$H^0(M, \Theta^{(n)}) \to H^0(M, \Theta)$ surjektiv für alle n im Fall $\mathcal{M} \to T$ und $f: (S, o) \to (T, o)$ gegeben, so ist dies auch richtig im Fall $\mathcal{M} \times_f S \to S$.
Insbesondere folgt daraus: $H^0(M, \Theta^{(n)}) \to H_d(M, \Theta)$ ist surjektiv für alle n und für jede Familie $M \to S$, wenn dies insbesondere für eine semiuniverselle Familie gilt.
Ist weiterhin $H^0(M, \mathcal{V}^{(n)}) \to H^0(M, \mathcal{V}^{(n-1)})$ surjektiv für jede Familie, so ist auch $H^0(M, \Theta^{(n)}) \to H^0(M, \Theta)$ surjektiv für jede Familie; denn wäre letzteres für eine Familie $M \to S$ nicht richtig und φ ein nicht liftbares Vektorfeld, so wäre für $T = S \times C$ das Vektorfeld $p_2 p_1^*(\varphi)$ nicht liftbar bezüglich der Familie $M \times T \to T$ und $p_2 p_1^*(\varphi)|_M = 0$, d. h., $H^0(M, \underline{\mathcal{V}}^{(n)}) \to H^0(M, \mathcal{V}^{(n-1)})$, wäre nicht überall surjektiv für $M \times_{p_1} T \to T$.

1.5.5. Korollar (Douady): *Ist $H^0(M, \Theta) = 0$, so ist der Parameterraum jeder semiuniversellen Deformation ein lokaler Modulraum für M.*

Bemerkung. Unter Benutzung des Grauertschen Satzes ([4], S. 63) kann man leicht folgendes Theorem beweisen:

1.5.6. Theorem. *Ist der Kuranishi-Raum reduziert, so ist die Bedingung*

(1) $\dim_{\mathbb{C}} H^0(M_t, \Theta_t)$ *ist unabhängig von t in einer Umgebung von o*

hinreichend für die Existenz eines lokalen Modulraumes von M.

Von Douady stammt eine Verallgemeinerung des Grauertschen Theorems (nicht publiziert):

1.5.7. Theorem. *Ist der Kuranishi-Raum (B, o) reduziert, so ist $\bigcup_t H^0(M_t, \Theta_t)$, für t in einer gewissen Umgebung von $o \in B$, der Kern eines Vektorbündel-Homomorphismus $\alpha: E_1 \to E_2$ mit $\operatorname{rg} E_1 = \dim H^0(M, \Theta)$.*

Damit kann gezeigt werden, daß die Bedingung (1) im Theorem 3 auch notwendig für die Existenz eines Modulraumes ist; denn wäre $\dim H^0(M_t, \Theta_t)$ abhängig von t nahe o, so gäbe es ein Vektorfeld auf M, das für keine Umgebung von $o \in B$ liftbar wäre. Jedoch hat Griffiths gezeigt, daß eine formale Erweiterung stets eine wirkliche Erweiterung impliziert.

2. Existenz semiuniverseller Deformationen lokaler Henselscher Algebren

Wir behandeln jetzt die Frage nach der Existenz semiuniverseller Deformationen für Keime von Singularitäten. Man kann dieses Problem in verschiedenen Kategorien betrachten: in der Kategorie der formalen Raumkeime, in der Kategorie der analytischen Raumkeime oder in der Kategorie der algebraischen (= Henselschen) Raumkeime.
Henselsche Raumkeime über einem lokalen Henselschen Ring Λ sind durch eine Restklassenalgebra einer Λ-Algebra $\Lambda\langle\langle z_1, \ldots, z_n\rangle\rangle$ gegeben, wobei $\Lambda\langle\langle z_1, \ldots, z_n\rangle\rangle$ die Henselsche Abschließung des Ringes $\Lambda[z_1, \ldots, z_n]$ in $(\mathfrak{m}_\Lambda, z_1, \ldots, z_n)\, \Lambda[z_1, \ldots, z_n]$ ist, was in den meisten Fällen (d. h., wenn der Ring Λ nicht gerade sehr pathologisch ist) gleich der algebraischen Abschließung von $\Lambda[z_1, \ldots, z_n]$ in $\Lambda[[z_1, \ldots, z_n]]$ ist. Für die Theorie der Henselschen Ringe verweisen wir auf Kurke, Pfister und Roczen [20]. Im folgenden sei C eine der drei oben genannten Kategorien: formale Raumkeime (über einem festen kompletten lokalen Ring Λ), analytische Raumkeime (über $\mathbb{C}$), oder Henselsche Raumkeime (über einem lokalen Henselschen Noetherschen Ring).

Dieses Kapitel gibt einen Überblick über die Fälle, für die das genannte Existenzproblem bereits gelöst werden konnte. Es zeigt sich, daß die Aufgabenstellung nur dann sinnvoll ist, wenn X_0 im ausgezeichneten Punkt eine isolierte Singularität besitzt.

Am einfachsten ist die Lösung für die Kategorie $\mathscr{C}$ der kompletten lokalen k-Algebren. Für sie wurde die Existenz einer semiuniversellen Deformation bereits 1968 durch Schlessinger bewiesen. Als schwieriger erwies sich die Behandlung der anderen Fälle. Für den analytischen gab 1969 Tjurina eine Teillösung, und erst 1972 gab Grauert den allgemeinen Beweis. Im Henselschen Fall gibt es schließlich eine Teillösung von Kurke (1972) und einen allgemeinen Beweis von Elkik (1973), der hier nicht mehr berücksichtigt wurde.

2.1. Formale Existenzfragen

Wir fixieren einen lokalen Noetherschen Ring Λ mit dem Maximalideal $\mathfrak{e}$ und dem Restklassenkörper k. Über Λ betrachten wir die Kategorie $\mathscr{C}$ der lokalen artinschen Λ-Algebren mit vorgegebenem Restklassenkörper k.

Weiter sei ein Funktor

$$D\colon \mathscr{C} \to \mathrm{Ens}$$

gegeben, für den $D(k) = \{\zeta_0\}$ einelementig ist. Für $A \in \mathscr{C}$ nennen wir $D(A)$ die *Menge der Deformationen von* A. Ist $(\varphi\colon A \to A') \in \mathrm{Fl}(\mathscr{C})$, $\zeta \in D(A)$, $\zeta' \in D(A')$ und $D(\varphi)\,\zeta = \zeta'$, so charakterisieren wir diesen Sachverhalt durch die Schreibweise

$$(A, \zeta) \to (A', \zeta').$$

Ist nun B eine beliebige komplette Noethersche lokale Λ-Algebra, so ist $B/\mathfrak{m}^n \in \mathscr{C}$ für $n \in \mathbb{N}$, und man kann für (η_n) und $\operatorname*{lim\text{-}proj}_n (B/\mathfrak{m}^{n+1})$ auf natürliche Weise Morphismen

$$(B, (\eta_n)) \to (A, \zeta)$$

durch die Λ-Homomorphismen $B \to A$ erklären.

2.1.1. Definition. $(B, (\eta_n))$ heißt *formale semiuniverselle Deformation* (für D), falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(UD 1) Jede Deformation (A, ζ) wird durch ein

$$(B, (\eta_n)) \to (A, \zeta)$$

induziert, und jedes Diagramm

$$\begin{tikzcd} & (A', \xi) \arrow[d] \\ (B, (\eta_n)) \arrow[ur, dashed] \arrow[r] & (A'/I, \bar{\xi}) \end{tikzcd}$$

läßt sich zu einem kommutativen Diagramm ergänzen ($A' \to A'/I$ der kanonische Homomorphismus).

(UD 2) Es sei $k[t] = k[T]/(T^2)$. Der kanonische Homomorphismus

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(B, k[t]) \to D(k[t]),$$

$$\varphi \to D(\varphi)\,(\eta_n),$$

ist bijektiv.

2.1.2. Bemerkung. Für ein Paar $(B, (\eta_n))$ ist (UD 1) äquivalent mit folgender Eigenschaft („Glattheit"): Es sei $H = \mathrm{Hom}_\Lambda(B, \square)$, $H \to D$ die durch (η_n) vermittelte natürliche Transformation von Funktoren. Dann ist für surjektive Homomorphismen $(A' \twoheadrightarrow A) \in \mathrm{Fl}(\mathscr{C})$ die kanonische Abbildung

$$H(A') \to H(A) \times_{D(A)} D(A')$$

stets surjektiv.

Der folgende Satz liefert uns ein handliches Kriterium dafür, wann der Funktor D eine formale semiuniverselle Deformation besitzt. Zum Beweis verweisen wir auf die Literatur ([22]).

2.1.3. Satz (M. Schlessinger). *D besitzt genau dann eine formale semiuniverselle Deformation, wenn für jedes Diagramm*

$$A' \to A \leftarrow A''$$

in $\mathscr{C}$ die kanonische Abbildung

(*) $\quad D(A' \times_A A'') \to D(A') \times_{D(A)} D(A'')$

(i) $\quad$ *surjektiv ist für Surjektionen $A'' \twoheadrightarrow A$ in $\mathscr{C}$,*

(ii) $\quad$ *bijektiv ist für $A'' = k[t]$ und $A = k$,*

(iii) $\quad \dim_k(D(k[t])) < \infty$.

D ist genau dann prodarstellbar durch eine komplette lokale Noethersche Λ-Algebra, wenn in (i) *die kanonische Abbildung* (*) *stets bijektiv ist.*

Wir bemerken, daß nach Eigenschaft (ii) eine k-Vektorraumstruktur auf $D(k[t])$ induziert wird. Wir betrachten jetzt den folgenden Fall: Es sei P_0 eine lokale Noethersche k-Algebra, und für $A \in \mathscr{C}$ sei $D(A)$ die Menge der Paare (φ, ψ), $\varphi: A \to P$ eine flache A-Algebra, $\psi: P \otimes_A k \xrightarrow{\sim} P_0$ ein Isomorphismus.

Unser Ziel ist es, für D eine formale semiuniverselle Deformation zu konstruieren, dazu haben wir die Eigenschaften (i) bis (iii) des Schlessinger-Kriteriums zu überprüfen. Technisches Hilfsmittel ist eine Kohomologietheorie für Algebren. Wir verzichten auf die (ohnehin nicht schwierigen) Beweise der folgenden Sätze (vgl. [20]).

Wir fixieren einen Ring A und eine A-Algebra C, die im wesentlichen von endlichem Typ über A ist. Für einen C-Modul N (von endlichem Typ) bilden wir nun einen Komplex D^*.

2.1.4. Definition/Satz.

$$D^*(C \mid A, N) := H^*((\mathrm{Hom}_C(L_i, N))^*)$$

mit $C = F/I$, F glatte A-Algebra,

$$\cdots \to L_2 \to L_1 \to I/I^2 \to 0$$

eine projektive Auflösung in mod C, $L_0 =: \Omega_{F/A} \otimes_A C$ und

$$L_1 \to L_0 := L_1 \to I/I^2 \to \Omega_{F/A} \otimes_A C.$$

Dabei hängt D^* nicht von der Wahl der Auflösung ab sowie von der Wahl von F.

Die konkrete Bedeutung der einzelnen Kohomologiegruppen D^i ergibt sich aus folgendem

2.1.5. Satz.

(i) $D^0(C \mid A, N) = \mathrm{Der}_A(C, N)$,

(ii) $D^1(C \mid A, N) = \mathrm{Hom}_C(I/I^2, N)/\mathrm{Der}_A(F, N)$,

(iii) $D^{i+1}(C \mid A, N) = \mathrm{Ext}^i_C(I/I^2, N)$ für $i = 1$,

(iv) *Ist $A = k$ und $C \mid k$ glatt, so ist*

$$D^i(C \mid A, N) = 0 \quad \textit{für } i > 0.$$

2.1.6. Satz.

(i) *$D^1(C \mid A, N)$ klassifiziert die Erweiterungen $0 \to N \to E \to C \to 0$ der A-Algebra C mit dem C-Modul N.*

(ii) *$D^0(C \mid A, N)$ ist die Automorphismengruppe der Erweiterungen von C durch N.*

Zum Beweis bemerken wir, daß für jede Erweiterung von C mit N stets $N^2 = 0$ ist ($N = C \cdot N = N/N^2$).
Ist nun, wie in 1.4., $C = F/I$, so gibt es einen A-Algebrahomomorphismus φ mit kommutativem Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F/I^2 & \xrightarrow{\varphi} & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ F/I = C & \xrightarrow{\mathrm{id}} & C = E/N \end{array}$$

der durch eine gegebene Erweiterung bis auf eine Derivation $F/I^2 \to N$ eindeutig bestimmt ist. Wir ordnen dann dieser Erweiterung die Klasse von φ in $\mathrm{Hom}_C(I/I^2, N)/\mathrm{Der}_A(F, N)$ zu und erhalten leicht (i).

2.1.7. Satz. *Es sei $A = B/J$, $J^2 = 0$, und wir fixieren eine flache A-Algebra P. Ist weiter*

$$D_p(B) = \{(B \to Q, Q \otimes_B A \simeq P) \quad \textit{mit} \quad B \to Q \textit{ flach}\}$$

und $N =: J \otimes_B P$, so gilt:

$$D_p(B) = \begin{cases} \Phi \\ \textit{oder} \\ \textit{Nebenklasse der Untergruppe } D^1(P \mid A, N) \textit{ in } D^1(P \mid B, N). \end{cases}$$

Dabei gilt noch:

$\psi \in \mathrm{Hom}_p(I/I^2, N)$ definiert ein Element von D_p genau dann, wenn (*)
$\psi(af) = (a \otimes 1) f$ für $a \in J$ und $f \in F/I^2$
gilt.

Dabei sei $F \mid B$ glatt, $F/I = P$, und damit sofort $J \cdot F \subseteq I$ (P ist A-Algebra).

Beweis. Aus (*) folgt sofort: $D_p(B) = \Phi$ oder Nebenklasse mod $D^1(P \mid A, N)$. Sind dann $\psi_1, \psi_2 \colon I/I^2 \to N$ zwei P-Modulhomomorphismen, die Erweiterungen von P mit N über B definieren, so ist die Differenz $\psi_1 - \psi_2$ ein A-Modulhomomorphismus, d. h., diese Erweiterung ist über A definiert.
Wir zeigen also (*): Wegen $P \simeq Q \otimes_B A \simeq Q/JQ$ definiert ein Element aus $D_p(B)$ eine Erweiterung

$$0 \to JQ \to Q \to P \to 0$$

mit $JQ = N$ (da $N = J \otimes_B P = J \otimes_B Q/JQ = J \otimes_B Q$ ist); es sei $\psi \in \mathrm{Hom}_p(I/I^2, N)$ ein Repräsentant in $D^1(P/B, N)$. Die Eigenschaft $\psi(af) = (a \otimes 1) f$ für $a \in J$ folgt nun aus

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N = JQ \arrow[r] & Q \arrow[r] & P = F/I \arrow[r] & 0 \\ & I/I^2 \arrow[u, "\psi"] \arrow[r, hook] & F/I^2 \arrow[u] & & \end{tikzcd}$$

Ist umgekehrt ψ gegeben, so definiert es eine Erweiterung und damit eine B-Algebra Q. Zu zeigen ist, daß Q flach ist. (Denn wegen $N = J \cdot Q$ ist $Q \otimes_B A \simeq P$ trivial.) Nun gilt:

(i) $\quad \mathrm{Tor}_B^1(Q, A) = 0,$

da $J \cdot Q = N = J \otimes_B P = J \otimes_B Q/JQ = J \otimes_B Q$ ist,

(ii) $\quad \mathrm{Tor}_B^1(Q, M) = 0 \quad$ für $M \in \mathrm{mod}\, A$,

da P flach über A ist.
Ist M ein beliebiger B-Modul, so ist

$$0 \to JM \to M \to M/JM \to 0$$

exakt, und die äußeren Moduln sind A-Moduln, also nach (ii)

$$\mathrm{Tor}_B^1(R, M) = 0,$$

q. e. d.

2.1.8. **Korollar.** *Es gibt eine kanonische Bijektion*

$$D^1(P \mid A, J \otimes_A P) \simeq D_p(A \oplus J).$$

Für $A = k$ liefert dies

$$D^1(P_0 \mid k, P_0) \simeq D_{P_0}(k[t]).$$

2.1.9. **Korollar.** *Ist $P_0 \mid k$ glatt, so gibt es genau eine Deformation von P_0 über B.*
Die wichtigste Anwendung ist das folgende

2.1.10. **Korollar.** *Es sei $P_0 \mid k$ gegeben, und P_0 besitze nur isolierte Singularitäten. Dann hat $D = D_{P_0}$ eine formale semiuniverselle Deformation.*

Vorbemerkung zum Beweis. Die Eigenschaft, daß P_0 nur isolierte Singularitäten besitzt, ist lediglich zum Beweis der Eigenschaft (iii) des Schlessinger-Kriteriums erforderlich. Nach Korollar 2.1.8. ist

$$D(k[t]) \simeq D^1(P_0 \mid k, P_0),$$

D^1 ist aber funktoriell in P_0 und definiert eine quasikohärente Garbe über P_0 (im Fall, daß P_0 eine lokale analytische Algebra ist, definiert man D^1 nicht durch glatte P_0-Algebren, sondern durch freie analytische Algebren). Nach 2.1.5. (iv) ist diese Garbe auf den singulären Ort konzentriert, ihre Schnitte über P_0 bilden daher einen endlichdimensionalen Vektorraum über k.

Beweis von 2.1.10.

(i) Ist $A' \to A \leftarrow A''$ ein Diagramm von Artinalgebren, wobei o. B. d. A. $A = A''/J$ mit $J^2 = 0$ ist, $B = A' \times_A A''$, so ist $B/J = A'$ ($x \in J \Leftrightarrow (0, x) \in B$). Wir fixieren zwei Deformationen $A' \to P'$, $A \to P$ und erhalten eine Abbildung

$$\left.\begin{array}{c} D_p(A'') \xrightarrow{\Phi} D_{p'}(B), \\ P'' \mapsto Q \end{array}\right\} \quad (\text{falls } P' \otimes_{A'} A \simeq P \text{ ist}),$$

bei der $\Phi(P'')$ im Urbild von $(P', P'') \in D_{P_0}(A') \times_{D_{P_0}(A)} D_{P_0}(A'')$ liegt. Φ konstruieren wir wie folgt: Ist $P'' \in D^1(P \mid A'', J \otimes_A P)$, so ist $0 \to JP'' \to P'' \to P \to 0$ exakt, daher

$$0 \to JP'' \to P' \times_P P'' \to P' \to 0,$$

und aus

$$JP'' \simeq J \otimes_A P \simeq J \otimes_A (P' \otimes_{A'} A) \simeq J \otimes_{A'} P' \simeq J \otimes_B P'$$

folgt, daß $Q := P' \otimes_P P'' \in D^1(P' \mid B, J \otimes_B P')$ ist. Da bei

$$D^1(P \mid A'', J \otimes_{A''} P) \to D^1(P' \mid B, J \otimes_B P')$$

Nebenklassen $\bmod D^1(P \mid A, J \otimes_A P)$ in Nebenklassen $\bmod D^1(P' \mid A', J \otimes_B P')$ übergehen, folgt mit 2.1.7. leicht die Existenz von Φ.
Ebenso beweist man Eigenschaft (ii) des Kriteriums 2.1.3. und erhält so die Behauptung.

