Dieses Kapitel gibt einen Überblick über die Fälle, für die das genannte Existenzproblem bereits gelöst werden konnte. Es zeigt sich, daß die Aufgabenstellung nur dann sinnvoll ist, wenn X_0 im ausgezeichneten Punkt eine isolierte Singularität besitzt.
Am einfachsten ist die Lösung für die Kategorie $\mathscr{C}$ der kompletten lokalen k-Algebren. Für sie wurde die Existenz einer semiuniversellen Deformation bereits 1968 durch SCHLESSINGER bewiesen. Als schwieriger erwies sich die Behandlung der anderen Fälle. Für den analytischen gab 1969 TJURINA eine Teillösung, und erst 1972 gab GRAUERT den allgemeinen Beweis. Im Henselschen Fall gibt es schließlich eine Teillösung von KURKE (1972) und einen allgemeinen Beweis von ELKIK (1973), der hier nicht mehr berücksichtigt wurde.

2.1. Formale Existenzfragen

Wir fixieren einen lokalen Noetherschen Ring Λ mit dem Maximalideal e und dem Restklassenkörper k. Über Λ betrachten wir die Kategorie $\mathscr{C}$ der lokalen artinschen Λ-Algebren mit vorgegebenem Restklassenkörper k.
Weiter sei ein Funktor

$$D\colon \mathscr{C} \to \mathrm{Ens}$$

gegeben, für den $D(k) = \{\zeta_0\}$ einelementig ist. Für $A \in \mathscr{C}$ nennen wir $D(A)$ die *Menge der Deformationen von* A. Ist $(\varphi\colon A \to A') \in \mathrm{Fl}(\mathscr{C})$, $\zeta \in D(A)$, $\zeta' \in D(A')$ und $D(\varphi)\,\zeta = \zeta'$, so charakterisieren wir diesen Sachverhalt durch die Schreibweise

$$(A, \zeta) \to (A', \zeta').$$

Ist nun B eine beliebige komplette Noethersche lokale Λ-Algebra, so ist $B/\mathfrak{m}^n \in \mathscr{C}$ für $n \in \mathsf{N}$, und man kann für (η_n) und $\operatorname*{lim\text{-}proj}_n\,(B/\mathfrak{m}^{n+1})$ auf natürliche Weise Morphismen

$$(B, (\eta_n)) \to (A, \zeta)$$

durch die Λ-Homomorphismen $B \to A$ erklären.

2.1.1. Definition. $(B, (\eta_n))$ heißt *formale semiuniverselle Deformation* (für D), falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(UD 1) Jede Deformation (A, ζ) wird durch ein

$$(B, (\eta_n)) \to (A, \zeta)$$

induziert, und jedes Diagramm

$$\begin{tikzcd} & (A', \xi) \arrow[d] \\ (B, (\eta_n)) \arrow[ur, dashed] \arrow[r] & (A'/I, \bar{\xi}) \end{tikzcd}$$

läßt sich zu einem kommutativen Diagramm ergänzen ($A' \to A'/I$ der kanonische Homomorphismus).

(UD 2) Es sei $k[t] = k[T]/(T^2)$. Der kanonische Homomorphismus
$\mathrm{Hom}_\Lambda(B, k[t]) \to D(k[t])$,

$\varphi \to D(\varphi)\,(\eta_n)$,

ist bijektiv.

2.1.2. Bemerkung. Für ein Paar $(B, (\eta_n))$ ist (UD 1) äquivalent mit folgender Eigenschaft („Glattheit"): Es sei $H = \mathrm{Hom}_\Lambda(B, \square)$, $H \to D$ die durch (η_n) vermittelte natürliche Transformation von Funktoren. Dann ist für surjektive Homomorphismen $(A' \twoheadrightarrow A) \in \mathrm{Fl}(\mathscr{C})$ die kanonische Abbildung

$$H(A') \to H(A) \times_{D(A)} D(A')$$

stets surjektiv.

Der folgende Satz liefert uns ein handliches Kriterium dafür, wann der Funktor D eine formale semiuniverselle Deformation besitzt. Zum Beweis verweisen wir auf die Literatur ([22]).

2.1.3. Satz (M. Schlessinger). *D besitzt genau dann eine formale semiuniverselle Deformation, wenn für jedes Diagramm*

$$A' \to A \leftarrow A''$$

in $\mathscr{C}$ die kanonische Abbildung

(*) $\qquad D(A' \times_A A'') \to D(A') \times_{D(A)} D(A'')$

(i) $\qquad$ *surjektiv ist für Surjektionen $A'' \twoheadrightarrow A$ in $\mathscr{C}$,*

(ii) $\qquad$ *bijektiv ist für $A'' = k[t]$ und $A = k$,*

(iii) $\qquad \dim_k(D(k[t])) < \infty$.

