Man überlegt sich sofort, daß h bezüglich der $\| \ \|_k$-Topologie gleichmäßig stetig ist. Damit können wir h zu einer Abbildung h (eindeutig) auf die Abschließung $\widehat{F^0}$ von F^0 ausdehnen. Nun ist $\left.\frac{\partial h}{\partial \zeta}\right|_{(0,0)}: \widehat{F^0} \to \widehat{F^0}$ die Identität. Wir können also den Satz über implizite Funktionen anwenden und erhalten in einer kleinen Umgebung des Ursprungs von $\widehat{A}^1$ (Abschließung von A^1) eine C^∞-Funktion g, so daß

$$\zeta + G\vartheta\psi + G\vartheta R(\psi, \zeta) = 0$$

erfüllt ist, genau dann, wenn $\zeta = g(\psi)$ ist.
Man überlegt sich durch die Untersuchung der Differentialgleichung zweiter Ordnung vom elliptischen Typ $\square + \vartheta + \vartheta R(\psi, \quad) = 0$, daß $\zeta \in F^0$ ist. Damit haben wir unser Problem gelöst und folgenden Satz bewiesen:

1.4.2. Theorem (Kuranishi). a) *Es sei M eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit, $\{\eta^\nu\}$ eine Basis von $H^1(M, \Theta)$, $\varphi(t)$ eine Lösung von*

$$\varphi(t) = \sum_{\nu=1} \varphi_\nu t_\nu + \frac{1}{2} [\varphi(t), \varphi(t)]$$

und $B = \{t \mid H[\varphi(t), \varphi(t)] = 0\} = \{t \in \mathbf{C} \mid |t| < \varepsilon$ *und* $b_\lambda(t) = 0$ *für* $\lambda = 1, \ldots, r\}$.
Dann induziert $\varphi(t)$ für jedes t aus der analytischen Menge B eine komplexe Struktur M_t auf M.
b) *Es sei ψ eine beliebige Vektorform aus $\mathcal{L}^1$ mit*

$$\bar{\partial}\psi - \frac{1}{2} [\psi, \psi] = 0.$$

Dann definiert ψ eine komplexe Struktur M_ψ auf M. Wenn $\|\psi\|_k$ genügend klein ist, dann existiert genau ein $\zeta \in F^0$ mit

$$\psi \circ f_\zeta = \varphi(t) \quad \text{für ein } t \ \in B,$$

womit M_ψ zu M_t biholomorph äquivalent ist.

Von Grauert wurde eine andere Methode entwickelt, um die Existenz semiuniverseller Deformationen nachzuweisen. Diese besteht darin, geeignete Überdeckungen zu betrachten und die Verheftungsbedingungen zu deformieren sowie die eventuell vorhandenen Singularitäten. Damit kann folgendes Theorem gezeigt werden (Grauert, Douady).

1.4.3. Theorem. *Jede kompakte komplexe Mannigfaltigkeit besitzt eine semiuniverselle Deformation, die in allen Punkten des Parameterraumes noch vollständig ist.*

1.5. Existenz von lokalen Modulräumen kompakter komplex-analytischer Mannigfaltigkeiten

Problemstellung: Wir betrachten „Keime" von Familien kompakter komplex-analytischer Mannigfaltigkeiten (siehe 1.1.), d. h., wir identifizieren zwei Familien $M \xrightarrow{\pi} B$ und $M' \xrightarrow{\omega} B$ mit demselben Parameterraum, wenn ihre Einschränkungen auf irgendeine Umgebung des Basispunktes $o \in B$ isomorph sind.

Es sei M eine feste kompakte komplexe Mannigfaltigkeit und $M \xrightarrow{\pi} B$ eine in $o \in B$ universelle Familie mit $M_0 = M$, so daß für jede Familie $N \to B'$ mit $N_0 = M$ der wegen der Universalität von $M \xrightarrow{\pi} B$ existierende Morphismus $f\colon (B', o) \to (B, o)$

eindeutig bestimmt ist. Dann heißt $M \xrightarrow{\pi} B$ eine *modulare Familie* und (B, o) ein *lokaler Modulraum* für M.

Die Probleme sind nun die folgenden:

1. Welche Räume (B, o) kommen als lokale Modulräume in Frage?
2. Man gebe ein Kriterium für die Eixistenz eines Modulraumes an!