2.2. Charakterisierung von Deformationen durch Gleichungen

Für unsere Untersuchungen brauchen wir zunächst ein Flachheitskriterium, dessen Beweis bei Bourbaki, Algèbre commutative, zu finden ist.

2.2.1. Definition. Es sei A ein Ring, $\mathfrak{m}$ ein Ideal von A. Dann heißt M mod A *idealsepariert* bezüglich $\mathfrak{m}$, falls für alle Ideale $\mathfrak{a}$ von A gilt: $\mathfrak{a} \otimes_A M$ ist separiert in der $\mathfrak{m}$-adischen Topologie.

2.2.2. Satz. *Es sei $(A, \mathfrak{m})$ ein Noetherscher lokaler Ring, $A/\mathfrak{m} = k$, und der A-Modul M sei idealsepariert bezüglich $\mathfrak{m}$. Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent:*

(i) *M ist A-flach.*

(ii) $\mathrm{Tor}_1^A(N, M) = 0$ *für alle $N \in$ mod A mit $\mathfrak{m}N = 0$.*

(ii') $\mathrm{Tor}_1^A(N, M) = 0$ *für alle $N \in$ mod A, die durch eine Potenz von $\mathfrak{m}$ annulliert werden.*

(iii) *$\mathfrak{m} \otimes_A M \to \mathfrak{m}M$ ist bijektiv.*

(iv) *Wenn wir*

$$\mathrm{gr}(A) = \bigoplus_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{m}^\nu/\mathfrak{m}^{\nu+1}, \qquad \mathrm{gr}(M) = \bigoplus_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{m}^\nu M/\mathfrak{m}^{\nu+1} M$$

setzen, so ist die Eigenschaft
(GR) *Der kanonische Morphismus*
$$\mathrm{gr}(A) \otimes_{\mathrm{gr}_0(A)} \mathrm{gr}_0(M) \to \mathrm{gr}(M) \text{ ist bijektiv}$$
erfüllt.

(v) *Für alle $n \geqq 1$ ist $M/\mathfrak{m}^n M$ flacher $A/\mathfrak{m}^n$-Modul.*

Aus dem Satz erhalten wir leicht:

2.2.3. Korollar: *Ist $f: A \to B$ ein lokaler Homomorphismus lokaler Noetherscher Ringe, so ist f flach genau dann, wenn $\mathfrak{m}_A \otimes_A B \to B$ injektiv ist.*

Beweis. Zu zeigen ist ($\Leftarrow$), wofür nach dem Satz ((i) $\Leftrightarrow$ (iii)) hinreichend ist, daß B idealsepariert bezüglich $\mathfrak{m}_A$ ist. $\mathfrak{a} \subseteqq A$ sei ein Ideal; zu zeigen ist, daß $N = \mathfrak{a} \otimes_A B$ separiert in der $\mathfrak{m}_A$-adischen Topologie ist.
Nun ist N von endlichem Typ über B, daher in der $\mathfrak{m}_B$-adischen Topologie separiert (Krullscher Durchschnittssatz), also erst recht in der $\mathfrak{m}_A$-adischen ($\mathfrak{m}_A B \subseteqq \mathfrak{m}_B$, q. e. d.

Wir betrachten von nun an wieder eine beliebige der drei in der Einleitung genannten Kategorien $\mathscr{C}$ über k und bezeichnen mit $k\langle X_1, \ldots, X_n\rangle$ die von den n Unbestimmten X_i erzeugte freie Algebra dieser Kategorie.

2.2.4. **Satz.** *Es sei*

$$\begin{tikzcd} B & & B' \arrow[ll, "h"'] \\ & A \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm in $\mathscr{C}$. Dann gilt:

(i) *Ist $h \otimes_A k$ surjektiv, so ist h surjektiv.*

(ii) *Ist $h \otimes_A k$ injektiv und B über A flach, so ist h injektiv.*

Beweis. (i) Die Surjektion $B'/\mathfrak{m}_A B' \to B/\mathfrak{m}_A B$ liefert bei Faktorisierung nach $\mathfrak{m}_{B'}$

$$k = B'/\mathfrak{m}_{B'} \twoheadrightarrow B/\mathfrak{m}_{B'}B,$$

daher $B/\mathfrak{m}_{B'}B = k$, d. h. $\mathfrak{m}_{B'}B = \mathfrak{m}_B$, also

$$h(\mathfrak{m}_{B'}) \equiv \mathfrak{m}_B \bmod \mathfrak{m}_B^2,$$

d. h. h surjektiv, also auch k.
(ii) Ist B flach über A, so ist nach dem vorigen Satz (wobei jede der Graduierungen die $\mathfrak{m}_A$-adische sei)

$$\gamma_B\colon \mathrm{gr}(A) \otimes_k B/\mathfrak{m}_A B \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}(B).$$

Behauptung a): $\mathrm{gr}(h)$ ist injektiv.
Behauptung b): $\mathrm{gr}(h)$ injektiv $\Rightarrow h$ injektiv.
Zu a). Wir haben

$$\begin{tikzcd} \mathrm{gr}(A) \otimes_k B'/\mathfrak{m}_A B' \arrow[r, "1 \otimes \mathrm{gr}_0(h)"] \arrow[d, "\gamma_{B'}"] & \mathrm{gr}(A) \otimes_k B/\mathfrak{m}_A B \arrow[d, "\gamma_B"] \\ \mathrm{gr}(B') \arrow[r, "\mathrm{gr}(h)"'] & \mathrm{gr}(B) \end{tikzcd}$$

und da γ_B bijektiv, $1 \otimes \mathrm{gr}_0(h)$ injektiv ist, folgt $\mathrm{gr}(h)$ injektiv, q. e. d.
Zu b). **Vorbemerkung.** $h^{-1}(\mathfrak{m}_A^\nu B) = \mathfrak{m}_A^\nu B'$
Beweis. Zu zeigen ist die Inklusion $\subseteqq$. Da $\mathrm{gr}(h)$ injektiv ist, folgt

$$\mathfrak{m}_A^\nu B' \cap h^{-1}(\mathfrak{m}_A^{\nu+1} B) \subseteqq \mathfrak{m}_A^{\nu+1} B'$$

und induktiv nach $k \geqq 0$

$$\mathfrak{m}_A^{\nu-k} B' \cap h^{-1}(\mathfrak{m}_A^{\nu+1} B) \subseteqq \mathfrak{m}_A^{\nu+1} B'. \tag{$*$}$$

So ergibt ($*$) für $k = \nu$

$$h^{-1}(\mathfrak{m}_A^{\nu+1} B) \subseteqq \mathfrak{m}_A^{\nu+1} B',$$

q. e. d. Nun gilt nach der Vorbemerkung

$$h^{-1}(0) \subseteqq \bigcap_{\nu} h^{-1}(\mathfrak{m}_A^{\nu} B) = \bigcap_{\nu} \mathfrak{m}_A^{\nu} B' = 0,$$

daher ist h injektiv, q. e. d.

2.2.5. Korollar. *In der Kategorie $\mathcal{C}$ ist ein Morphismus $h: B' \to B$ von A-Algebren in eine flache A-Algebra B genau dann ein Isomorphismus, wenn der induzierte Morphismis der speziellen Fasern über A ein Isomorphismus ist.*

2.2.6. Satz. *Es sei $(\varphi: A \to P, P/\mathfrak{m}_A P \simeq P_0)$ eine Deformation von A, und es sei eine Einbettung von P_0 durch $P_0 = k\langle X_1, \ldots, X_n\rangle/I_0$ gegeben; $k\langle X_1, \ldots, X_n\rangle =: \mathcal{O}$. Dann gilt:*

(i) *Es existiert eine Fortsetzung der Einbettung von P_0 zu einer Einbettung von $\mathcal{O} \widehat{\otimes} A$, d. h.*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr] \arrow[d] & & P \arrow[d] \\
\mathcal{O} \widehat{\otimes} A \arrow[urr, dashed] \arrow[dr] & & P_0 = P/\mathfrak{m}_A P \\
 & \mathcal{O} = \mathcal{O} \widehat{\otimes} A/\mathfrak{m}_A \arrow[ur, "\sigma"'] &
\end{tikzcd}$$

(ii) *Es sei $I = \ker \psi$ und $I_0 = (f_1, \ldots, f_d)$. Sind dann $F_1, \ldots, F_d \in I$ und $F_i \equiv f_i \bmod \mathfrak{m}_A(\mathcal{O} \widehat{\otimes} A)$, so ist $I = (F_1, \ldots, F_d)$.*

(iii) *Es sei φ ein beliebiger Morphismus, der obigem Diagramm genügt und für den $I = \ker \psi$, $I_0 = \ker \sigma$ durch jeweils ein bestimmtes Erzeugendensystem mit (ii) gegeben sind. Dann ist φ Deformation von P_0 (d. h. flach) genau dann, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:*

Sind $p_i \in \mathcal{O}$ mit $\sum_{i=1}^{d} p_i f_i = 0$ auf P_0, so existieren $P_i \in \mathcal{O} \widehat{\otimes} A$ mit $P_i \equiv p_i \bmod \mathfrak{m}_A(\mathcal{O} \widehat{\otimes} A)$ und $\sum_{i=1}^{d} P_i F_i = 0$ auf P.

Beweis. (i) Die Existenz von ψ ist klar, die Surjektivität folgt dann aus dem letzten Satz (i).

(ii) Ist $I' = (F_1, \ldots, F_d) \subseteqq I$, so haben wir

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
(\mathcal{O} \widehat{\otimes} A)/I & & (\mathcal{O} \widehat{\otimes} A)/I' \arrow[ll, two heads, "\tau"']
\end{tikzcd}$$

und nach dem letzten Korollar ist τ Isomorphismus, d. h. $I' = I$.

(iii) Vorbemerkung $E' \subseteqq E$ mod A sei ein Untermodul, E/E' flach über A, $\mathfrak{a} \subseteqq A$ ein Ideal; dann gilt

$\mathfrak{a}E' = E' \cap \mathfrak{a}E$ (Beweis trivial).

Daraus folgt leicht:

$$\varphi: P \leftarrow A \text{ ist flach} \Leftrightarrow I \cap (\mathfrak{m}_A \cdot \mathcal{O} \widehat{\otimes} A) = \mathfrak{m}_A \cdot I. \qquad (*)$$

Beweis. ($\Rightarrow$) ist klar nach der Vorbemerkung (für $E = \mathcal{O} \hat{\otimes} A$, $E' = I$, $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}_A$).
($\Leftarrow$) Zu zeigen ist, daß

$$\mathfrak{a}_A \otimes_A (\mathcal{O} \hat{\otimes} A/I) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O} \hat{\otimes} A/I$$

injektiv ist. Nun steht aber links nichts weiter als

$$\begin{aligned} &\mathfrak{m}_A \cdot (\mathcal{O} \hat{\otimes} A)/\mathfrak{m}_A \cdot I \quad \text{(Rechtsexaktheit von } \otimes_A) \\ &= \mathfrak{m}_A \cdot (\mathcal{O} \hat{\otimes} A)/I \cap \mathfrak{m}_A \cdot \mathcal{O} \hat{\otimes} A \quad \text{(Voraussetzung)} \\ &\cong I + \mathfrak{m}_A \cdot \mathcal{O} \hat{\otimes} A/I = \operatorname{im} \alpha, \end{aligned}$$

q. e. d.

Mit (*) beweisen wir nun die gewünschte Aussage. Es sei $m = \operatorname{emdim} A$; $A = k\langle t_1, \ldots, t_m\rangle$.

φ ist flach $\Leftrightarrow$ Jede Relation $\sum p_i f_i = 0$ läßt sich zu $\sum P_i F_i = 0$ liften.

($\Rightarrow$) Ist $\sum p_i f_i = 0$, $F_i = f_i + \sum_j t_j G_{ij}$, so ist

$$\sum p_i F_i = \sum_{i,j} p_i \cdot t_j G_{ij} \in \mathfrak{m}_A \cdot \mathcal{O} \hat{\otimes} A$$

Element von J, also (*),

$$\sum p_i F_i \in \mathfrak{m}_A J, \quad \text{d. h.} \quad \sum p_i F_i = \sum_{i,j} Q_{ij} t_j F_i,$$

daher

$$\sum_i \underbrace{(p_i - \sum_j Q_{ij} t_j)}_{P_i} F_i = \sum p_i F_i - \sum_j Q_{ij} t_j F_i = 0,$$

q. e. d.

($\Leftarrow$) Nach (*) genügt es zu zeigen, daß aus $H \in \mathfrak{m}_A \cdot \mathcal{O} \hat{\otimes} A$, $H \in J$, folgt $H \in \mathfrak{m}_A J$. Es sei

$$H = \sum_i (p_i - \sum_j t_j R_{ij}) F_i \quad \text{mit} \quad p_i \in \mathcal{O} \hat{\otimes} 1 \quad (H \in J);$$

dann gilt aber $\sum_i p_i f_i = 0$, und so gibt es eine Fortsetzung dieser Relation zu

$$\sum_i \underbrace{(p_i - \sum t_j Q_{ij})}_{P_i} F_i = 0.$$

Folglich ist $\sum_i p_i F_i = \sum_{i,j} t_j Q_{ij} F_i$, daher

$$H = \sum_{i,j} t_j (Q_{ij} - R_{ij}) F_i \in \mathfrak{m}_A J,$$

q. e. d.

2.3. Deformationen lokaler analytischer Algebren

Wir betrachten hier nur die Kategorie der konvergenten Potenzreihenalgebren über dem Grundkörper $\mathbf{C}$ der komplexen Zahlen. Die Darstellung folgt GRAUERTS Arbeit [8].

2.3.1. Erweiterungsketten von Untermoduln von $p \cdot H_e$

Es sei $H = \mathbf{C}\{t_1, \ldots, t_m\}$ eine freie Algebra konvergenter Potenzreihen, $H_e = H/\mathfrak{m}^e$, $p \cdot (\ )$ bezeichne stets die p-fache direkte Summe.

Es seien $J_e \subseteq p \cdot H_e$ und $J_{e+i} \subseteq p \cdot H_{e+i}$ zwei Untermoduln.

Definition. (i) J_{e+i}, $i \geqq 1$, heißt *Erweiterung* von J_e, wenn $J_{e+i}/p \cdot H_e = J_e$ ist.
(ii) J_{e+i} heißt *minimale Erweiterung* von J_e, wenn überdies folgendes gilt: Ist $\tilde{J}_{e+i} \subseteqq J_{e+i}$ Erweiterung von J_e, so ist $\tilde{J}_{e+i} = J_{e+i}$.

2.3.1.1. Satz. *Es sei $h_1, \ldots, h_k \in J_e$ ein minimales (d. h. unverkürzbares) Erzeugendensystem. Dann gilt:*

(i) *J_{e+1} ist Erweiterung von $J_e \Leftrightarrow$ Es gibt Erzeugende $\hat{h}_1, \ldots, \hat{h}_l \in J_{e+1}$ mit $\hat{h}_i \mid p \cdot H_e = h_i$ für $i = 1, \ldots, k$ und $\hat{h}_i \mid p \cdot H_e = 0$ für $i > k$.*

(ii) *Ist J_{e+1} minimale Erweiterung von J_e, so läßt sich $l = k$ wählen. Jede Fortsetzung $\hat{h}_1, \ldots, \hat{h}_k$ von $h_1, \ldots, h_k$ ist dann Erzeugendensystem von J_{e+1}.*

(iii) *Ist $\hat{h}_1, \ldots, \hat{h}_k$ Erzeugendensystem von J_{e+1} mit $\hat{h}_i \mid p \cdot H_e = h_i$, so ist J_{e+1} minimale Erweiterung von J_e.*

Beweis. (i) ($\Rightarrow$) Ist $\varphi\colon J_{e+1} \twoheadrightarrow J_e$ die kanonische Abbildung, $\hat{h}_1, \ldots, \hat{h}_k \in J_{e+1}$ beliebig mit $\hat{h}_i \mid p \cdot H_e = h_i$, so ergänzen wir diese durch ein Erzeugendensystem von $\ker \varphi$ zu $\hat{h}_1, \ldots, \hat{h}_l$.
(ii) ist trivial.
(iii) Ist $g \in H_e$, so sei $g(0)$ das Bild von g bei $H_e \twoheadrightarrow H_e/m_e = \mathbf{C}$ $(m_e = m \cdot H_e)$. Nach dem Lemma von Nakayama gilt

$$\sum_{i=1}^{k} a_i h_i = 0 \; (a_i \in H_e) \Rightarrow a_i(0) = 0, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Es ist zu zeigen, daß J_{e+1} minimal ist. Ist dies nicht so, dann existieren $\tilde{h}_1, \ldots, \tilde{h}_k \in J_{e+1}$, die Fortsetzungen der h_i sind und nicht ganz J_{e+1} erzeugen (nach (i)). Dann gilt

$$\tilde{h}_i = \sum_j a_{ij} \hat{h}_j, \quad a_{ij} \in H, \tag{$*$}$$

und $\hat{h}_j$ gemäß (iii). Ist $\underline{a_{ij}} := a_{ij}/H_e$, so ist dann $\sum_j (\underline{a_{ij}} - \delta_{ij}) h_j = 0$ in $p \cdot H_e$, deshalb $a_{ij}(0) = \delta_{ij}$, und daher ist das lineare Gleichungssystem ($*$) nach den $\hat{h}_j$ auflösbar, d. h., $\tilde{h}_1, \ldots, \tilde{h}_k$ erzeugen J_{e+1}, Widerspruch.

2.3.1.2. Korollar. *Sind J_{e+1}, $\tilde{J}_{e+1}$ minimale Erweiterungen von J_e, so ist*

$$J_{e+1} \cap p \cdot \mathfrak{m}^e = \tilde{J}_{e+1} \cap p \cdot \mathfrak{m}^e.$$

Beweis. Sind $\{\hat{h}_i\} \subseteqq J_{e+1}$, $\{\tilde{h}_i\} \subseteqq J_{e+1}$ Fortsetzungen der h_i, so sind dies nach 2.1. (ii) Erzeugendensysteme. Ist $g \in J_{e+1} \cap p \cdot m^e$, so ist $g = \sum a_i \hat{h}_i$ mit $a_i(0) = 0$ (da $g \mid H_e = 0$ ist). Daher ist $\sum a_i(\hat{h}_i - \tilde{h}_i) = 0$ in H_{e+1}, d. h.

$$g = \sum a_i \hat{h}_i = \sum a_i \tilde{h}_i \in \tilde{J}_{e+1} \cap p \cdot \mathfrak{m}^e,$$

q. e. d.