D ist genau dann prodarstellbar durch eine komplette lokale Noethersche Λ-Algebra, wenn in (i) die kanonische Abbildung (*) stets bijektiv ist.

Wir bemerken, daß nach Eigenschaft (ii) eine k-Vektorraumstruktur auf $D(k[t])$ induziert wird. Wir betrachten jetzt den folgenden Fall: Es sei P_0 eine lokale Noethersche k-Algebra, und für $A \in \mathscr{C}$ sei $D(A)$ die Menge der Paare (φ, ψ), $\varphi: A \to P$ eine flache A-Algebra, $\psi: P \otimes_A k \xrightarrow{\sim} P_0$ ein Isomorphismus.

Unser Ziel ist es, für D eine formale semiuniverselle Deformation zu konstruieren, dazu haben wir die Eigenschaften (i) bis (iii) des Schlessinger-Kriteriums zu überprüfen. Technisches Hilfsmittel ist eine Kohomologietheorie für Algebren. Wir verzichten auf die (ohnehin nicht schwierigen) Beweise der folgenden Sätze (vgl. [20]).

Wir fixieren einen Ring A und eine A-Algebra C, die im wesentlichen von endlichem Typ über A ist. Für einen C-Modul N (von endlichem Typ) bilden wir nun einen Komplex D^*.

2.1.4. Definition/Satz.

$$D^*(C \mid A, N) := H^*((\mathrm{Hom}_C(L_i, N))^*)$$

mit $C = F/I$, F glatte A-Algebra,

$$\cdots \to L_2 \to L_1 \to I/I^2 \to 0$$

eine projektive Auflösung in mod C, $L_0 =: \Omega_{F/A} \otimes_A C$ und

$$L_1 \to L_0 := L_1 \to I/I^2 \to \Omega_{F/A} \otimes_A C.$$

Dabei hängt D^* nicht von der Wahl der Auflösung ab sowie von der Wahl von F.

Die konkrete Bedeutung der einzelnen Kohomologiegruppen D^i ergibt sich aus folgendem

2.1.5. Satz.

(i) $D^0(C \mid A, N) = \mathrm{Der}_A(C, N)$,

(ii) $D^1(C \mid A, N) = \mathrm{Hom}_C(I/I^2, N)/\mathrm{Der}_A(F, N)$,

(iii) $D^{i+1}(C \mid A, N) = \mathrm{Ext}^i_C(I/I^2, N)$ für $i = 1$,

(iv) *Ist $A = k$ und $C \mid k$ glatt, so ist*

$$D^i(C \mid A, N) = 0 \quad \textit{für } i > 0.$$

2.1.6. Satz.

(i) $D^1(C \mid A, N)$ *klassifiziert die Erweiterungen* $0 \to N \to E \to C \to 0$ *der A-Algebra C mit dem C-Modul N.*

(ii) $D^0(C \mid A, N)$ *ist die Automorphismengruppe der Erweiterungen von C durch N.*

Zum Beweis bemerken wir, daß für jede Erweiterung von C mit N stets $N^2 = 0$ ist ($N = C \cdot N = N/N^2$).
Ist nun, wie in 1.4., $C = F/I$, so gibt es einen A-Algebrahomomorphismus φ mit kommutativem Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F/I^2 & \xrightarrow{\varphi} & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ F/I = C & \xrightarrow{\mathrm{id}} & C = E/N \end{array}$$

der durch eine gegebene Erweiterung bis auf eine Derivation $F/I^2 \to N$ eindeutig bestimmt ist. Wir ordnen dann dieser Erweiterung die Klasse von φ in $\mathrm{Hom}_C(I/I^2, N)/\mathrm{Der}_A(F, N)$ zu und erhalten leicht (i).

2.1.7. Satz. *Es sei $A = B/J$, $J^2 = 0$, und wir fixieren eine flache A-Algebra P. Ist weiter*

$$D_P(B) = \{(B \to Q, Q \otimes_B A \simeq P) \quad \textit{mit} \quad B \to Q \textit{ flach}\}$$

und $N =: J \otimes_B P$, so gilt:

$$D_P(B) = \begin{cases} \Phi \\ \textit{oder} \\ \textit{Nebenklasse der Untergruppe } D^1(P \mid A, N) \textit{ in } D^1(P \mid B, N). \end{cases}$$

Dabei gilt noch:

$\psi \in \mathrm{Hom}_P(I/I^2, N)$ *definiert ein Element von D_P genau dann, wenn* (*)
$\psi(af) = (a \otimes 1) f$ *für $a \in J$ und $f \in F/I^2$*
gilt.

