subseteqq \mathfrak{m}_A^{\nu+1} B'. \tag{$*$}$$

So ergibt ($*$) für $k = \nu$

$$h^{-1}(\mathfrak{m}_A^{\nu+1} B) \subseteqq \mathfrak{m}_A^{\nu+1} B',$$

q. e. d. Nun gilt nach der Vorbemerkung

$$h^{-1}(0) \subseteqq \bigcap_\nu h^{-1}(\mathfrak{m}_A^\nu B) = \bigcap_\nu \mathfrak{m}_A^\nu B' = 0,$$

daher ist h injektiv, q. e. d.

2.2.5. Korollar. *In der Kategorie $\mathscr{C}$ ist ein Morphismus $h\colon B' \to B$ von A-Algebren in eine flache A-Algebra B genau dann ein Isomorphismus, wenn der induzierte Morphismis der speziellen Fasern über A ein Isomorphismus ist.*

2.2.6. Satz. *Es sei $(\varphi\colon A \to P, P/\mathfrak{m}_A P \simeq P_0)$ eine Deformation von A, und es sei eine Einbettung von P_0 durch $P_0 = k\langle X_1, \ldots, X_n\rangle/I_0$ gegeben; $k\langle X_1, \ldots, X_n\rangle =: \mathcal{O}$. Dann gilt:*

(i) *Es existiert eine Fortsetzung der Einbettung von P_0 zu einer Einbettung von $\mathcal{O} \mathbin{\hat{\otimes}} A$, d. h.*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr] \arrow[d] & & P \arrow[d] \\
\mathcal{O} \mathbin{\hat{\otimes}} A \arrow[urr, dashed] \arrow[dr] & & P_0 = P/\mathfrak{m}_A P \\
& \mathcal{O} = \mathcal{O} \mathbin{\hat{\otimes}} A/\mathfrak{m}_A \arrow[ur, "\sigma"'] &
\end{tikzcd}$$

(ii) *Es sei $I = \ker\psi$ und $I_0 = (f_1, \ldots, f_d)$. Sind dann $F_1, \ldots, F_d \in I$ und $F_i \equiv f_i \bmod \mathfrak{m}_A(\mathcal{O} \mathbin{\hat{\otimes}} A)$, so ist $I = (F_1, \ldots, F_d)$.*

(iii) *Es sei φ ein beliebiger Morphismus, der obigem Diagramm genügt und für den $I = \ker\psi$, $I_0 = \ker\sigma$ durch jeweils ein bestimmtes Erzeugendensystem mit* (ii) *gegeben sind. Dann ist φ Deformation von P_0 (d. h. flach) genau dann, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:*

Sind $p_i \in \mathcal{O}$ mit $\sum_{i=1}^{d} p_i f_i = 0$ auf P_0, so existieren $P_i \in \mathcal{O} \mathbin{\hat{\otimes}} A$ mit $P_i \equiv p_i \bmod \mathfrak{m}_A(\mathcal{O} \mathbin{\hat{\otimes}} A)$ und $\sum_{i=1}^{d} P_i F_i = 0$ auf P.

Beweis. (i) Die Existenz von ψ ist klar, die Surjektivität folgt dann aus dem letzten Satz (i).

(ii) Ist $I' = (F_1, \ldots, F_d) \subseteqq I$, so haben wir

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
(\mathcal{O} \mathbin{\hat{\otimes}} A)/I & & (\mathcal{O} \mathbin{\hat{\otimes}} A)/I' \arrow[ll, two heads, "\tau"']
\end{tikzcd}$$

und nach dem letzten Korollar ist τ Isomorphismus, d. h. $I' = I$.

(iii) Vorbemerkung $E' \subseteqq E$ mod A sei ein Untermodul, E/E' flach über A, $\mathfrak{a} \subseteqq A$ ein Ideal; dann gilt

$\mathfrak{a}E' = E' \cap \mathfrak{a}E$ (Beweis trivial).

Daraus folgt leicht:

$$\varphi\colon P \leftarrow A \text{ ist flach} \Leftrightarrow I \cap (\mathfrak{m}_A \cdot \mathcal{O} \mathbin{\hat{\otimes}} A) = \mathfrak{m}_A \cdot I. \qquad (*)$$