2.3.1.3. Folgerung. $\dim_{\mathbf{C}} p \cdot H_{e+1}/J_{e+1} = \dim_{\mathbf{C}} p \cdot H_{e+1}/\tilde{J}_{e+1}$.

Beweis. Es genügt zu zeigen: Die endlichdimensionalen Vektorräume J_{e+1} und $\tilde{J}_{e+1}$ haben dieselbe Dimension. Das ist aber trivial.

2.3.1.4. Satz. *Es sei $(J_e)_{e \geqq e_0}$ sei eine Kette von Erweiterungen in $\{p \cdot H_e\}_e$, d. h., es sei stets $J_{e+1} \mid p \cdot H_e = J_e$. Dann gibt es ein $e_1 \geqq e_0$, so daß $\{J_e\}_{e \geqq e_1}$ eine Kette minimaler Erweiterungen ist (d. h., J_{e+1} ist minimale Erweiterung von J_e).*

Beweis. Gilt dies nicht, so existieren beliebig große e, daß J_{e+1} nicht minimal über J_e ist; e_i sei die entsprechende Teilfolge der Indizes. Wir wählen Erweiterungen $J'_{e_i+1} \subsetneqq J_{e_{i+1}}$ von J_{e_i}; ist

$$J_e^{(i)} = \{h \in J_e, h \mid p \cdot H_{e_{j+1}} \in J'_{e_{j+1}} \quad \text{für} \quad j \geqq i, e_j + 1 \leqq e\},$$

so ist $\{J_e^{(i)}\}_e$ eine Kette von Erweiterungen und $\hat{J}^{(i)} = \varprojlim J_e^{(i)} \subseteqq (p \cdot H)^\wedge$, wobei $\hat{J}^{(i)} \subsetneqq J^{(i+1)}$ ist, denn wir können $h_e \in J_e^{(i+1)}$ wählen mit $h_e \notin J_e^{(i)}$, falls e groß ist. Daher ist

$$\hat{J}^{(i)} \subsetneqq \hat{J}^{(i+1)} \subsetneqq \hat{J}^{(i+2)} \subsetneqq \cdots,$$

was unmöglich ist, denn $p\hat{H}$ ist Noethersch.

2.3.2. Der Weierstraßsche Vorbereitungssatz für ein Ideal

Es sei wieder $H_e = H/\mathfrak{m}^e$, $H_\infty := H$, $e = 1, 2, \ldots, \infty$. Ist $\varrho \in R_+^m$ fest vorgegeben, $f \in H_e$, $f = \sum_{|\nu|=0}^{e-1} a_\nu t^\nu$, so setzen wir

$$\|f\| = \sup_\nu 2\delta(|\nu| + 1)^{m+2} |a_\nu| \varrho^\nu$$

$$\text{mit} \quad \delta = 2^{m+2} \sum_{\nu=0}^{\infty} (r+1)^{-2}.$$

Motiv. Für die induktive Konstruktion konvergenter Potenzreihen f möchte man ein handliches Kriterium haben, wie man aus den ersten Koeffizienten a die folgenden wählen muß, um Konvergenz zu erreichen. Es gilt nämlich

2.3.2.1. **Bemerkung.** Ist $f \in \hat{H}$, so werde $\|f\|$ wie oben definiert. Dann ist $f \in H \Leftrightarrow \|f\|_\varrho < \infty$ für ein ϱ.

2.3.2.2. **Definition.** $\mathscr{B} = \mathscr{B}^e(\varrho) = \{f \in H_e, \|f\|_\varrho < \infty\}$.

Nun folgt leicht

2.3.2.3. **Satz.** *$\mathscr{B}^e(\varrho)$ ist eine Banachalgebra.*

Beweis. Man sieht leicht, daß $\| \ \|_\varrho$ eine vollständige Norm auf $\mathscr{B}^e$ ist. Zu überprüfen ist also nur die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung. Sind

$$f = \sum_{|\nu|=0}^{e-1} a_\nu t^\nu, \qquad g = \sum_{|\mu|=0}^{e-1} b_\mu t^\mu \in H_e,$$

so ist zu zeigen:

$$\|f \cdot g\| = \|f\| \cdot \|g\|.$$

Es gilt nun

$$f \cdot g = \sum_{|\lambda|=0}^{e-1} t^\lambda \Big(\sum_{\nu+\mu=2} a_\nu b_\mu \Big) =: \sum \alpha_\lambda t^\lambda$$

und

$$|\alpha_\lambda| = \Big| \sum_{\nu+\mu=\lambda} a_\nu b_\mu \Big| \leqq \sum |a_\nu| \, |b_\mu| = \sum_{r=0}^{|\lambda|} \sum_{\substack{|\nu|=r \\ \nu+\mu=\lambda}} |a_\nu| \, |b_\mu|,$$

und da die Zahl der m-Tupel ν mit $|\nu| = r$ stets $\leqq (r+1)^m$ ist, folgt für $\|f\| = c_1$, $\|g\| = c_2$

$$|\alpha_\lambda| = \sum_{r=0}^{\frac{1}{2}|\lambda|} \sum_{|\nu|=r} \frac{c_1}{2\delta(|\nu|+1)^{m+2}\varrho^\nu} \cdot \frac{c_2}{2\delta(|\lambda|-|\nu|)^{m+2}\varrho^{\lambda-\nu}}$$

$$\leqq \frac{c_1c_2}{4\delta^2\varrho^\lambda} \sum_{r=0}^{\frac{1}{2}|\lambda|} \frac{(r+1)^m}{(r+1)^{m+2}(|\lambda|-r+1)^{m+2}} \leqq \frac{c_1c_2 \cdot 2^{m+1}}{\delta^2\varrho^\lambda(|\lambda|+2)^{m+2}} \sum_{r=0}^{\frac{1}{2}|\lambda|}(r+1)$$

$$\leqq \frac{c_1c_2 \cdot 2^{m+1}}{\delta^2\varrho^\lambda(|\lambda|+2)^{m+2}} \cdot \delta \cdot 2^{m-2} = \frac{c_1 \cdot c_2}{2\delta\varrho^\lambda(|\lambda|+1)^{m+2}},$$

d. h. $c_1 \cdot c_2 \geqq 2\delta\varrho^\lambda(|\lambda|+1)^{m+2}$ für alle λ, q. e. d.

Wir führen unter den Multiindizes nun eine Ordnungsrelation ein.

2.3.2.4. Definition. Es seien $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_m)$, $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m)$ zwei m-dimensionale Multiindizes. Wir definieren

$$\nu < \mu \Leftrightarrow \begin{cases} |\nu| < |\mu| \\ \text{oder} \\ \exists\, k \leqq m \quad \text{mit} \quad \nu_k < \mu_k, \nu_{k+i} = \mu_{k+i} \\ \text{für} \quad i = 1, \ldots, m-k. \end{cases}$$

Ist $\alpha \in H_e$, $\alpha = \sum\limits_\mu a_\mu t^\mu$, so sei $\hat{O}(\alpha) = \min(\mu, a_\mu \neq 0)$. Für $\hat{O}(\alpha) > \nu$ schreiben wir auch $\alpha > \nu$.

Für $\hat{O}$ gilt natürlich

$$\hat{O}(\alpha_1 + \alpha_2) \geqq \min(\hat{O}(\alpha_1), \hat{O}(\alpha_2)) \quad \text{und} \quad \hat{O}(\alpha_1 \cdot \alpha_2) = \hat{O}(\alpha_1) + \hat{O}(\alpha_2).$$

2.3.2.5. Satz. *Es sei ν ein m-Multiindex, $\alpha = \sum a_\mu t^\mu \in H_e$, $\alpha > \nu$, $\bar{\delta} > 0$ gegeben. Dann existieren positive Zahlen $\varrho_1, \varrho_2 = \varrho_2(\varrho_1), \ldots, \varrho_m = \varrho_m(\varrho_1, \ldots, \varrho_{m-1}), \gamma = \gamma(\varrho)$ mit*

$$\|\alpha\|_{\gamma\varrho} = \bar{\delta}(\gamma\varrho)^\nu,$$

und diese Ungleichung bleibt erhalten, wenn man die ϱ_i und γ in der Weise $\varrho_1 = \varrho_1^*$, $\varrho_2 \leqq \varrho_2^*(\varrho_1), \ldots, \varrho_m \leqq \varrho_m^*(\varrho_1, \ldots, \varrho_{m-1}), \gamma = \gamma^*(\varrho)$ verkleinert.

Beweis. Es ist

$$\alpha = \sum_{|\mu|=|\nu|}^{0} a_\mu t^\mu + \sum_{|\mu|>|\nu|}^{1} a_\mu t^\mu;$$

$\sum^0$ ist endlich, und $a_\mu t^\mu$ sei ein Term davon, k so, daß $\mu_k > \nu_k, \nu_{k+1} = \mu_{k+1}, \ldots, \nu_m = \mu_m$ ist. Sind nun $\varrho_1, \ldots, \varrho_{k-1}$ gegeben, so gibt es ein ϱ_k mit $\|a_\mu t^\mu\|_\varrho \leqq \bar{\delta}\varrho^\mu$ ($\varrho_{k+1}, \ldots, \varrho_m$ beliebig). Wir wählen nun ϱ erst für die Glieder mit $k = 1$, dann für $k = 2$ und lassen ϱ_1 unverändert, usw., so daß

$$\|\textstyle\sum^0\|_\varrho = \bar{\delta}\varrho$$

ist, und o. B. d. A. können wir ϱ durch $\tilde{\gamma}\varrho$ ersetzen. Nach 2.3.2.1. ist für kleine $\tilde{\varrho} = \tilde{\gamma}\varrho$ nun $\|\sum_{\tilde{\varrho}}^1\| < \infty$, und für beliebige $\hat{\gamma} \leqq 1$ gilt dann

$$\|\textstyle\sum^1\|_{\hat{\gamma}\tilde{\varrho}} = \hat{\gamma}^{|\nu|+1}\|\sum^1\|_{\tilde{\varrho}},$$

daher

$$\|\textstyle\sum^1\|_{\hat{\gamma}\tilde{\gamma}\varrho} \leqq \bar{\delta}(\hat{\gamma}\tilde{\gamma}\varrho)^\nu \quad \text{für kleine } \hat{\gamma}, \text{ d. h.,}$$

für $\gamma = \tilde{\gamma} \cdot \hat{\gamma}$ ist auch $\|\sum^1\|_{\gamma\varrho} = \bar{\delta}(\gamma\varrho)^\nu$, q. e. d.

Nach dieser technischen Vorbemerkung wenden wir uns der Betrachtung gewisser zahlentheoretischer Funktionen zu, die wir später als Weierstraßinvarianten von Idealen in H interpretieren werden.

2.3.2.6. **Definition.** Es sei $\mathfrak{s} = (s_1, \ldots, s_m)$ ein m-Tupel von Abbildungen gewisser Teilmengen von $N^0, \ldots, N^{m-1}$ in $N \cup \{\infty\}$ mit

$$\begin{array}{ll}
s_1 = \text{const}, & \\
s_2 = s_2(\nu_1) & \text{definiert für } 0 \leqq \nu_1 < s_1 \text{ mit } s_2(\nu_1) = \infty, \\
 & \text{falls } s_1 = \infty \text{ für alle } \nu_1 \text{ ist,} \\
\vdots & \\
s_p = s_p(\nu_1, \ldots, \nu_{p-1}) & \text{definiert für } 0 \leqq \nu_1 < s_1, \ldots, \\
 & 0 \leqq \nu_{p-1} < s_{p-1}(\nu_1, \ldots, \nu_{p-2}) \quad \text{mit} \\
 & s_{p-1}(\nu_1, \ldots, \nu_{p-2}) = \infty \Rightarrow \\
 & s_p(\nu_1, \ldots, \nu_{p-1}) = \infty \quad \text{für alle } \nu_{p-1}.
\end{array}$$

Weiter sei $e \in N \cup \{\infty\}$ gegeben, und es gelte stets

$$s_p(\nu_1, \ldots, \nu_{p-1}) = \begin{cases} e - \nu_1 - \cdots - \nu_{p-1} \\ \text{oder } \infty. \end{cases}$$

(i) $\mathfrak{s}$ heißt dann *reduzierendes System zu e* (bzw. einfach *reduzierendes System*, falls $e = \infty$ ist).

(ii) $h \in H_e$ heißt *reduziert* bezüglich $\mathfrak{s}$, falls

$$h = \sum_{\substack{0 \leq \nu_1 < s_1 \\ 0 \leq \nu_2 < s_2(\nu_1) \\ \vdots \\ 0 \leq \nu_m < s_m(\nu_1, \ldots, \nu_{m-1}) \\ |\nu| < e}} a_\nu t^\nu$$

ist.

(iii) $\nu = \Phi$ sei zugelassen. Der Multiindex $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_i)$ mit $0 \leqq i \leqq m$ heißt *maximal* bezüglich des reduzierenden Systems $\mathfrak{s}$, falls $0 \leqq \nu_j < s_j(\nu_1, \ldots, \nu_{j-1})$ ist für $j = 1, \ldots, i$ sowie $s_i(\nu_1, \ldots, \nu_{i-1}) < \infty$ und $s_{i+1}(\nu_1, \ldots, \nu_i) = \infty$ (falls $i < m$) ist.

2.3.2.7. **Bemerkung.** Zum reduzierenden System $\mathfrak{s}$ gibt es nur endlich viele maximale Multiindizes. (Denn mit $s_i < \infty$ sind auch $s_1, \ldots, s_{i-1} < \infty$ an der Stelle ν.)

2.3.2.8. **Bemerkung.** Es sei $h \in H_e$ reduziert bezüglich $\mathfrak{s}$ und $(\nu_1, \ldots, \nu_i) = \nu'$ maximaler Multiindex. Setzen wir

$$h(\nu') := \sum_{\substack{\nu_{i+1}, \ldots, \nu_m \in N \\ \nu_{i+1} + \cdots + \nu_m < e - |\nu'|}} a_{\nu, \nu_{i+1}, \ldots, \nu_m} t_{i+1}^{\nu_{i+1}} \cdots t_m^{\nu_m},$$

so gilt

$$h = \sum_{\nu' \text{ maximal}} t_1^{\nu_1} \cdots t_i^{\nu_i} h(\nu').$$

Beweis. Einfaches Durchnumerieren der Indizes; wir wählen ν_1 fest, dann $\nu_2 \in \{0, \ldots, s_2(\nu_1) - 1\}$, darauf $\nu_3 \in \{0, \ldots, s_3(\nu_1, \nu_2) - 1\}$ usw., bis zum ersten Mal $s_{i+1}(\nu_1, \ldots, \nu_i) = \infty$ wird (oder $i = m$). So werden alle Terme von 2.3.6. (ii) genau einmal durchlaufen.

2.3.2.9. Definition. Es sei $\mathfrak{S}$ ein reduzierendes System.

(i) $(\nu_1, \ldots, \nu_i) = \nu$ sei Multiindex mit $1 \leqq i < m$.
ν heißt *endlich* bezüglich $\mathfrak{S}$, falls $0 \leqq \nu_j < s_j(\nu_1, \ldots, \nu_{j-1})$ ist für $j = 1, \ldots, i$ und $s_{i+2}(\nu_1, \ldots, \nu_i)$.

(ii) Sind $\mathfrak{S}, \tilde{\mathfrak{S}}$ reduzierende Systeme, so heißt $\mathfrak{S} \leqq \tilde{\mathfrak{S}}$ („$\tilde{\mathfrak{S}}$ höchstens stärker reduzierend als $\mathfrak{S}$"), falls

$$s_{i+1}(\nu_1, \ldots, \nu_i) = \tilde{s}_{i+1}(\nu_1, \ldots, \nu_i)$$

ist für alle bezüglich $\mathfrak{S}$ endlichen $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_i)$.

Man sieht sogar: Man muß nicht fordern, daß $\tilde{s}_{i+1}$ für bezüglich $\mathfrak{S}$ endliche ν definiert ist, das gilt automatisch (Induktion über i). $\mathfrak{S} \leqq \tilde{\mathfrak{S}}$ heißt: Zu $\tilde{\mathfrak{S}}$ gibt es höchstens mehr endliche Multiindizes als zu $\mathfrak{S}$. Offensichtlich ist „$\leqq$" eine Halbordnung der reduzierenden Systeme.

2.3.2.10. Satz. *Es sei $\mathfrak{S}_1 \leqq \mathfrak{S}_2 = \cdots$ eine unendliche Folge reduzierender Systeme. Dann existiert ein $p_0 \in N$ mit $\mathfrak{S}_p = \mathfrak{S}_{p_0}$ für alle $p \geqq p_0$*

Beweis. Es gilt:

$$\mathfrak{S} \lneqq \tilde{\mathfrak{S}} \Rightarrow \quad \text{Es gibt ein } \nu \text{ endlich } \tilde{\mathfrak{S}} \text{ mit } \nu \text{ nicht endlich } \mathfrak{S}.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $\mathfrak{S}_1 \lneqq \mathfrak{S}_2 \lneqq \cdots$ und überdies $\mathfrak{S}_{j+1} > \mathfrak{S}_j$ so groß, daß gilt:

Jeder bezüglich $\mathfrak{S}_j$ maximale Multiindex, der bezüglich $\mathfrak{S}_k$ mit $k > j$ endlich ist, ist schon bezüglich $\mathfrak{S}_{j+1}$ endlich.
(Das ist möglich, da zu $\mathfrak{S}_j$ nur endlich viele maximale Multiindizes existieren.)
Es gilt

$$\nu \text{ maximal } \mathfrak{S}_j, \text{endlich } \mathfrak{S}_{j+1} \Rightarrow \dim \nu \geqq j - 1. \tag{$*$}$$

Daher wird die Folge für $j = m + 1$ stationär.
Hierbei ergibt sich $(*)$ durch Induktion über j:

$j = 1$ ist trivial; es sei

$j > 1$, und für alle ν maximal $\mathfrak{S}_{j-1}$ mit ν endlich $\mathfrak{S}_j$ sei $\dim \nu \geqq j - 2$.
Weiter sei $\bar{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_r)$ maximal s_j und endlich s_{j+1}. Dann ist $r > 0$ und $(\nu_1, \ldots, \nu_{r-1})$ endlich s_j, daher enthält $(\nu_1, \ldots, \nu_{r-1})$ einen bezüglich s_{j-1} maximalen Multiindex $(\nu_1, \ldots)$, d. h., es ist $r - 1 \geqq j - 2$ und daher $r = j - 1$, q. e. d.