Dabei sei $F \mid B$ glatt, $F/I = P$, und damit sofort $J \cdot F \subseteq I$ (P ist A-Algebra).

Beweis. Aus (*) folgt sofort: $D_P(B) = \Phi$ oder Nebenklasse mod $D^1(P \mid A, N)$. Sind dann $\psi_1, \psi_2 \colon I/I^2 \to N$ zwei P-Modulhomomorphismen, die Erweiterungen von P mit N über B definieren, so ist die Differenz $\psi_1 - \psi_2$ ein A-Modulhomomorphismus, d. h., diese Erweiterung ist über A definiert.
Wir zeigen also (*): Wegen $P \simeq Q \otimes_B A \simeq Q/JQ$ definiert ein Element aus $D_P(B)$ eine Erweiterung

$$0 \to JQ \to Q \to P \to 0$$

mit $JQ = N$ (da $N = J \otimes_B P = J \otimes_B Q/JQ = J \otimes_B Q$ ist); es sei $\psi \in \mathrm{Hom}_P(I/I^2, N)$ ein Repräsentant in $D^1(P/B, N)$. Die Eigenschaft $\psi(af) = (a \otimes 1) f$ für $a \in J$ folgt nun aus

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N = JQ \arrow[r] & Q \arrow[r] & P = F/I \arrow[r] & 0 \\ & I/I^2 \arrow[u, "\psi"] \arrow[r, hook] & F/I^2 \arrow[u] & & \end{tikzcd}$$

Ist umgekehrt ψ gegeben, so definiert es eine Erweiterung und damit eine B-Algebra Q. Zu zeigen ist, daß Q flach ist. (Denn wegen $N = J \cdot Q$ ist $Q \otimes_B A \simeq P$ trivial.) Nun gilt:

(i) $\quad \mathrm{Tor}_B^1(Q, A) = 0,$

da $J \cdot Q = N = J \otimes_B P = J \otimes_B Q/JQ = J \otimes_B Q$ ist,

(ii) $\quad \mathrm{Tor}_B^1(Q, M) = 0 \quad$ für $M \in \mathrm{mod}\, A$,

da P flach über A ist.
Ist M ein beliebiger B-Modul, so ist

$$0 \to JM \to M \to M/JM \to 0$$

exakt, und die äußeren Moduln sind A-Moduln, also nach (ii)

$$\mathrm{Tor}_B^1(R, M) = 0,$$

q. e. d.

2.1.8. Korollar. *Es gibt eine kanonische Bijektion*

$$D^1(P \mid A, J \otimes_A P) \simeq D_P(A \oplus J).$$

Für $A = k$ liefert dies

$$D^1(P_0 \mid k, P_0) \simeq D_{P_0}(k[t]).$$

2.1.9. Korollar. *Ist $P_0 \mid k$ glatt, so gibt es genau eine Deformation von P_0 über B.*
Die wichtigste Anwendung ist das folgende

2.1.10. Korollar. *Es sei $P_0 \mid k$ gegeben, und P_0 besitze nur isolierte Singularitäten. Dann hat $D = D_{P_0}$ eine formale semiuniverselle Deformation.*

Vorbemerkung zum Beweis. Die Eigenschaft, daß P_0 nur isolierte Singularitäten besitzt, ist lediglich zum Beweis der Eigenschaft (iii) des Schlessinger-Kriteriums erforderlich. Nach Korollar 2.1.8. ist

$$D(k[t]) \simeq D^1(P_0 \mid k, P_0),$$

D^1 ist aber funktoriell in P_0 und definiert eine quasikohärente Garbe über P_0 (im Fall, daß P_0 eine lokale analytische Algebra ist, definiert man D^1 nicht durch glatte P_0-Algebren, sondern durch freie analytische Algebren). Nach 2.1.5. (iv) ist diese Garbe auf den singulären Ort konzentriert, ihre Schnitte über P_0 bilden daher einen endlichdimensionalen Vektorraum über k.

Beweis von 2.1.10.

(i) Ist $A' \to A \leftarrow A''$ ein Diagramm von Artinalgebren, wobei o. B. d. A. $A = A''/J$ mit $J^2 = 0$ ist, $B = A' \times_A A''$, so ist $B/J = A'$ ($x \in J \Leftrightarrow (0, x) \in B$). Wir fixieren