2.3.2.11. Definition. Ist $\mathfrak{S}$ ein reduzierendes System zu e, $\nu' = (\nu_1, \ldots, \nu_i)$ endlich $\mathfrak{S}$, so schreiben wir stets

$$\nu^* := (\nu_1, \ldots, \nu_i, s_{i+1}(\nu_1, \ldots, \nu_i)).$$

Weiter sei $\Lambda \subseteqq H_e$. Dann heißt Λ ein *System von Weierstraßpolynomen* zu $\mathfrak{S}$, falls

$$\Lambda = \{\omega_{\nu'} = t^{\nu^*} + \mathrm{red}_{\nu'}, \nu' \text{ endlich}\}$$

ist mit $\mathrm{red}_{\nu'} > \nu^*$ reduziert (ν^* identifiziert mit dem m-dimensionalen Multiindex $(\nu^*, 0, \ldots, 0)$).

2.3.2.12. Satz. *Es sei $\Lambda = \{\omega_{\nu'} = t^{\nu^*}, \nu' \text{ endlich } \mathfrak{S}\}$ das triviale System von Weierstraßpolynomen, $\varrho \in R_+^m$ vorgegeben. Dann gibt es für jedes $h \in H_e$ mit $\|h\| < \infty$ eine eindeutig bestimmte Darstellung*

$$h = \sum_{\nu' \text{ endlich}} Q_{\nu'} \omega_{\nu'} + R,$$

R reduziert bezüglich $\mathfrak{s}$ und $Q_{\nu'} \in H_{e-|\nu^*|}$ Potenzreihen in $t_{i+1}, \ldots, t_m$ (für $\nu' = (\nu_1, \ldots, \nu_i)$). Weiter gilt

$$\hat{O}(R) \geqq \hat{O}(h), \qquad \hat{O}(Q_{\nu'}) + \nu^* \geqq \hat{O}(h),$$

$$\|Q_{\nu'}\| \leqq \|h\| \varrho^{-\nu^*}, \qquad \|R\| \leqq \|h\|.$$

Beweis. Induktion nach $\tau = \tau(\mathfrak{s}) = \max\{i, \exists\, (\nu_1, \ldots, \nu_i) \text{ endlich } \mathfrak{s}\}$.

$\tau = 0$: Nur $s_1 < \infty$, daher $\Lambda = \{t_1^{s_1}\}$; somit ist $h = Qt_1^{s_1} + R$ mit $\deg_{t_1} R < s_1$ (eindeutig). Die Abschätzungen folgen, da die Zerlegung in „disjunkte" Unterreihen vorgenommen wurde.

$\tau > 0$: Wir betrachten ein neues reduzierendes System $\mathfrak{s}^*$ zu e:

$$s_i(\nu_1, \ldots, \nu_{i-1}) = \begin{cases} s_i(\nu_1, \ldots, \nu_{i-1}) & \text{für } i \leqq \tau, \\ 0 & \text{für } i > \tau. \end{cases}$$

Dann ist $\tau(\mathfrak{s}^*) = \tau - 1$, daher

$$h = \sum_{\nu' \text{ endlich } \mathfrak{s}^*} Q_{\nu'} \omega_{\nu'} + R^*$$

und R^* reduziert bezüglich $\mathfrak{s}^*$. Nun ist $\Lambda = \Lambda^* \coprod A$ mit

$$\Lambda^* = \{\omega_{\nu'}, \nu' \text{ endlich } \mathfrak{s}^*\}, \qquad A = \{\omega_{\nu'}, \nu' \text{ maximal } \mathfrak{s}^*, \text{ endlich } \mathfrak{s}\},$$

wobei stets $\nu' = (\nu_1, \ldots, \nu_\tau)$ ist. Es sei nun

$$R^* = \sum_{\substack{\nu' = (\nu_1, \ldots, \nu_i) \\ \nu' \text{ maximal } \mathfrak{s}^*}} a_{\nu'}(t_{i+1}, \ldots, t_m)\, t^{\nu'}.$$

Wir müssen zeigen: Für $\omega_{\nu'} \in A$ läßt sich $t_{\tau+1}^{s_\tau(\nu_1, \ldots, \nu_\tau)}$ abspalten von $a_{\nu'} t^{\nu'}$. Nun ist

$$a_{\nu'} = Q_{\nu'}(t_{\tau+1}, \ldots, t_m) \cdot \frac{\omega_{\nu'}}{t^{\nu'}} + b_{\nu'}(t_{\tau+1}, \ldots, t_m)$$

eindeutig bestimmt mit dem Polynom $b_{\nu'}$ in $t_{\tau+1}$, $\deg_{t_{\tau+1}}(b_{\nu'}) < s_\tau(\nu')$. Also ist

$$R^* = \sum_{\omega_{\nu'} \in A} Q_{\nu'} \omega_{\nu'} + R, \quad R \text{ reduziert (bezüglich } \mathfrak{s}).$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist R eindeutig bestimmt, daher auch R und die $Q_{\nu'}$, q. e. d.

Wir betrachten nun ein beliebiges System von Weierstraßpolynomen. Dieses erfüllt nach 3.2.5. stets die Voraussetzungen der folgenden Verallgemeinerung der Weierstraßschen Formel (für geeignetes ϱ). Wir verwenden im folgenden Satz jedoch nicht, daß die $\alpha_{\nu'}$ reduziert sind!

2.3.2.13. Satz. *Es sei $\mathfrak{s}$ reduzierendes System zu e,*

$$\Lambda = \{\omega_{\nu'} = t^{\nu^*} + \alpha_{\nu'}, \nu' \text{ endlich } \mathfrak{s}\}$$

gegeben mit $\alpha_{\nu'} > \nu^*$ und $\|\alpha_{\nu'}\| \leqq \varepsilon \sigma^{-1} \varrho^{\nu^*}$ für ein $0 < \varepsilon < 1$ und $\sigma = |\mathfrak{s}| =$ Anzahl der endlichen ν' zu $\mathfrak{s}$. Dann gibt es für alle $h \in H_e$ mit $\|h\| < \infty$ eine eindeutige Darstellung

$$h = \sum_{\nu' \text{ endlich}} Q_{\nu'} \omega_{\nu'} + R$$

mit R reduziert, $Q_{\nu'}H_{e-|\nu^*|}$ Potenzreihe in $t_{l+1}, \dots, t_m$ (für $\nu' = (\nu_1, \dots, \nu_l)$). Dabei gilt weiter

$$\hat{O}(R) \geqq \hat{O}(h), \qquad \hat{O}(Q_{\nu'}) + \nu^* \geqq \hat{O}(h),$$

$$\|R\| \leqq \|h\| \cdot \frac{1}{1-\varepsilon}, \qquad \|Q_{\nu'}\| \leqq \|h\| \cdot \frac{\varrho^{-\nu^*}}{1-\varepsilon}.$$

Wir konstruieren Folgen $h_i, R_i, H_e, Q_{\nu'}^{(i)}, H_{e-|\nu^*|}$, deren Grenzfunktionen die gewünschte Zerlegung liefern.
Zunächst setzen wir $\tilde{\omega} = t^{\nu^*}$.
$i = 0: h_0 =: h$.
$i > 0: h_i$ sei schon konstruiert. Nach dem vorigen Satz ist

$$h_i = \sum_{\nu' \text{ endlich}} Q_{\nu'}^{(i+1)} \tilde{\omega}_{\nu'} + R_{i+1}$$

mit

$$\|Q_{\nu'}^{(i+1)}\| = \|h_i\| \varrho^{-\nu^*}, \qquad \|R_{i+1}\| = \|h_i\|. \tag{$*$}$$

Wir setzen

$$h_{i+1} := h_i - \sum_{\nu'} Q_{\nu'}^{(i+1)} \omega_{\nu'} - R_{i+1} = - \sum_{\nu'} \alpha_{\nu'} Q_{\nu'}^{(i+1)}.$$

Nach $(*)$ folgt

$$\|h_{i+1}\| = |\mathfrak{z}|(\varepsilon\sigma^{-1}\varrho^{\nu^*}) \|h_i\| \varrho^{-\nu^*} = \varepsilon\|h_i\| \leqq \varepsilon^{i+1}\|h\|;$$

daher konvergiert $\sum_i h_i$ und nach $(*)$ auch $\sum R_i$, $\sum Q_{\nu'}^{(i)}$.
Bezeichnen wir die Summen mit h bzw. R bzw. $Q_{\nu'}$, so ist

$$h = \sum_{i=0}^{\infty} (h_i - h_{i+1}) = \sum_{\nu'} \left(\sum_{i=0}^{\infty} Q_{\nu'}^{(i+1)} \omega_{\nu'} \right) + \sum_{i=0}^{\infty} R_{i+1} = \sum_{\nu'} Q_{\nu'} \omega_{\nu'} + R.$$

Die Aussagen über $\hat{O}$ sind klar. Weiter ist

$$\|R\| \leqq \|\sum_i h_i\| \leqq \sum_i \varepsilon^{i+1} \|h\| = \frac{1}{1-\varepsilon} \|h\|$$

und

$$\|Q_{\nu'}\| = \varrho^{-\nu^*} \frac{1}{1-\varepsilon} \|h\|.$$

Wir zeigen die Eindeutigkeit der gefundenen Zerlegung. Es genügt zu zeigen, daß folgendes gilt: Ist $\sum_{\nu'} Q_{\nu'}\omega_{\nu'} + R = 0$, $\|Q_{\nu'}\|$, $\|R\|$ und R reduziert, so ist $R = 0$, $Q_{\nu'} = 0$.
Ist $K = \|\sum_{\nu'} Q_{\nu'}\omega_{\nu'} + R\|$, so ist nach (3.2.12.)

$$\|Q_{\nu'}\| \leqq K \cdot \varrho^{-\nu^*};$$

weiter gilt

$$R + \sum_{\nu'} Q_{\nu'} \tilde{\omega}_{\nu'} = - \sum_{\nu'} Q_{\nu'} \alpha_{\nu'},$$

und daher ist

$$K = \|R + \sum Q_{\nu'}\omega_{\nu'}\| = |\mathfrak{z}| \cdot (K\varrho^{-\nu^*}) \cdot \varepsilon\sigma^{-1}\varrho^{\nu^*} = \varepsilon \cdot K.$$

Aus $K \leqq \varepsilon K$ folgt aber $K = 0$; daher ist $R + \sum Q_{\nu'}\tilde{\omega}_{\nu'} = 0$, und die Eindeutigkeitsaussage von 3.2.12. liefert $R = 0, Q_{\nu'} = 0$, q. e. d.

Wir nennen R die *Reduktion von h bezüglich $\mathfrak{s}$.*

Es gilt überdies

2.3.2.14. **Bemerkung.** Die Koeffizienten von h und den $\omega_{\nu'}$ seien rationale Funktionen in $\mathcal{V} = (v_1, \ldots, v_k) \in \mathbb{C}^k$, die für $\mathcal{V} = 0$ definiert sind. Dann sind dies Koeffizienten von $Q_{\nu'}$ und R rational in $\mathcal{V}$.

Beweis. In einer Umgebung $V = V(0) \subseteqq \mathbb{C}^k$ sind die Voraussetzungen von 2.3.2.13. immer noch erfüllt (für geeignetes ϱ). Dann sind dort die Koeffizienten von R, $Q_{\nu'}$ Funktionen von $\mathcal{V}$ über V.

$e < \infty$: $Q_{\nu'}$, R genügen linearen Gleichungen mit den Koeffizienten von $\omega_{\nu'}$ und h. Nach 2.3.2.13. hat das System eine eindeutige Lösung, die dann nach der Determinantentheorie rational in den Koeffizienten $\omega_{\nu'}$, h ist, q. e. d.

$e = \infty$: Wir entwickeln schrittweise für wachsendes $e < \infty$.

Der folgende Satz ist das Hauptresultat dieses Abschnitts und liefert uns eine „Division mit Rest durch ein Ideal".

2.3.2.15. **Satz.** *Ist $J \subsetneqq H_e$ ein Ideal, so existiert ein reduzierendes System $\mathfrak{s}$ zu e und eine Zariski-offene Teilmenge $Z \subseteqq \mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$, so daß nach einer beliebigen Transformation mit einem $g \in Z$ gilt: J besitzt ein eindeutig bestimmtes Erzeugendensystem aus Weierstraßpolynomen zu $\mathfrak{s}$.*

Beweis. Wir zeigen induktiv die folgende Aussage:

(A_r): Es gibt ein reduzierendes System $\mathfrak{s}_r = (s_1^{(r)}, \ldots, s_m^{(r)})$ zu e und $\Phi \neq Z_r \subseteqq \mathrm{GL}$ (Z_r Zariski-offen) und nach einer beliebigen Koordinatentransformation mit $g \in Z_r$ ein System

$$\Lambda_r = \{\omega_j^r = \omega_{\nu_j'} = t^{\nu_j^*} + \alpha_j^r, \qquad j = 1, \ldots, r\}$$

von Weierstraßpolynomen zu $\mathfrak{s}_r$ mit

(i) $\nu_{j+1}^* > \nu_j^*$.

(ii) $h \in J$ reduziert zu $\mathfrak{s}_r \Rightarrow h > \nu_r^*$.

(iii) Die Koeffizienten von ω_j^r sind reguläre rationale Funktionen von $g \in Z_r$.

(iv) $\Lambda_r \subseteqq J$.

(v) $Z_{r-1} \supseteqq Z_r$, $\mathfrak{s}_{r-1} \stackrel{<}{\neq} \mathfrak{s}_r$ für $r > 0$.

red_r bezeichnet die Reduktion bezüglich Λ_r.

Nach 3.2.10. und (v) folgt dann die Existenzaussage des Satzes, falls wir zeigen können:

a) (A_0),

b) (A_r) und $\mathrm{red}_r J \neq 0 \Rightarrow$ (A_{r+1}).

Nun ist (A_0) trivial, wenn wir $\mathfrak{s}_0 = (\infty, \ldots, \infty)$, $Z_0 = \mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$, $\Lambda_0 = \Phi$ setzen.
Es sei (A_r) bewiesen, $\mathrm{red}_r J \neq 0$. Es sei μ minimal mit der Eigenschaft: Es gibt eine Transformation aus Z_r und ein $h \in \mathrm{red}_r J$, so daß $a_\mu t^\mu \neq 0$ ein Term von h ist.
Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $a_\mu = 1$ und $h = t^\mu + \alpha$, $\nu_r^* < \mu < \alpha$ (wegen (ii)). Ist $j \in J$ fixiert mit $\mathrm{red}_r j = h$, so sind die Koeffizienten von α rationale Funktionen von $g \in Z_r$ (3.2.14.); es sei Z_{r+1} deren Definitionsbereich in Z_r. Weiter sei

$$\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_i, 0, \ldots, 0) \quad \text{mit} \quad \mu_i > 0.$$

Wir definieren $\mathfrak{s}_{r+1}$ durch

$$s_i^{(r+1)}(\mu_1, \ldots, \mu_{i-1}) = \mu_i,$$
$$s_j^{(r+1)}(\nu_1, \ldots, \nu_{j-1}) = s_j^{(r)}(\nu_1, \ldots, \nu_{j-1}) \quad \text{für } \nu = (\nu_1, \ldots, \nu_{j-1}) \text{ endlich } \mathfrak{s}_r,$$
$$s_j^{(r+1)}(\nu_1, \ldots, \nu_{j-1}) = \infty \text{ sonst}.$$

Wir zeigen:

(α) $\quad s_i^{(r)}(\mu_1, \ldots, \mu_{i-1}) = \infty$,

(β) $\quad s_{i-1}^{(r)}(\mu_1, \ldots, \mu_{i-2}) < \infty$.

Damit ist dann $\mathfrak{s}_{r+1}$ wohldefiniert, und $(\mu_1, \ldots, \mu_{i-1}) =: \nu_{r+1}$ ist maximal zu $\mathfrak{s}_r$, endlich zu $\mathfrak{s}_{r+1}$.

(α) h reduziert $\Rightarrow \mu_i < s_i^{(r)}(\mu_1, \ldots, \mu_{i-1})$,
und falls $(\mu_1, \ldots, \mu_{i-1})$ endlich $\mathfrak{s}_r$ ist, ergibt (ii)

$$h > (\mu_1, \ldots, \mu_{i-1}, s_i^{(r)}(\mu_1, \ldots, \mu_{i-1})), \text{ Widerspruch!}$$

(β) Annahme: $s_{i-1}^{(r)}(\mu_1, \ldots, \mu_{i-2}) = \infty$. Wir wählen δ, ϱ so, daß

$$\|\alpha_{\nu'}\|_\varrho \leqq \delta \varrho^{\nu^*}, \qquad \|\alpha\|_\varrho \leqq \delta \varrho^{\mu}$$

ist (Satz 3.5. anwendbar wegen $\alpha > \mu > \nu^*$).
Da Z_{r+1} offen ist, können wir auf die Koordinaten hinreichend kleine Drehungen und Streckungen anwenden, ohne die Situation zu verändern. Es sei

$$t_i = \varrho_i \tilde{t}_i \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Wir haben $\tilde{\omega}_{\nu'} = \tilde{t}^{\nu^*} + \tilde{\alpha}_{\nu'}$ mit $\tilde{\alpha}_{\nu'} = \varrho^{-\nu^*} \cdot \alpha_{\nu'}(\varrho_i \tilde{t}_i)$ (Diese Eigenschaft kann man induktiv zu (iii) hinzunehmen) und setzen $\tilde{h} = \tilde{t}^{\mu} + \alpha$ mit $\alpha = \varrho^{-\mu}\alpha$. Es folgt für $\tilde{\varrho} = (1, \ldots, 1)$

$$\|\tilde{\alpha}_{\nu'}\|_{\tilde{\varrho}} \leqq \delta, \qquad \|\tilde{\alpha}\|_{\tilde{\varrho}} \leqq \delta.$$

Eine Drehung um einen kleinen Winkel φ in der (t_{i-1}, t_i)-Ebene liefert

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{i-1} \\ t_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{t}_{i-1}\cos\varphi & -\tilde{t}_i \sin\varphi \\ \tilde{t}_{i-1}\sin\varphi & \tilde{t}_i\cos\varphi \end{pmatrix},$$

d. h.

$$\tilde{t}^{\mu} \overset{\varphi}{\mapsto} \tilde{t}^{(\mu_1, \ldots, \mu_{i-2})} (a \tilde{t}_{i-1}^{\mu_{i-1}+\mu_i} + \beta) =: \gamma$$

mit $a = \sin^{\mu_i}\varphi \cos^{\mu_{i-1}}\varphi$, $\beta = \beta(\tilde{t}_{i-1}, \tilde{t}_i)$ homogen vom Grad $\mu_{i-1} + \mu_i$, und t_i tritt in allen Gliedern auf.

Behauptung: $\mathrm{red}_r\, \tilde{\alpha} =: \hat{\alpha}$ enthält den Term $a\tilde{t}^{(\mu_1, \ldots, \mu_{i-2})}\tilde{t}_{i-1}^{\mu_{i-1}+\mu_i}$ (damit folgt (β), denn offenbar ist $(\mu_1, \ldots, \mu_{i-2}, \mu_{i-1} + \mu_i) < \mu$ im Widerspruch zur Minimalität von μ).
Mit $\tilde{t}^{\mu} + \tilde{\alpha} \in J$ haben wir $\gamma + \varphi\tilde{\alpha} \in J$, $\gamma + \hat{\alpha} \in \varphi J$, und dies ist reduziert (reduziert wegen $s_{i-1}^{(r)}(\mu) = \infty$). Für kleines δ wird $\hat{\alpha}$ klein, und bei Verkleinerung von ϱ_i bleibt der Term

$$a\tilde{t}_{i-1}^{\mu_{i-1}+\mu_i}\tilde{t}^{(\mu_1, \ldots, \mu_{i-2})}$$

unberührt, tritt also nicht in $\hat{\alpha}$ auf, q. e. d.

Wir wenden Satz 3.2.12. auf $\Lambda = \Lambda_r \cup \{t^\mu + \alpha\}$ an und erhalten ein neues System von Weierstraßpolynomen

$$\omega_j^{(r+1)} = t^{\nu_j^*} + \operatorname{red} \alpha_j^r, \qquad i = 1, \ldots, r,$$
$$\omega_{r+1}^{(r+1)} = t^\mu + \operatorname{red} \alpha,$$

und nach diesem Satz ist auch

$$\alpha_j^{(r+1)} = \operatorname{red} \alpha_j^{(r)} > \nu_j^*, \qquad \alpha_{r+1}^{(r+1)} + \operatorname{red} \alpha > \mu =: \nu_{r+1}^*;$$

damit ist (i) klar, (iii) bis (v) waren schon erledigt, und es bleibt (ii) zu zeigen: Es sei $g \in J$ reduziert bezüglich $\mathfrak{Z}_{r+1}$. Dann tritt kein Term $b_\mu t^\mu$ in g auf. Für die übrigen Multiindizes stimmen $\mathfrak{Z}_{r+1}$, $\mathfrak{Z}_r$ überein, d. h., es ist g auch reduziert bezüglich $\mathfrak{Z}_r$ d. h. $g \gtrneqq \mu$ (μ war minimal!).

Damit ist die Existenzaussage 2.3.2.15. bewiesen.
Die Eindeutigkeit von Λ ist klar, denn durch $\mathfrak{Z}$ sind die endlichen ν' eindeutig bestimmt, ebenso die reduzierten nach Satz 2.3.2.12.

Man erhält sofort

2.3.2.16. Folgerung. Wir haben eine kanonische bijektive Abbildung von H_e/J auf die Menge der bezüglich $\mathfrak{Z}$ reduzierten Potenzreihen.

2.3.2.17. Bemerkung. Die Konstruktion aus 2.3.2.15. liefert eine eindeutige Abbildung der Ideale J in die reduzierenden Systeme $\mathfrak{Z}$. Offenbar ist $\mathfrak{Z}$ eine biholomorphe Invariante von J.

2.3.3. Anwendung des Vorbereitungssatzes auf Erweiterungsketten

2.3.3.1. Satz. *Es sei J_{e+1} Erweiterung von J_e, $J_e \subseteqq H_e$, $J_{e+1} \subseteqq H_{e+1}$ und $\mathfrak{Z}_e$, $\mathfrak{Z}_{e+1}$ die (nach Konstruktion aus Satz 3.2.15.) zugehörigen reduzierenden Systeme. Es seien Z_e, $Z_{e+1} \subseteqq \mathrm{GL}(m, \mathbf{C})$ die entsprechenden offenen Teilmengen, für die nach einer Transformation aus $Z_e \cap Z_{e+1} \neq \emptyset$ eindeutig bestimmte Systeme*

$$\Lambda_e = \{\omega_1^e, \ldots, \omega_k^e\}, \qquad \Lambda_{e+1} = \{\omega_1^{e+1}, \ldots, \omega_l^{e+1}\}$$

gegeben sind. Dann gilt:

$$\mathfrak{Z}_e \leqq \mathfrak{Z}_{e+1}, \quad k \leqq l, \quad \omega_i^{e+1} \mid H_e = \omega_i^e \quad \textit{für } i = 1, \ldots, k$$

und

$$\omega_i^{e+1} \mid H_e = 0 \quad \textit{für } i = k+1, \ldots, l.$$

Beweis. Aus Konstruktion 3.2.15. folgt $\mathfrak{Z}_e \leqq \mathfrak{Z}_{e+1}$ (das Verfahren könnte evtl. später abbrechen), der Rest ist klar nach der Eindeutigkeitsaussage des Satzes.

2.3.3.2. Satz. *Es sei $J_e \subseteqq H_e$ ein Ideal, $\mathfrak{Z}$ das entsprechende reduzierende System, und es gebe eine Erweiterung J_{e+1} von J_e, der dasselbe $\mathfrak{Z}$ entspricht. Zu J_e gehöre $\Lambda = \{\omega_1^e, \ldots, \omega_k^e\}$, und es sei $\tilde{\omega}_1^{e+1}, \ldots, \tilde{\omega}_k^{e+1} \in H_e$ irgendeine Erweiterung zu einem System von Weierstraßpolynomen von $\mathfrak{Z}$ in H_{e+1}, so daß*

$$\tilde{J}_{e+1} := (\tilde{\omega}_1^{e+1}, \ldots, \tilde{\omega}_k^{e+1})\, H_e$$

minimale Erweiterung von J_e ist. Dann ist $\tilde{\omega}_1^{e+1}, \ldots, \tilde{\omega}_k^{e+1}$ ein System von Weierstraßpolynomen zu $\tilde{J}_{e+1}$.

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß $\mathfrak{Z}$ zu $\tilde{J}_{e+1}$ gehört. Wir wissen (2.3.3.1.), daß $\mathfrak{Z}' \geqq \mathfrak{Z}$ ist, wenn $\mathfrak{Z}'$ zu $\tilde{J}_{e+1}$ gehört. Ist $\mathfrak{Z}' \gtrneqq \mathfrak{Z}$, so ist

$$\dim_{\mathbf{C}} H_{e+1}/J_{e+1} > \dim_{\mathbf{C}} H_{e+1}/\tilde{J}_{e+1}.$$

Dies führen wir zum Widerspruch.
Ist $\hat{J}_{e+1} \subseteqq J_{e+1}$ (J_{e+1} zu $\mathfrak{S}$ gehörig nach Voraussetzung) minimale Erweiterung von J_e, so ist

$$\dim_{\mathbf{C}} H_{e+1}/J_{e+1} \leqq \dim_{\mathbf{C}} H_{e+1}/\hat{J}_{e+1} = \dim_{\mathbf{C}} H_{e+1}/J_{e+1},$$

Widerspruch!

2.3.3.3. Satz. *Es sei $e_0 < e$, $J_{e_0} \subseteqq H_{e_0}$, $J_e \subseteqq H_e$ und J_e minimale Erweiterung von J_{e_0}. Zu J_{e_0}, J_e gehöre dasselbe $\mathfrak{S}$, und es seien $\Lambda_{e_0} = \omega_i^{e_0}$, $i = 1, \ldots, k$, $\Lambda_e = \{\omega_i^e\}$ die zugehörigen Systeme von Weierstraßpolynomen. Wir wählen $1 \leqq p_1 < \cdots < p_r \leqq k$, so daß*

$$\omega_{p_1}^{e_0}, \ldots, \omega_{p_r}^{e_0} \in J_{e_0}$$

ein minimales Erzeugendensystem bilden, und setzen

$$\omega_i^e = t^{\nu^*} + \sum_\mu a_{i\mu} t^\mu, \qquad \sum \text{ reduziert.}$$

Dann existieren γ_i^j, $a_{i\mu}^0 \in \mathbf{C}$, so daß für $|\mu| = e - 1$

$$a_{i\mu} = \sum_{j=1}^r \gamma_i^j a_{p_j\mu} + a_{i\mu}^0$$

gilt mit

$$\gamma_i^j \text{ unabhängig von } \mu,\ e,\ a_{p_j\mu},\ J_e$$

und

$$a_{i\mu}^0 \text{ unabhängig von } a_{p_j\mu}.$$

Beweis. Es ist

$$\omega_i^{e_0} = \sum_{j=1}^r c_{ij} \omega_{p_j}^{e_0}, \qquad c_{ij} \in H_{e_0 - O_j}, \qquad O_j = |\hat{O}(\omega_{p_j}^{e_0})|,$$

$c_{p_ij} = \delta_{ij}$; wir setzen (c_{ij} betrachtet als $\in H$)

$$h_i := \sum_{j=1}^r c_{ij} \omega_{p_j}^e = t^{\nu^*} + \beta_i$$

mit $\omega_i^{e_0} = t^{\nu^*} + \alpha_i^{e_0}$; wegen der Eindeutigkeit folgt

$$\operatorname{red} \beta_i = \sum a_{i\mu} t^\mu =: \alpha_i$$

($\omega_i^{e_0}$ ist Einschränkung von ω_i^e; ν entspricht ν_i); zur Untersuchung der Unabhängigkeit betrachten wir eine zweite minimale Erweiterung $\tilde{J}_e$ von J_{e_0} und o. B. d. A. $\tilde{J}_e/H_{e-1} = J_e/H_{e-1}$

$$\tilde{h}_i = \sum_{j=1}^r c_{ij} \omega_{p_j}^e,$$

$$\tilde{h}_i - h_i = \sum_{j=1}^r c_{ij}(\tilde{\omega}_{p_j}^e - \omega_{p_j}^e) = \tilde{\beta}_i - \beta_i = \sum_{j=1}^r c_{ij}(0) \sum_{|\mu| = e-1} (\tilde{a}_{p_j\mu} - a_{p_j\mu})\, t^\mu$$

(da $\alpha_i = \tilde{\alpha}_i$ auf H_{e-1} ist), folglich ist $\tilde{h}_i - h_i$ reduziert, $\tilde{h}_i - h_i = \operatorname{red} \tilde{\beta}_i - \operatorname{red} \beta_i$. Wir setzen

$$\gamma_i^j = c_{ij}(0), \qquad a_{i\mu}^0 = a_{i\mu} - \sum_{j=1}^r \gamma_i^j a_{p_j\mu};$$

dann ist

$$\sum_\mu (a_{i\mu} - \tilde{a}_{i\mu})\, t^\mu = \sum_j c_{ij}(0) \sum_{|\mu|=e-1} (\tilde{a}_{p_j\mu} - a_{p_j\mu})\, t^\mu ,$$

q. e. d.

2.3.3.3.1. Zusatz: Abschätzungen für $\alpha_i = \sum a_{i\mu} t^\mu$. Es sei

$$\sum_{j=1}^{r} c_{ij}\omega_{p_j}^{e_0} = t^{\nu^*} + \alpha_i^0 \in H; \qquad \beta_i = \sum_j c_{ij}\omega_{p_j}^{e} - t^{\nu^*};$$

es gilt

$$\beta_i = \alpha_i^{e_0} - \sum_{j=1}^{r} c_{ij}(\omega_{p_j}^{e} - \omega_{p_j}^{e_0});$$

daher existiert $K_* \geqq 1$ mit

$$\|\beta_i\| \leqq \|\alpha_i^{e_0}\| + K_* \max \|\omega_{p_j}^{e} - \omega_{p_j}^{e_0}\|$$

(K_* unabhängig von e und $\varrho \leqq \varrho_0$).
Gegeben sei ε, $0 < \varepsilon < 1$, mit

$$\|\alpha_i^0\| \leqq \frac{\varepsilon}{4}\sigma^{-1}\varrho^{\nu^*} \qquad (\nu^* = \nu_i)$$

und

$$\|\omega_{p_j}^{e} - \omega_{p_j}^{e_0}\| \leqq \frac{\varepsilon}{4K_*}\sigma^{-1}\gamma^{e_0-1}, \qquad \gamma = \min\,(1, \varrho_1, \ldots, \varrho_m).$$

Dann ist

$$\varrho^{\nu^*} \geqq \gamma^{e_0-1} \qquad (\text{wegen } |\nu^*| < e_0),$$

$$\|\beta\| = \frac{\varepsilon}{4}\sigma^{-1}\varrho^{\nu^*} + \frac{\varepsilon}{4}\sigma^{-1}\varrho^{\nu^*} = \frac{\varepsilon}{2}\sigma^{-1}\varrho^{\nu^*},$$

$$\|\alpha_i\| = \frac{\|\beta_i\|}{1-\frac{\varepsilon}{4}} = \frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon}{1-\frac{\varepsilon}{4}}\,\sigma^{-1}\varrho^{\nu^*} = \frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon}{1-\frac{\varepsilon}{2}}\,\sigma^{-1}\varrho^{\nu^*} = \varepsilon\sigma^{-1}\varrho^{\nu^*}$$

also

$$\|\alpha_i\| \leqq \varepsilon\sigma^{-1}\varrho^{\nu^*}.$$

2.3.3.3.2. Bemerkung. Existiert eine Erweiterung mit den Eigenschaften aus diesem Satz, so existiert auch eine mit $a_{p_j\mu} = 0$ für $|\mu| = e - 1$ Dann ist insbesondere

$$\|a_{i\mu}^0 t^\mu\| \leqq \varepsilon\sigma^{-1}\varrho^{\nu^*}.$$

2.3.4. Eine weitere Verallgemeinerung des Vorbereitungssatzes und ein Satz über die Lösungen analytischer Gleichungssysteme

Es sei $P \subseteqq \mathbf{C}^n$ der offene Einheitspolyzylinder, $I = O(P)$ der Ring der auf P konvergenten Potenzreihen.
$f \in q(I \hat{\otimes} H_e)$ schreibt sich eindeutig als

$$f = \sum_{|\nu|=0}^{e-1} a_\nu t^\nu, \qquad a_\nu \in qI;$$

es sei $\|a_\nu\| = \max \sup_{Z\in P} |a_i^\nu(Z)|, \qquad a_\nu(Z) = (a_1^{(\nu)}(Z), \ldots, a_q^{(\nu)}(Z)),$

$$\|f\| = \|f\|_\varrho := \sup 2\delta(|\nu| + 1)^{m+2}\, \|a_\nu\|\, \varrho^\nu.$$

2.3.4.1. Bemerkung. Satz 2.3.2.13. läßt sich auf diesen Fall wörtlich übertragen. Wir haben also auch hier eine „Division mit Rest".

Der folgende Satz ist die Grundlage für den Konvergenzbeweis einer noch zu konstruierenden formalen semiuniversellen Deformation.

2.3.4.2. Satz. *Es sei* $\alpha : \mathbf{C}^s \oplus p\mathcal{O} \to q\mathcal{O}$ *ein Homomorphismus (d. h.* α $\mathbf{C}$*-linear und* $\alpha \mid \mathcal{O} \oplus p\mathcal{O}$ *ist* $\mathcal{O}$*-Modulhomomorphismus). Dann gilt nach einer geeigneten linearen Koordinatentransformation in* $\mathcal{O}$*:*

(i) α *läßt sich zu einem* $\hat{\alpha}$: $\mathbf{C}^s \oplus pI \to qI$ *erweitern.*

(ii) $f \in \operatorname{im} \alpha$ *sei aus* qI. *Dann existiert ein* $g \in \alpha^{-1}(f)$ *mit* $\|g\| = K \cdot \|f\|$, $K \geqq 1$ *eine Konstante, die unabhängig von* f *ist,*
$\|g\| := \max(|c_1|, \ldots, |c_s|, \|g_1\|, \ldots, \|g_p\|)$
für $g = (c_1, \ldots, c_s, g_1, \ldots, g_p)$.

Beweis. Es ist

$$\alpha \colon \mathbf{C}^s \oplus p\mathcal{O} \to q\mathcal{O},$$
$$(c, w) \mapsto g \cdot c + r \cdot w,$$
$$c = (c_1, \ldots, c_s), \qquad w = (w_1, \ldots, w_p),$$

dabei

$$g = (g_1, \ldots, g_s) \quad \text{und} \quad r = (r_1, \ldots, r_p) \quad \text{fest mit} \quad g_i, r_j \in q\mathcal{O}.$$

Es sei M der durch $(r_1, \ldots, r_p)$ erzeugte Untermodul von $q\mathcal{O}$. $\mathcal{O}(\bar{P})$ bestehe aus allen Elementen von $\mathcal{O}$, die in einer Umgebung von $\bar{P}$ konvergieren.
Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gilt $g_i, r_j \in \mathcal{O}(\bar{P})$ (d. h., α läßt sich zu $\hat{\alpha}$ erweitern), und $g_1, \ldots, g_s$ sind linear unabhängig in $q\mathcal{O}/M$.
Auf $\mathbf{C}^s \times M$ definieren wir

$$(c, m) := \max(|c_i|, i = 1, \ldots, s, \|m\|_P).$$

Es sei $[\mathbf{C}^s \times M]_1$ die Teilmenge der $(c, m) \in \mathbf{C}^s \times M$ mit $(c, m) = 1$.

Behauptung. $[\mathbf{C}^s \times M]_1$ *ist kompakt.*

Beweis. Es genügt offenbar zu zeigen, daß jede Folge von Elementen aus M, deren Norm $\leqq 1$ ist, ein Grenzelement in M besitzt. Dieses existiert stets in $q\mathcal{O}$, und nach dem Cartanschen Abgeschlossenheitssatz für Untermoduln M von $q\mathcal{O}$ liegt es dann in M.
Nun ist

$$\Phi \colon [\mathbf{C}^s \times M]_1 \to \mathbf{R}$$
$$(c, m) \mapsto \|cg + m\|_P$$

stetig, daher besitzt Φ ein Minimum auf $[\mathbf{C}^s \times M]_1$, dieses sei $m^* \in \mathbf{R}$, $m^* \neq 0$, da die g_i linear unabhängig über M sind. Folglich ist stets

$$\|cg + m\| \geqq m^* \|c, m\| \quad \text{für } (c, m) \in \mathbf{C}^s \times M.$$

Für $f \in \operatorname{im} \alpha$ gilt nun $f = cg + m$, $m \in M$, für ein $c \in \mathbf{C}^s$ mit

$$\|c\| = \|c, m\| \leqq \frac{1}{m^*} \|f\|.$$

Wir sind fertig, falls wir zeigen können, daß jedes Element $m \in M$ sich in der Form $r \cdot w$ darstellen läßt mit

$$\|\omega\| = Q\|m\| \quad \left(= Q\|c, m\| \leqq \frac{Q}{m^*} \|f\|\right).$$

Dies folgt aber aus

2.3.4.3. Satz (Verallgemeinerter Idealbasissatz von HILBERT-RÜCKERT). *Es sei $M = (G_1, \ldots, G_p) \subseteq q\mathcal{O}$. Dann existiert (nach einer geeigneten linearen Koordinatentransformation) ein abgeschlossener Polyzylinder $\bar{P}$ um $O \in \mathbf{C}^n$ sowie eine Konstante $Q > 0$, so daß $F \in M(\bar{P})$ sich stets in der Form*

$$F = \sum_{j=1}^{p} h_j G_j$$

mit $h_j \in O(\bar{P})$ schreiben läßt und

$$\|h_j\|_P = Q\|F\|_P, \qquad j = 1, \ldots, p,$$

gilt.
Ist überdies eine endliche Zahl solcher Untermoduln zusammen mit entsprechenden Erzeugendensystemen gegeben, so lassen sich in einem geeigneten Polyzylinder entsprechende Gleichungen und Abschätzungen für alle diese Untermoduln gleichzeitig erfüllen.

2.3.5. Konstruktion einer formal semiuniversellen analytischen Deformation
Es sei wieder

$$\mathcal{O} = K_n, \qquad H = K_m,$$

und wir verwenden die Sprache der Mengenkeime analytischer Funktionen im jeweiligen Koordinatenursprung; $V(J_0) = X_0 \subseteq \mathbf{C}^n$, $\mathcal{O}/J_0$ reduziert sowie $J \subseteq \mathcal{O} \hat{\otimes} H$, $J \subsetneqq H$ Ideale, die zwei Einbettungen

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m \arrow[r] & \mathbf{C}^m \\
X \arrow[u, hook, "I"'] \arrow[r, "\pi"] & Y \arrow[u, hook, "J"']
\end{tikzcd}$$

definieren.

2.3.5.1. Bemerkung. Die Deformationen von $\mathcal{O}/J_0$ entsprechen genau den so gebildeten Abbildungen π mit

(i) $\quad \pi^{-1}(0) = X_0$,

(ii) $\quad \pi$ flach.

Deformationen sind also Paare (I, J) von Idealen.

2.3.5.2. Definition.

(i) Es seien durch Ideale $J_1, J_2 \subsetneqq H$, $I_1, I_2 \subseteq \mathcal{O} \hat{\otimes} H$ zwei Deformationen (I_1, J_1) und (I_2, J_2) von X_0 gegeben. Diese heißen *äquivalent*, falls Isomorphismen φ, ψ mit

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "\varphi", "\sim"'] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H \arrow[d] \\
\mathcal{O} \hat{\otimes} H \arrow[r, "\psi", "\sim"'] & \mathcal{O} \hat{\otimes} H
\end{tikzcd}$$

und $\varphi(J_1) = J_2$, $\psi(I_1) = I_2$ existieren.

(ii) (I_1, J_1) und (I_2, J_2) heißen *isomorph*, falls sie äquivalent sind mit $\varphi = \mathrm{id}$.

2.3.5.3. Definition. Es sei (I, J) Deformation von X_0. Dann heißt diese *semiuniversell*, falls

(i) $J \subseteq \mathfrak{m}(H)^2$;

(ii) jede holomorphe Deformation (I_1, J_1) von X_0 läßt sich durch Liftung längs eines Homomorphismus $\varphi: H \to H_1$ mit $\varphi(J) \subseteq J_1$ erhalten, wobei $\varphi': H/\mathfrak{m}^2 + J \to H_1/\mathfrak{m}_1^2 + J_1$ eindeutig bestimmt ist.

2.3.5.4. Bemerkung. Ein semiuniverselles Paar (I, J) ist bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt.

Wir setzen von nun an voraus, X_0 habe in $O \in \mathbf{C}^n$ eine isolierte Singularität. Nach dem Existenzsatz von SCHLESSINGER existiert dann eine formale semiuniverselle Deformation, und dies können wir nach 2.2.6. so formulieren:

2.3.5.5. Satz. *J_0 habe ein fest gewähltes Erzeugendensystem $f = (f_1, \ldots, f_d) \in d\mathcal{O}$. Dann gilt:*
Für alle $e \geqq 1$ existiert ein $J_e \subseteq H_e$ und

$$F^{(e)}(z, t) = \sum_{|\nu|=0}^{e-1} F_\nu(z)\, t^\nu, \qquad F_\nu \in d\mathcal{O},$$

mit

(i) $F_0(z) = f(z), \qquad \pi^*(J_e) \subseteq I_e := \mathcal{O} \mathbin{\hat{\otimes}} H_e \cdot (F^{(e)})$,

(ii) *$g \in d\mathcal{O}$ mit $gf = 0$ in $\mathcal{O}$, so existiert eine Familie*

$$G = \sum_{|\nu|=1}^{e-1} G_\nu(z)\, t^\nu \qquad \text{mit } G_0(z) = g$$

und

$$GF \equiv 0 \bmod I_e \quad \text{in} \quad \mathcal{O} \mathbin{\hat{\otimes}} H_e,$$

(iii) *$(F^{(e)}, J_e)$ ist semiuniversell in $\mathcal{E}/H_e$,*

(iv) $F^{(e+1)}/H_e = F^{(e)}, \qquad J_{e+1}/H_e = J_e$.

Jede Fortsetzung einer Familie bis zur Ordnung e_0, die die Eigenschaften (i) *bis* (iv) *beibehält, ist dann formal semiuniversell.*

Wir behalten nun die Bezeichnungen aus 2.3.5.5. für die gegebene formal semiuniverselle Deformation bei.

2.3.5.6. Bemerkung. Für $e \geqq e_0 \geqq 2$ sind die Erweiterungen J_e minimal über J_{e-1}.

2.3.5.7. Satz. *Es sei $e \geqq e_0$, $\tilde{J}_{e+1}$ minimale Erweiterung von J_e, und es seien $(\tilde{F}^{(e+1)}, \tilde{J}_{e+1})$ mit* (i), (ii) *aus* 2.3.5.5. *gegeben sowie $\tilde{F}^{(e+1)}/H_2 = F^{(2)}$. Dann sind $(\tilde{F}^{e+1}, \tilde{J}_{e+1})$ und (F^{e+1}, J_{e+1}) äquivalent.*

Beweis. (F^{e+1}, J_{e+1}) ist semiuniversell, d. h., es gibt ein

$$\varphi: H_{e+1} \to H_{e+1}$$

mit

$$\varphi(F^{e+1}, J_{e+1}) = (\tilde{F}^{e+1}, \tilde{J}_{e+1})$$

mit eindeutig bestimmter Ableitung φ', daher ist $\varphi' = \mathrm{id}$. Folglich ist φ Isomorphismus (Jacobischer Umkehrsatz); es ist $\varphi(J_{e+1}) = \tilde{J}_{e+1}$ und $\tilde{J}_{e+1}/H_e = J_e$, daher

$$\dim_{\mathbf{C}} (\varphi(J_{e+1}) \mid H_e) = \dim_{\mathbf{C}} J_e,$$

d. h. $\varphi(J_{e+1}) \mid H_e = J_e$, und da $\varphi(J_{e+1}) \subseteqq \tilde{J}_{e+1}$ (minimal) ist, folgt $\varphi(J_{e+1}) = \tilde{J}_{e+1}$, d. h., die Deformationen sind äquivalent.

Wir beginnen nun mit der Konstruktion einer konvergenten Folge $(J_e, F^{(e)})$.

I. Wir fixieren eine formal semiuniverselle Folge $(F^e, J_e)_{e\in N}$ mit folgenden Eigenschaften:
Ist $e \gg 0$, so ist $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}(J_e) = \mathfrak{s}(J_{e+1})$ fest, J_{e+1} über J_e minimal, und zu jeder minimalen Erweiterung $\tilde{J}_{e+1}$ von J_e mit (i), (ii) gehört dasselbe $\mathfrak{s}$.
(Dann gilt (i) bis (iv) für (F^{e+1}, J_{e+1}), und man kann J_{e+1} zu einer formal semiuniversellen Deformation fortsetzen nach 2.3.5.7.)

Beweis für I. Induktive Konstruktion; es sei $e \geqq e_0$,

$$M_e = \{(\tilde{F}^{e+1}, \tilde{J}_{e+1}) \text{ mit (i), (ii) minimale Erweiterung}\} \neq \emptyset .$$

Falls in M ein Element mit $\mathfrak{s}(J_{e+1}) > \mathfrak{s}(J_e)$ existiert, wählen wir $J_{e+1} = \tilde{J}_{e+1}$, und falls alle derartigen $\mathfrak{s}$ gleich sind ($=: \mathfrak{s}_e$), ein beliebiges Element. Die entstehende Folge hat die geforderte Eigenschaft, da $\mathfrak{s}_e \leqq \mathfrak{s}_{e+1} \leqq \cdots$ abbricht.

II. Es sei e hinreichend groß (wie in I); $e \geqq e_0$,

$$\left.\begin{array}{ll}(F^e, J_e) \quad \text{mit} & \Lambda_e = \{\omega_i^e, i = 1, \ldots, l\} \\ (F^{e+1}, J_{e+1}) \quad \text{mit} & \Lambda_{e+1} = \{\omega_i^{e+1}, \quad i = 1, \ldots, l\}\end{array}\right\} \omega_i^{e+1}/H_e = \omega_i^e$$

gegeben und $1 \leqq p_1 < \cdots < p_r \leqq l$ fest gewählt, so daß $\{\omega_{p_i}^e, i = 1, \ldots, r\}$ minimales Erzeugendensystem von J_e ist für alle $e \geqq e_0$;
die reduzierten Glieder von ω_i^{e+1} mit $|\nu| = e$ seien $a_{i\nu} t^\nu$;
weiter $a_{p_j\nu} =: b_{i\nu}$, und es sei $H \in d(\mathcal{O} \,\hat{\otimes}\, H_{e+1})$;
$\{\omega_i^0\}$ entstehe aus $\{\omega_i^{e+1}\}$ durch Einsetzen von $b_{i\nu} = 0$ für $|\nu| = e$ (vgl. 3.3.3.2.). Dann gilt

$$H = \sum_{i=0}^{l} Q_i \omega_i^0 + R^0,$$

$$H = \sum_{i=1}^{l} Q_i \omega_i^{e+1} + \underbrace{\sum_{|\nu|=e} R_\nu t^\nu}_{\text{reduziert}}$$

mit $R_\nu = R_\nu^0 - \sum_{j=1}^{r} c_j b_{j\nu}$ und $c_j \in d\mathcal{O}$ unabhängig von e.

Beweis für II. Nach 3.3.3. folgt

$$a_{i\nu} = \sum_{j=1}^{r} \gamma_i^j a_{p_j\nu} + a_{i\nu}^0,$$

γ_{ij} unabhängig von e, ν, $a_{p_j\nu}$ und weiter die $a_{i\nu}^0$ unabhängig von $a_{p_j\nu} = b_{j\nu}$.
$\omega_i^{e+1} \xmapsto{b_{j\nu}=0} \omega_i^0$ wird nun ein Weierstraßsystem einer minimalen Erweiterung zu $\mathfrak{s}$.
Weiter ist

$$H = \sum_{i=1}^{e} Q_i \omega_i^0 + R^0, \qquad Q_i \in d(\mathcal{O} \,\hat{\otimes}\, H_{e+1}),$$

$$\omega_i^{e+1} - \omega_i^0 = \sum_{|\nu|=e} \sum_{j=1}^{r} \gamma_i^j b_{j\nu} t^\nu,$$

daher

$$H = \sum_{i=1}^{e} Q_i \omega_i^{e+1} + \left(R^0 - \sum_{|\nu|=e} \sum_{i=0}^{e} Q_i(0) \sum_{j=1}^{r} \gamma_i^j b_{j\nu} t^\nu \right),$$

$$R_\nu = R_\nu^0 - \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{r} Q_i(0)\, \gamma_i^j b_{j\nu} \qquad \text{für } |\nu| = e,\ \nu \text{ reduziert.}$$

Wegen der Eindeutigkeit der Reduktion ist Q_i/H_{e_0} eindeutig bestimmt. Daraus folgt, daß $Q_i(0)$ unabhängig von e ist,

$$R_\nu = R_\nu^0 - \sum_{j=1}^{r} c_j b_{j\nu}$$

mit $c_j = \sum_i Q_i(0)\, \gamma_i^j \in d\mathcal{O}$ unabhängig von e, q. e. d.

Bezeichnungsweise: Wir schreiben red^0 für die Reduktion bezüglich $\{\omega_i^0\}$, red^{e+1} für die Reduktion bezüglich $\{\omega_i^{e+1}\}$ und $\square_\nu$ für den Koeffizienten $\square$ bei t^ν.

III. Fortsetzung von (F^e, J_e) mit (i) bis (iii) zu (F^{e+1}, J_{e+1}) mit (i) bis (iv). Es sei $e \geqq e_0$, $g = (g_1, \ldots, g_d) \in d\mathcal{O}$ mit $g \cdot f = 0$.
Wenn (F^{e+1}, J_{e+1}) existiert, existiert $G^{e+1} \in d(\mathcal{O} \mathbin{\hat{\otimes}} H_{e+1})$ mit $G^{e+1} \cdot F^{e+1} = 0$ in $\mathcal{O} \mathbin{\hat{\otimes}} H_{e+1}/J_{e+1}$ und o. B. d. A. G^{e+1}, F^{e+1} reduziert.
Sind F^e, G^e die Einschränkungen auf H_e, $G^{e+1} = G^e + \gamma$, $F^{e+1} = F^e + \Phi$, so folgt

$$G^{e+1} \cdot F^{e+1} = G^e \cdot F^e + \gamma \cdot f + g \cdot \Phi,$$

daher ist

$$0 = \mathrm{red}_\nu^{e+1}(G^{e+1} \cdot F_\nu^{e+1}) = \mathrm{red}_\nu^{e+1}(G^e \cdot F^e) + \gamma_\nu \cdot f + g \cdot \Phi_\nu$$

und folglich

$$\left.\begin{aligned} &0 = \mathrm{red}_\nu^0(G^e \cdot F^e) + \gamma_\nu \cdot f + g \cdot \Phi_\nu - \sum_{j=1}^{r} c_j b_{j\nu}, \\ &\text{und } c_j \text{ nur von } G^e \cdot F^e/H_{e_0} \text{ abhängig,} \end{aligned}\right\} |\nu| = e. \tag{$*$}$$

In dieser Gleichung kommen γ_ν, Φ_ν, $b_{j\nu}$ als Unbestimmte vor, wenn die Konstruktion bis zur Ordnung e bereits durchgeführt ist. Eine Lösung dieser Gleichung existiert für gegebene G^e, F^e stets. Es sei also N der Untermodul

$$N = \{g \in d\mathcal{O},\ g \cdot f = 0\} \quad \text{von} \quad d\mathcal{O},$$

$N = (g_1, \ldots, g_q)$, zu g_p sei ein G_p^e sowie F^e definiert, dann können wir G_p^e, $p = 1, \ldots, q$, und F^e fortsetzen, d. h., das System

$$\mathrm{red}_\nu^0(G_p^e \cdot F^e) = \sum_{j=1}^{r} c_{p_j}(z)\, b_{j\nu} - g_p \Phi_\nu - \gamma_{p\nu} f \tag{$\boxtimes$}$$

($c_{p_j}(z)$ nur von $G_p^e \cdot F^e/H_{e_0}$ abhängig) ist lösbar, und jede Lösung ($e \gg 0$) ist äquivalent zur gegebenen Schlessinger-Deformation in der Ordnung $e + 1$.
Um diese induktive Konstruktion zu rechtfertigen, müssen wir jedoch noch zeigen: Ein beliebiges G^e aus $(*)$ läßt sich zu G^{e+1} fortsetzen, d. h.

Behauptung. $\mathrm{red}_\nu^0(G^e \cdot F^e) - \sum_j c_j b_{j\nu} \mid X_0$ *ist nur von* $g \mid X_0$ *abhängig, nicht von* G^e (*dann kann man* Φ_ν, γ_ν *nach dem Existenzsatz geeignet wählen*).

Beweis. Wegen $G^{e+1} \cdot F^{e+1} \equiv G^e \cdot F^e + \gamma f + g\Phi \bmod \mathfrak{m}^{e+1}$ genügt es zu zeigen: Für beliebige Multiindizes l mit $|l| = e$ ist

$$H(G) = \sum_{\substack{\nu+\mu=l \\ \nu,\mu \neq 0}} G_\nu F_\mu \mid X_0$$

unabhängig von der Wahl von G $(1 \leqq |\nu| \leqq e-1)$, sofern nur

$$\sum_{\nu+\mu=l'} G_\nu F_\mu = 0 \qquad \text{für } 0 \leqq |l'| \leqq e-1 \tag{S}$$

gilt. Dies zeigen wir durch absteigende Induktion nach $q = |\nu| \leqq e-1$, ν der Index von G_ν.

$q = e-1$: Dann ist $(\tilde{G}_\nu - G_\nu)\, f = 0$ für $|\nu| = e-1$, G mit Eigenschaft (S). Daher folgt aus nachstehendem Zusatz $(\tilde{G}_\nu - G_\nu)\, F_\mu \in I_0$ für $|\mu| = 1$, q. e. d.

Zusatz. Ist $n \in \mathsf{N}$, so gilt stets $n \cdot F_\mu \in I_0$ für $|\mu| = 1$ (man betrachte $e = 2$).

$q < e-1$: ν' mit $|\nu'| = q$ sei fest gewählt; wir ändern $G_{\nu'}$ durch $\tilde{G}_{\nu'}$. Dann muß wegen (S) für ein G, das sich nur für $|\nu| \geqq q$ von G unterscheidet, stets $Q = \tilde{G}_{\nu'} - G_{\nu'} \in \mathsf{N}$ sein.

Wir setzen Q fort zu $\bar{Q} = \sum_c Q_c t^c$, $Q_0 = Q$ mit $\bar{Q}F = 0$, d. h. $\sum_{c+\mu=l} Q_c F_\mu = 0$ für $|l| \leqq e-1$.

Wir definieren eine Fortsetzung von $\tilde{G}_{\nu'}$ zu $\tilde{G}$ durch

$$\tilde{G}_{\nu'+c} = G_{\nu'+c} + Q_c, \qquad \tilde{G}_\nu = G_\nu \quad \text{für} \quad \nu \not\geqq \nu'$$

und erhalten (S) für G. Nun gilt für $|l| = e$

$$H(G)_l = H(G)_l + \sum_{\substack{c+\mu=d \\ \mu \neq 0}} Q_c F_\mu \qquad \text{mit } d = l - \nu',$$

und wegen $|d| \leqq e-1$ folgt

$$\sum_{\substack{c+\mu=d \\ \mu \neq 0}} Q_c F_\mu = -Q_d \cdot f \in I_0,$$

q. e. d.

IV. Konvergenzbeweis. Zu zeigen bleibt: Bei geeigneter Wahl von $b_{j\nu}$, Φ_ν, γ_ν konvergieren die Folgen $\{G_p^e\}_e$, $\{F^e\}_e$, $\{\omega_i^e\}_e$. Wir suchen ein ϱ, so daß alle Normen beschränkt bleiben. Es sei die Konstruktion bis zur Potenz e gegeben; zu lösen ist dann

$$\operatorname{red}_\nu^0 (G_p^e \cdot F^e) = \sum_{j=1}^{r} c_{p_j}(z)\, b_{j\nu} - g_p \Phi_\nu - \gamma_{p\nu} \cdot f \tag{⧅}$$

$$\text{für} \quad p = 1, \ldots, q, \quad |\nu| = e.$$

Die von ν unabhängigen c_{pj}, g_p, f definieren eine Abbildung

$$\mathbf{C}^r \oplus \mathcal{O}^{1+q} \to \mathcal{O}^d,$$

und nach 2.5.2. gilt: Es gibt eine Lösung von (⧅) mit

$$|b_{j\nu}|, \|\Phi_\nu\|, \|\gamma_{p\nu}\| \leqq K \cdot \max_p \|\operatorname{red}^0 (G_p^e \cdot F^e)\|$$

und K unabhängig von e (nur von c_{p_j}, die bereits durch die Einschränkung auf die Ordnung e_0 eindeutig bestimmt sind!). Wir setzen

$$F^e = f + F' + F'' \quad \text{mit} \quad F' = F^{e_0} - f,$$
$$G_p^e = g_p + G_p' + G_0'' \quad \text{mit} \quad G_p' = G_p^{e_0} - g_p,$$
$$\omega_i^e = \omega_i' + \omega_i'' \quad \text{mit} \quad \omega_i' = \omega_i^{e_0},$$

geben $\varepsilon > 0$ beliebig vor, wählen ϱ mit $\|\alpha_i^{e_0}\|_\varrho \leqq \varepsilon\sigma^{-1}\varrho^{\nu^*}$ (vgl. 2.4.3.), $\gamma = \min(1, \varrho_1, \ldots, \varrho_m)$. Dann ist für alle ν

$$\varrho^{\nu^*} \geqq \gamma^{e_0-1} \quad (\text{da } |\nu^*| < e_0).$$

Wir wählen $c \geqq d(2 + \gamma^{e_0-1}) + r + 1$, K_0 mit $\dfrac{K_0 K}{1-\varepsilon} c \leqq 1$, $K_0 \leqq \dfrac{\varepsilon}{4K_*}\sigma^{-1}$ (K_* wie in 2.4.3.1.). Weiter ist

$$(g + G_p')(f + F') \equiv 0 \qquad \mathrm{mod}\ (m^{e_0}, J_{e_0}),$$

also

$$(g + G_p')(f + F') = \sum Q_j^{(p)}\omega_{p_j}^{e_0}, \qquad Q_j^{(p)} \in \mathcal{O}\,\widehat{\otimes}\,\mathcal{H}_{e_0}.$$

Ist

$$Q_j^{(p)\prime} := Q_j^{(p)}(z, t) - Q_j^{(p)}(z, 0),$$

so können wir durch Multiplikation von ϱ mit einer kleinen positiven Zahl erreichen, daß

$$\|F'\| \leqq K_0, \qquad \|G_p'\| \leqq K_0,$$
$$\|(g_p + G_p')(f + F') - \sum Q_j^{(p)}\omega_{pj}'\| \leqq K_0^2\gamma^{e_0-1}, \qquad \|Q_j^{(p)}\| \leqq K_0$$

ist (wir betrachten alle Potenzreihen als $\mathcal{O}\,\widehat{\otimes}\,H$); nun folgt

$$\begin{aligned}\mathrm{red}_\nu^0(G_p^e \cdot F^e) &= \mathrm{red}_\nu^0((g_p + G_p')(f + F') + G_p''F + G_p'F'' + G_p''F'') \qquad (\boxtimes)\\ &= \mathrm{red}_\nu^0((g_p + G_p')(f + F') - \sum Q_j^{(p)}\omega_{p_j}' - \sum Q_j^{(p)}\omega_{p_j}''\\ &\quad + G_p''F' + G_p'F'' + G_p''F'').\end{aligned}$$

I n d u k t i v e K o n s t r u k t i o n. Wir wählen $\|\alpha_i^0\| = K_0\varrho^{\nu^*}$ ($K \leqq \varepsilon$) so klein, daß noch 3.3.3.1. erfüllt ist (K_*, $K_0 \leqq \varepsilon$ können unverändert bleiben).
Induktionsvoraussetzung: $\|F''\|$, $\|G_p''\|$, $\|\omega_{p_j}''\| \leqq K_0\gamma^{e_0-1}$ (Ordnung e).
Nach ($\boxtimes$) und der Abschätzung für red (vgl. 3.2.13.) folgt

$$\|t^\nu, \mathrm{red}_\nu^0(\ldots)\| \leqq \frac{1}{1-\varepsilon}\|(\ldots)\| \leqq \frac{cK_0^2}{1-\varepsilon}\gamma^{e_0-1},$$

also

$$\|b_{j\nu}t^\nu\|, \quad \|\Phi_\nu t^\nu\|, \quad \|\gamma_{p_\nu}t^\nu\| = \frac{KK_0}{1-\varepsilon}cK_0 = K_0\gamma^{e_0-1}$$

(Ordnung $e + 1$), und weiter nach 3.3.3.1.

$$\|\alpha_i^{e+1}\| \leqq \varepsilon\sigma^{-1}\varrho^{\nu^*};$$

daher ist die induktive Voraussetzung für den nächsten Schritt erfüllt, und die Normen der formalen Potenzreihen ω_i, G_p, F (für $e = \infty$) sind endlich, q. e. d.

2.3.6. **Nachweis der analytischen Semiuniversalität von (F, J)**

Es sei $J \subsetneqq H_m$ in allgemeiner Lage (d. h. reduzierbar); (G, K) sei Deformation von X_0, $K \subsetneqq H_q = \mathbb{C}\{u_1, \ldots, u_q\}$ ebenfalls Ideal in allgemeiner Lage, $G \in d \cdot (\mathcal{O} \hat{\otimes} H_q)$, $G = G(z, u)$ mit $G(z, 0) = f(z)$.

Zu zeigen ist dann: Es gibt ein Paar (φ, ψ) von Morphismen und ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O} \hat{\otimes} H_m \arrow[d] & H_m \arrow[l] \arrow[d] \\
\mathcal{O} \hat{\otimes} H_q \arrow[d] & H_q \arrow[l] \arrow[d, equal, "\mathrm{id}"] \\
\mathcal{O} \hat{\otimes} H_q & H_q \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

so daß die untere Zeile durch das Ideal K die Deformation (G, K) induziert. Dies ist äquivalent mit der Angabe folgender Bedingungen:

(i) $\quad \varphi$ durch $\sum\limits_{|\mu|=1} k_\mu t^\mu m \cdot H_q$

mit

$h(\sum k_\mu t^\mu) \in K \qquad$ für $h(t) \in J$,

(ii) $\quad \psi$ durch

$$(z, u) \mapsto \left(z - \sum_{|\mu|=1}^{\infty} c_\mu u^\mu, u\right)$$

mit

$\sum c_\mu u^\mu \in u \cdot (\mathcal{O} \hat{\otimes} H_q)$,

denn für $u = 0$ muß ψ die Identität auf X_0 induzieren,

(iii) $\quad$ eine Transformation

$$T = (E_d - A) \colon d(\mathcal{O} \hat{\otimes} H_q) \to d(\mathcal{O} \hat{\otimes} H_q),$$

$$A = \sum_{|\mu|=1} A_\mu(z)\, u^\mu \in d^2(\mathcal{O} \hat{\otimes} H_q)$$

mit $(E_d - A) \cdot G(\psi(z, u)) \equiv F(z, \varphi(t)) \bmod K$

(T hat o. B. d. A. diese Gestalt, da aus

$T \cdot G(\psi(z, u)) = F(z, \varphi(t)) \qquad$ für $u = 0$

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
T(z, 0) \cdot G(z, 0) \arrow[dr, equal] & = & F(z, 0) \arrow[dl, equal] \\
 & f(z) &
\end{tikzcd}$$

folgt).

Bemerkung. Die Bedingungen (i) bis (iii) sind auch hinreichend dafür, daß (G, K) durch (F, J) induziert wird (Charakterisierung flacher Deformationen durch Gleichungen).

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir folgendes voraus:

G und die Reihen (i) bis (iii) reduziert bezüglich K, F reduziert bezüglich J.

Nach dem Existenzsatz für den formalen Fall wissen wir nun: Für alle $e \in N$ gilt:

Es gibt reduzierte Potenzreihen (*)

$$\sum_{|\mu|=1}^{e-1} A_\mu u^\mu, \quad \sum_{|\mu|=1}^{e-1} c_\mu u^\mu, \quad \sum_{|\mu|=1}^{e-1} k_\mu u^\mu$$

mit

$$\left(E - \sum_{|\mu|=1}^{e-1} A_\mu u^\mu\right) \cdot G\left(z - \sum_{|\mu|=1}^{e-1} c_\mu u^\mu, u\right) = F\left(z, \sum_{|\mu|=1}^{e-1} k_\mu u^\mu\right) \quad \bmod (\mathfrak{n}^e + K_e)$$

mit $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}(H_q)$, $K_e = K/(H_q/\mathfrak{n}^e)$ und

$$h^e\left(\sum_{|\mu|=1}^{e-1} k_\mu u^\mu\right) \in K_e + \mathfrak{n}^e \qquad \text{für } h \in J_0,$$

und diese lassen sich auf die Ordnung $e+1$ fortsetzen.

Die Bedingung (*) für alle e ist äquivalent mit der formalen Semiuniversalität, (F, J) ist analytisch semiuniversell, falls man für große e diese Reihen konvergent fortsetzen kann.

Induktive Konstruktion. Wir setzen die Bedingung (*) für die Ordnung e als gegeben voraus.

I. Reduktion auf ein Gleichungssystem. Es sei

$$F(z, t) = f + \sum_{|\nu|=1} \varphi_\nu(z)\, t^\nu, \qquad \varphi_i(z) := \varphi(0, \ldots, \underset{i}{1}, \ldots, 0);$$

red sei die K-Reduktion; es sei

$$\operatorname{red}\left(E - \sum_{|\mu|=1}^{e-1} A_\mu u^\mu\right) G\left(z - \sum_{|\mu|=1}^{e-1} c_\mu u^\mu, u\right) = f + \sum_{|\nu|=1} \gamma_\nu^e u^\nu,$$

$$\operatorname{red} F\left(z, \sum_{|\mu|=1}^{e-1} k_\mu u^\mu\right) = f + \sum_{|\nu|=1} \varphi_\nu^e u^\nu,$$

weiter

$$G(z - w, u) = \sum_{|\varkappa|=0} G_\varkappa(z, u)\, w^\varkappa, \qquad G_0(z, u) = G(z, u)$$

(Entwicklung nach w),

$$G_{(0, \ldots, \underset{i}{1}, \ldots, 0)}(z, u) =: \gamma_i(z, u), \qquad \gamma_i(z, 0) = -\frac{\partial f}{\partial z_i}.$$

Durch Hinzufügen der Glieder der Ordnung e ergibt sich

$$\operatorname{red}\left(\left(E - \sum_{|\mu|=1}^{e} A_\mu u^\mu\right) \cdot G\left(z - \sum_{|\mu|=1}^{e} c_\mu u^\mu, u\right)\right)$$

$$= \operatorname{red}\left(F\left(z, \sum_{|\mu|=1}^{e} k_\mu u^\mu\right)\right) \bmod \mathfrak{n}^{e+1},$$

daher ist, wenn $c_\mu = (c_{1\mu}, \ldots, c_{n\mu})$, $k_\mu = (k_{1\mu}, \ldots, k_{m\mu})$ ist,

$$f + \sum_{|\nu|=1} \gamma_\nu^e u^\nu - \left(\sum_{|\mu|=e} A_\mu u^\mu\right) \cdot f - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial z_i} \cdot \sum_{|\mu|=e} c_{i\mu} u^\mu\right)$$

$$= f + \sum_{|\nu|=1} \varphi_\nu^e u^\nu + \sum_{i=1}^{m} \varphi_i \sum_{|\mu|=e} k_{i\mu} u^\mu \bmod \mathfrak{n}^{e+1},$$

folglich

$$\gamma_\nu^e - \varphi_\nu^e = A_\nu \cdot f + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_i} c_{i\nu} + \sum_{i=1}^{m} \varphi_i k_{i\nu} \qquad \text{für } |\nu| = e. \tag{**}$$

Behauptung. Wenn A_ν, c_ν, k_ν die Bedingung (**) erfüllen, genügen sie bereits der Bedingung (*).

Beweis. Es ist nur die letzte Eigenschaft zu überprüfen. Nach Voraussetzung ist für die Ordnung e bereits

$$\sum_{|\nu|=e} h_{j\nu}^e u^\nu = \operatorname{red} h_j \left(\sum_{|\mu|=1}^{e-1} k_\mu u^\mu \right) \equiv 0 \mod \mathfrak{n}^e;$$

daher folgt

$$\operatorname{red} h_j \left(\sum_{|\mu|=1}^{e} k_\mu u^\mu \right) \equiv \sum_{|\nu|=e}^{\infty} h_{j\nu}^e u^\nu + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial h_j(0)}{\partial t_i} \sum_{|\mu|=e} k_{i\mu} u^\mu \equiv 0 \mod \mathfrak{n}^{e+1};$$

wegen $J_2 = 0$ ist $\dfrac{\partial h_j(0)}{\partial t_i} = 0$, daher

$$\operatorname{red} h_j \left(\sum_{|\mu|=1}^{e} k_\mu u^\mu \right) \equiv \sum_{|\nu|=e} h_{j\nu}^e u^\nu \equiv 0 \mod \mathfrak{n}^{e+1},$$

folglich $h_j^e = 0$ für $|\nu| = e$, q. e. d.

II. **Konvergenzbeweis.** Um auf (**) wieder 3.4.2. anwenden zu können, müssen wir γ_ν^e und φ_ν^e abschätzen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $n = \operatorname{emdim} X_0$; dann ist

$$\frac{\partial f(0)}{\partial z_i} = 0, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Das z-Koordinatensystem wird so geändert, daß

$$\|f\|, \left\| \frac{\partial f}{\partial z_i} \right\|, \|G_\varkappa(z, 0)\| \leqq 1,$$

und das t-Koordinatensystem so, daß

$$\|\varphi_i(z)\| < 1$$

ist; wir wählen ϱ so, daß

$$\|G_\varkappa(z, u)\| \leqq 1,$$

$$\|\gamma_i'(z, u)\| \leqq \delta \quad \text{mit} \quad \gamma_i = \gamma_i(z, 0) + \gamma_i'(z, u),$$

ist, $\delta > 0$ vorgegeben; weiter sei

$$\|G'(z, u)\| \leqq \delta, \qquad G = G(z, 0) + G'(z, u).$$

Induktive Konstruktion. Induktionsvoraussetzung:

$$\left\| \sum_{|\mu|=1}^{e-1} A_\mu u^\mu \right\|, \quad \left\| \sum_{|\mu|=1}^{e-1} c_\mu u^\mu \right\|, \quad \left\| \sum_{|\mu|=1}^{e-1} k_\mu u^\mu \right\| \leqq K$$

und $0 < K \leqq \dfrac{1}{2}$ eine Konstante.

(α) Abschätzung für γ_ν^e: Es ist

$$\left(E - \sum_{|\mu|=1}^{e-1} A_\mu u^\mu\right) \cdot G\left(z - \sum_{|\mu|=1}^{e-1} c_\mu u^\mu, u\right)$$
$$= f(z) + G'(z, u) + \sum_i \gamma_i(z, 0) \sum_{|\mu|=1}^{e-1} c_{i\mu} u^\mu$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \gamma_i' \sum_{|\mu|=1}^{e-1} c_{i\mu} u^\mu + \sum_{|\varkappa|=2} G_\varkappa(z, u) \left(\sum_{|\mu|=1}^{e-1} c_{j\mu} u^\mu\right)$$
$$- \left(\sum_{|\mu|=1}^{e-1} A_\mu u^\mu\right) \cdot (f + G' + \cdots),$$

und

$$f + \sum \gamma_i(z, 0) \sum_{|\mu|=1}^{e-1} c_{i\mu} u^\mu - f \sum_{|\mu|=1}^{e-1} A_\mu u^\mu$$

ist reduziert und enthält keinen Term der Ordnung e, d. h., er kann in der Abschätzung für red(...) weggelassen werden, d. h., nach 2.3.2.13. (Abschätzung) ist

$$(1 - \varepsilon) \|\sum_{|\nu|=e} \gamma_\nu^e u^\nu\| \leqq \delta + n\delta K + K^2 \cdot \frac{1}{1-K} + K\left(\delta + nK + n\delta K + \frac{K^2}{1-K}\right)$$
$$\leqq \delta + (n+1) K\delta + K^2(2 + n + n + 1) \leqq K\theta(1 - \varepsilon)$$

und $0 < \theta < \frac{1}{2}$ beliebig klein, wenn δ, K klein genug gewählt werden.

Also ist

$$\|\sum_{|\nu|=e} \gamma_\nu^e u^\nu\| \leqq \theta \cdot K.$$

(β) Abschätzung für φ_ν^e: Es ist

$$F\left(z, \sum_{|\mu|=1}^{e-1} k_\mu u^\mu\right) = f + \sum_{|\nu|=1} \varphi_\nu(z) \left(\sum_{|\mu|=1}^{e-1} k_\mu u^\mu\right),$$

wir wählen diesmal ϱ für H_m so klein, daß

$$\sum_{|\nu|=1} \|F_\nu\| \alpha^{|\nu|-1} < S$$

ist für $\alpha \leqq \alpha_0 \in R$; ist weiter

$$\varrho_i < \delta = \frac{\theta}{S} K(1 - \varepsilon),$$

so ist für $K \leqq \alpha_0$

$$\|\sum_{|\nu|=1} \varphi_\nu(\sum k_\mu u^\mu)\| \leqq \delta S = \theta K(1 - \varepsilon),$$

d. h.

$$(1 - \varepsilon) \|\mathrm{red}\, F(z, \sum k_\mu u^\mu)\|_\nu \leqq \theta K(1 - \varepsilon)$$

für $|\nu| = e$ (f leistet keinen Beitrag zur Ordnung e), und so folgt auch

$$\|\sum_{|\nu|=e} \varphi_\nu^e u^\nu\| \leqq \theta \cdot K.$$

Anwendung: (α), (β) ergeben

$$u^\nu(\gamma_\nu^e - \varphi_\nu^e) = 2\theta K$$

für $|\nu| = e$, daher gibt es (vgl. 2.3.4.3.) eine Konstante $M = 1$, so daß für alle ν, $|\nu| = e$, eine Lösung $(A_\nu, c_{i\nu}, k_{i\nu})$ von $(**)$ existiert, und

$$\|A_\nu\|, \|c_{i\nu}\|, \|k_{i\nu}\| = M \cdot \|\gamma^e_\nu - \gamma^e_\nu\|,$$

und für geeignetes θ heißt dies

$$\|A_\nu u^\nu\|, \|c_{i\nu} u^\nu\|, \|k_{i\nu} u^\nu\| \leq K,$$

q. e. d.

2.4. Algebraisierung formaler Deformationen

In 2.1. haben wir uns mit dem Problem der Existenz formaler semiuniverseller Deformationen befaßt. Im algebraischen Fall werden wir uns wiederum eine solche Deformation vorgeben, die wir dann auf geeignete Weise approximieren. Mit den Bezeichnungen aus 2.1. sei wieder $(\bar{B}, (\eta_\nu))$ eine formale semiuniverselle Deformation, $\eta_\nu \in D(\bar{B}(\mathfrak{m}^{\nu+1}))$, wobei nach Konstruktion $\bar{B} = \Lambda[[X_1, \ldots, X_n]]/(f_1, \ldots, f_m)$ ist.

Problem (A): Existiert ein $B = \Lambda\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ mit $B^\wedge = \bar{B}$ sowie $D(B)$, das alle η_ν induziert?

Problem (B): Ist ein beliebiges Paar (B, η) mit Eigenschaft (A) schon semiuniversell (in der Kategorie der lokalen Henselschen Λ-Algebren)?

Der erste Satz wird nun zeigen, daß sich die Frage (B) positiv beantworten läßt, wenn der Funktor D noch gewisse zusätzliche Eigenschaften hat.

2.4.1. Definition. Es sei F: (A-Algebren) $\to$ Ens ein Funktor. F heißt *lokal von endlicher Darstellung*, wenn er mit gefilterten induktiven Limites vertauschbar ist.
Es gilt der folgende

2.4.2. Satz. *Es sei A eine lokale, als Henselscher Ring endlich erzeugte, Λ-Algebra und Λ ein lokaler Henselscher Ring, der durch eine Algebra von endlichem Typ über einem Körper oder einem exzellenten diskreten Bewertungsring erzeugt wird. Dann gilt: Ist F: (A-Algebren) $\to$* Ens *ein Funktor und $\bar{\eta} \in F(A^\wedge)$, so gibt es ein $\eta \in F(A)$ mit $\bar{\eta} \equiv \bar{\eta} \bmod \mathfrak{m}^c_A$ zu gegebenem $c \in N$.*

Dieser Approximationssatz liefert nun

2.4.3. Satz. *Es sei Λ wie in Satz 2.4.2. D sei lokal von endlicher Darstellung. Dann gilt: Ist B eine lokale Henselsche Λ-Algebra von endlichem Typ und induziert (B, η) eine formale semiuniverselle Deformation, so ist (B, η) semiuniversell.*
An D stellen wir jedoch dabei die zusätzliche Forderung, daß

$$D(A) \to \text{lim-proj}\, D(A/\mathfrak{m}^n_A)$$

injektiv ist für jede komplette lokale Λ-Algebra A.

Beweis. Es ist (UD 1) nachzuweisen für beliebige lokale Henselsche Λ-Algebren A. Da D und $\mathrm{Hom}_\Lambda(B, \square)$ mit gefilterten induktiven Limites vertauschbar sind, kann man sich auf den Fall beschränken, daß A als Henselsche Λ-Algebra endlich erzeugt ist. Es ist nun zu zeigen: Jedes Diagramm

$$\begin{tikzcd}
(B,\eta) \arrow[r, dashed, "u"] \arrow[dr, "u"'] & (A,\xi) \arrow[d] \\
& (A/I,\bar{\xi})
\end{tikzcd}$$

läßt sich ergänzen. Es sei nun für A-Algebren C stets

$$(A,\zeta) \to (C,\zeta_C).$$

Dann definiert, falls $\hat{u}: B \to A^{\wedge}$ eine formale Ergänzung des obigen Diagramms ist, die Zuordnung

$$F(C) = \{\nu \in \operatorname{Hom}_A(B,C),\ D(\nu)\,\eta = \zeta_C,\ \nu \equiv \hat{u} \bmod IC\}$$

einen Funktor, der lokal von endlicher Darstellung ist, und nach dem vorigen Satz läßt sich nun $\hat{u} \in F(\bar{A})$ durch ein $u \in F(A)$ approximieren, q. e. d.

2.4.4. Satz (M. Artin). *Es sei Λ ein Henselscher Noetherscher lokaler Ring mit Restklassenkörper k und Maximalideal $\mathfrak{m}$. $\bar{B}$ sei eine komplette Noethersche Λ-Algebra, $\bar{\eta} \in D(\bar{B})$, so daß $(\bar{B}, (\bar{\eta}_n))$ eine formale semiuniverselle Deformation für D ist ($\bar{\eta}_n =$ Bild von $\bar{\eta}$ in $D(B(\mathfrak{m}_{\bar{B}}^{n+1}))$). D sei lokal von endlicher Darstellung. Dann gibt es eine lokale Henselsche Λ-Algebra B, einen Isomorphismus $B^{\wedge} \simeq \bar{B}$ und ein $\eta \in D(B)$, so daß $\bar{\eta}_n$ durch η induziert wird.*

Beweis. Wenn $\bar{B}$ Komplettierung einer Henselschen Λ-Algebra von endlichem Typ ist, kann man nach der Approximationseigenschaft $\bar{\eta}$ durch ein $\eta \in D(B) \bmod \mathfrak{m}_B^2$ approximieren und ist fertig. Dies ist jedoch allgemein nicht klar. Daher verläuft Artins Beweis folgendermaßen:

$\bar{B}$ wird als endliche Algebra über der Komplettierung einer Henselschen Λ-Algebra A (von endlichem Typ) dargestellt, und gleichzeitig wird $(\bar{B}, \bar{\eta})$ durch ein Paar (B, η) in geeigneter Weise approximiert. Man kann sich von vornherein auf den Fall beschränken, daß Λ ein Körper oder diskreter Bewertungsring ist. Ist dies nämlich noch nicht der Fall, so ist Λ von endlichem Typ über einem Körper oder diskreten Bewertungsring Λ_0 (im Henselschen Sinne). Für $\mu \in \operatorname{Hom}_{\Lambda_0}(\Lambda, A)$ bezeichne μA den Ring A mit der durch μ induzierten Λ-Algebrastruktur.
Ist

$$D_0(A) = \{(\mu,\zeta),\ \mu \in \operatorname{Hom}_{\Lambda_0}(\Lambda, A),\ \zeta \in D(\mu A)\},$$

dann ist D_0 ein Funktor auf der Kategorie der lokalen Henselschen Λ_0-Algebren; D_0 ist ebenfalls lokal von endlicher Darstellung, und ist $v: \Lambda \to \bar{B}$ die gegebene Λ-Algebrastruktur auf $\bar{B}$, so ist $(v, \bar{\eta}) \in D_0(\bar{B})$ ebenfalls formal semiuniversell.
Eine Algebraisierung von $(v, \bar{\eta})$ liefert dann auch eine Algebraisierung vom $\bar{\eta}$.

Im folgenden sei also Λ ein Körper oder ein Henselscher diskreter Bewertungsring, dann enthält $\bar{B}$ einen Unterring

$$A^{\wedge} = \Lambda^{\wedge}[[x_1, \ldots, x_n]] \simeq \Lambda^{\wedge}[[X_1, \ldots, X_n]],$$

so daß $\bar{B}$ endlich über $A^{\wedge}$ ist. Der Unterring $A^{\wedge}$ ist natürlich algebraisierbar ($A^{\wedge} =$ Komplettierung von $A = \Lambda\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$). Es zeigt sich, daß bei geeigneter Wahl von A dann auch $(\bar{B}, \bar{\eta})$ algebraisiert werden kann.
Wenn man jeder A-Algebra A' die Menge aller Paare (B', η'), B' eine endliche A'-Algebra, $\eta' \in D(B')$, zuordnet, so ist dieser Funktor von endlicher Darstellung, und $(\bar{B}, \bar{\eta})$ läßt sich folglich beliebig genau durch ein (B', η'), B' eine endliche A-Algebra, $\eta' \in D(B')$, approximieren. Die formale Semiuniversalität von $(\bar{B}, \bar{\eta})$ impliziert dann einen Λ-Homomorphismus $\bar{B} \to B'^{\wedge}$; dieser ist natürlich surjektiv, sofern man $\bar{B}$ bis mindestens zur Ordnung 2 approximiert.

Um zu erreichen, daß er auch injektiv ist, benötigt man allerdings noch mehr Information über B'.
Es sei A' eine A-Algebra, M' ein A'-Modul und $L_0, \ldots, L_n$ endliche Λ-Moduln. Dann definieren wir nach M. Artin: Eine $(x_1, \ldots, x_n)$-Vorbereitung vom Typ $(L_0, \ldots, L_n)$ von M' ist eine Folge von A'-Homomorphismen

$$L_\nu \otimes_\Lambda A'_\nu \underset{V_\nu}{\overset{U_\nu}{\rightleftarrows}} M' \otimes_{A'} A'_\nu =: M'_\nu$$

mit $U_\nu \circ V_\nu = X_{\nu+1} \circ \mathrm{id}_{M_\nu}$, $V_\nu \circ U_\nu = X_{\nu+1} \circ \mathrm{id}_{L_\nu \otimes_\Lambda A'_\nu}$ für $\nu \leqq n$ (wobei wir $x_{n+1} = 1$ setzen).
Hierbei bezeichne A'_ν den Restklassenring $A'/(x_1 A' + \cdots + x_\nu A')$, $(A'_0 := A')$.

Hilfssatz. *Bei geeigneter Wahl von $x_1, \ldots, x_n \in \bar{B}$ gibt es Λ-Moduln L_ν, so daß $\bar{B}$ als A-Modul eine $(x_1, \ldots, x_n)$-Vorbereitung vom Typ $(L_0, \ldots, L_n)$ besitzt* $(A^\wedge = \Lambda^\wedge[[x_1, \ldots, x_n]])$.

Beweis. Da $A^\wedge_n = \Lambda^\wedge$ ist, ist $\bar{B} \otimes_{A^\wedge} A^\wedge_n$ endlicher $\Lambda^\wedge$-Modul, also stets vom Typ $L_n \otimes_\Lambda \Lambda^\wedge$. (Jeder endliche Λ-Modul ist direkte Summe von $\Lambda^\wedge$-Moduln vom Typ $\Lambda^\wedge/p^e\Lambda^\wedge = \Lambda/p^e\Lambda$ und von freien Bestandteilen, p bezeichnet dabei ein Primelement, falls Λ diskreter Bewertungsring ist.)
Angenommen, $x_1, \ldots, x_n$ sind so, daß für $v < s$ bereits Λ-Moduln L_ν mit Homomorphismen $L_\nu \otimes A^\wedge_\nu \rightleftarrows \bar{B}_\nu$ mit den geforderten Eigenschaften existieren.
$\bar{B}_s$ ist ein endlicher $A^\wedge_s = \Lambda^\wedge[[x_{s+1}, \ldots, x_n]]$-Modul; da die Lokalisierung von $A^\wedge_s$ in $pA^\wedge_s$ ein diskreter Bewertungsring mit p als Primelement oder ein Körper ist, ist sofort klar, daß es eine Zariskiumgebung $B(x)$ von $pA^\wedge_s$ gibt $(x \in A^\wedge_s)$, über der $\bar{B}_s$ vom Typ $L_s \otimes_\Lambda A^\wedge_s$ ist mit einem geeigneten Λ-Modul L_s. Da $\dim (A^\wedge_s/xA^\wedge_s) < \dim (A^\wedge_s)$ und x zu p prim ist, kann man $(x_1, \ldots, x_n)$ durch eine Folge $(x'_1, \ldots, x'_n)$ mit $x'_\nu = x_\nu$, $v \leqq s$, $x'_{s+1} =$ geeignete Potenz von x, $x'_\nu \in A^\wedge$, ersetzen, so daß $A^\wedge$ endlich über dem Unterring $\Lambda^\wedge[[x'_1, \ldots, x'_n]]$ ist.
Für Moduln über regulären lokalen Ringen gilt aber stets $\operatorname{cod} h + dh = \dim$, also ist $A^\wedge$ freier $\Lambda^\wedge[[x'_1, \ldots, x'_n]]$-Modul. Also erfüllt $(x'_1, \ldots, x'_n)$ die geforderten Bedingungen für $v \leqq s$ (indem man die L_ν, $\nu \leqq s$, geeignet abändert). Durch Induktion folgt daraus der Hilfssatz.

Die weitere Beweisidee von Satz 2.4.4. ist nun, $x_1, \ldots, x_n$ und $(L_0, \ldots, L_n)$ zu fixieren, so daß $\bar{B}$ eine $(x_1, \ldots, x_n)$-Vorbereitung vom Typ $(L_0, \ldots, L_n)$ besitzt, und diese mit zu approximieren. Dazu ist zu zeigen:

Hilfssatz. *Für A-Algebren A' sei*

$$P(A') = \left\{ (B', \eta', [U_\nu, V_\nu]) \;\middle|\; \begin{array}{l} B' \text{ endliche } A'\text{-Algebra}, \eta' \in D(B'), \\ {[U_\nu, V_\nu]}\ (x_1, \ldots, x_n)\text{-Vorbereitung} \\ \text{von } B' \text{ über } A' \text{ vom Typ } (L_0, \ldots, L_n). \end{array} \right\}$$

Dann ist $A' \to P(A')$ ein Funktor lokal von endlicher Darstellung (auf der Kategorie der lokalen Henselschen, Noetherschen Λ-Algebren).

Beweis. Die Vorgabe von (B', η') ist durch endlich viele Daten bestimmt, die der $[U_\nu, V_\nu]$ mit den geforderten Eigenschaften ebenfalls wie folgt:
Ist $B' = B'_0 \otimes_{A'_0} A'$ (A'_0 eine A-Algebra, so daß B' über A'_0 definiert ist), so daß $A' = \varinjlim (A'_\alpha)$ ist, A'_α A'_0-Algebren, so sind $[U_\nu, V_\nu]$ durch ihre Wirkung auf L_ν bzw. B'_0 bestimmt, q. e. d.

Wir können also $(\bar{B}, \bar{\eta})$ mit der fixierten $(x_1, \ldots, x_n)$-Vorbereitung $[\bar{U}_\nu, \bar{V}_\nu]$ modulo $\mathfrak{m}^c_{A^\wedge}$ approximieren durch eine endliche A-Algebra B, ein $\eta \in D(B)$ und eine Vorbereitung $[U, V]$. Das heißt, wenn man alles mit $A/\mathfrak{m}_A^{c+1}$ tensoriert, sind $(\bar{B}, \bar{\eta}, [\bar{U}_\nu, \bar{V}_\nu])$ und $(B, \eta, [U_\nu, V_\nu])$ isomorph. Wie bereits bemerkt, induziert die Semiuniversalität von $\bar{\eta}$ sukzessive Λ-Homomorphismen $\bar{B} \to B/\mathfrak{m}_A^{m+1}B$, $m = c, c+1, \ldots$, also einen Λ-Homomorphismus $\varphi\colon \bar{B} \to B^\wedge$, der im Fall $c \geqq 1$ auf alle Fälle surjektiv ist, und so daß $\bar{\eta}$ bei $\bar{B} \to B/\mathfrak{m}_A^{m+1}B$ in η_m ($=$ Bild von η) übergeht. Es ist also zu zeigen, daß φ auch injektiv ist, sofern c hinreichend groß ist.

Es ist $\varphi(x_\nu) = x_\nu + y_\nu$, $y_\nu \in \mathfrak{m}_A^{c+1}\bar{B}^\wedge$, also wird $\mathfrak{m}_A B^\wedge$ auch durch $p, x_1, \ldots, x_s$, $\varphi(x_{s+1}), \ldots, \varphi(x_n)$ erzeugt $(0 \leqq s \leqq n)$, und daher gilt

$$\mathfrak{m}_A^m B_s^\wedge = \left(\sum_{\nu=s+1}^{n} \varphi(x_\nu)\, B_s^\wedge + pB_s^\wedge\right)^m. \tag{1}$$

Die entscheidende Bemerkung ist nun die, daß die Multiplizität der einzelnen $B_s^\wedge$ bezüglich $\mathfrak{m}_A A_s^\wedge$ durch die Vorbereitung eindeutig bestimmt ist, sie ist nämlich gleich der Anzahl der freien Summanden von L_s (da $L_\nu \otimes_\Lambda A_s^\wedge \to B_s^\wedge$ injektiv ist und der Kokern durch x_{s+1} annuliert wird, also kleinere Dimension hat).
(Ist $d = \dim A_s$, dann ist die Multiplizität eine additive Funktion auf der Kategorie der A_s-Moduln, die auf der Unterkategorie der Moduln der Dimension $< d$ verschwindet.)

Wegen (1) hat also $B_s^\wedge$ bezüglich des Ideals $\sum\limits_{\nu=s+1}^{n} \varphi(x_\nu)\, B_s^\wedge + pB_s^\wedge$ dieselbe Multiplizität wie $\bar{B}_s$ bezüglich des Ideals $\sum\limits_{\nu=s+1}^{n} x_\nu \bar{B}_s + p\bar{B}_s$; daher haben alle Elemente des Kerns von $\bar{B}_s \to B_s^\wedge$ eine kleinere Dimension als $\dim \bar{B}_s$.

Wir betrachten zunächst den Fall, daß Λ ein Körper ist. Wegen $x_{s+1}\bar{B}_s \subseteqq L_s \otimes_\Lambda A_s^\wedge$, und da $L_s \otimes_\Lambda A_s^\wedge$ frei ist, also alle von 0 verschiedenen Elemente dieselbe Dimension haben, gilt dann

(2) $\qquad x_{s+1}\bar{B}_s \cap K_s = 0.$

Offenbar ist $K_n = 0$, da $\bar{B}_n \to B_n^\wedge$ surjektiv und beide Seiten Algebren vom gleichen Rang über Λ sind.
Aus (2) folgt daher durch Induktion nach $n - s$, daß $K_s = 0$ für alle s, also insbesondere $K_0 = \operatorname{Kern} \varphi = 0$ ist.
Im Fall eines diskreten Bewertungsrings Λ ist der Beweis im Prinzip derselbe, man betrachte hier jedoch auch noch die Multiplizitäten von $\bar{B}_s/p^m\bar{B}_s$ und $B_s^\wedge/p^m B_s^\wedge$, die wieder durch die Vorbereitung eindeutig bestimmt sind und übereinstimmen; bezeichnet man diese Multiplizitäten als Funktion von m mit $e(m)$, so ist $e(m)$ stückweise linear, und der Anstieg an der Stelle m ist gleich der Anzahl der Summanden von L_s, deren Länge $\geqq m$ ist.
Da wieder alle von 0 verschiedenen Elemente von $L_s \otimes_\Lambda A\,/p^m A_s^\wedge$ $(m \geqq 1)$ dieselbe Dimension haben, folgt wie oben $\bar{B}_n/p^m\bar{B}_n \simeq B_n^\wedge/p^m B_n^\wedge$ für alle m, also $K_n = 0$ und ebenso Gleichung (2), also $K_s = 0$ für alle s, q. e. d.