Das erste Problem wird durch folgenden einfachen Satz gelöst:

1.5.1. Theorem. *Ist $M \to B$ eine analytische Familie komplexer Räume, die in $o \in B$ semiuniversell ist, $M' \to B'$ eine solche, die in $o' \in B'$ versell ist, und $M'_0 \overset{i'}{\simeq} M \overset{i}{\simeq} M_0$, so gibt es Morphismen von Raumkeimen*

$$(B', o) \xrightarrow{\pi} (B' o) \xrightarrow{\sigma} (B', o')$$

und mit i und i' verträgliche Isomorphismen $\pi^*M = M \times_B B' \simeq M'$ (über einer Umgebung von o'), $\sigma^*M' = M' \times_{B'} B \simeq M$ (über einer Umgebung von o), so daß $\pi \circ \sigma =$ id ist, und wenn $M \to B$ universell ist, ist $(B', o') \simeq (B, o) \times (C^r, o)$ über (B, o) $\big((C^r, o)$ bezeichnet den Raumkeim von C^r im Nullpunkt$\big)$.

Insbesondere ist also die Kuranishi-Familie $M \to B$ einer kompakten komplexen Mannigfaltigkeit universell, falls es überhaupt eine universelle Deformation von M gibt.

Beweis. Wegen der Semiuniversalität bzw. Versalität gibt es Abbildungen $(B', o) \xrightarrow{\alpha} (B, o) \xrightarrow{\beta} (B', o')$, so daß $\alpha^*M \simeq M', \beta^*M' \simeq M$ (verträglich mit i und i') ist, also ist $\gamma = \alpha \circ \beta \colon (B, o) \to (B, o)$ eine Abbildung mit $\gamma^*M \simeq M$ (verträglich mit i) und daher die Tangentialabbildung $T_0(\gamma) \colon T(B)_0 \to T(B_0)$ gleich der identischen Abbildung.

Also ist $\mathcal{O}_{B,o}/\mathfrak{m}^2 \xrightarrow{\gamma^*} \mathcal{O}_{B,o}/\mathfrak{m}^2$ die identische Abbildung, $\gamma^*(\mathfrak{m})\mathcal{O}_{B,o} + \mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$, also $\gamma^*(\mathfrak{m})\mathcal{O}_{B,o} = \mathfrak{m}$. Daher ist γ^* ein quasiendlicher und damit endlicher Morphismus analytischer Algebren (vgl. z. B. KURKE, PFISTER und ROCZEN [20]), also γ^* surjektiv (nach dem Lemma von NAKAYAMA). Ein surjektiver Ringendomorphismus Noetherscher Ringe ist aber stets bijektiv. Somit ist γ ein Automorphismus, und wir wählen $\pi = \alpha$, $\sigma = \beta \circ \gamma^{-1}$, so daß also σ und π die geforderten Eigenschaften haben.

Um die letzte Behauptung zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß $(B', o') \to (B, o)$ glatt ist, d. h., ist (I, o'') ein infinitesimaler Raumkeim, $(I_0, o'') \subset (I, o'')$ abgeschlossener Unterraum, so läßt sich jeder Morphismus ϱ in dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
(I_0, o'') \arrow[r, "\varrho'_0"] \arrow[d, hook] & (B', o') \arrow[d, "\pi"] \\
(I, o'') \arrow[r, "\varrho"] \arrow[ur, dashed, "\varrho'"] & (B, o)
\end{tikzcd}$$

so liften, daß $\varrho' \mid I_0 = \varrho'_0$ ist. Das folgt aus der Definition der Versalität (die Deformation ϱ^*M wird auf I_0 durch ϱ'_0 induziert).

Es gibt kompakte, komplexe Mannigfaltigkeiten M, die keinen Modulraum besitzen (z. B. Regelflächen; vgl. Teil I, 4.2.6.).

Das zweite Problem wurde von M. SCHLESSINGER und J. WAVRIK behandelt. Es zeigt, daß die Existenz eines Modulraumes zur Lösbarkeit eines gewissen Erweiterungsproblems für vertikale Vektorfelder auf der Kuranishi-Familie äquivalent ist. Seine Darstellung soll hier etwas näher erläutert werden.

Es sei (S, o) ein analytischer Raum, $\mathfrak{M}_S$ die Garbe der holomorphen Funktionen auf S, die in o verschwinden, und $S^{(n)}$ die n-te infinitesimale Umgebung von o in S (d. h. der durch die Idealgarbe $\mathfrak{M}_S^{(n+1)}$ definierte Unterraum $S^{(n)} \subset S$). Ist $M \xrightarrow{\pi} S$ eine Familie von Deformationen von M (d. h. $M_0 = M$), so bezeichne $M^{(n)}$ die Einschränkung von $M \to S$ auf $S^{(n)}$. Der Zusammenhang mit dem Problem der Existenz eines lokalen Modulraumes wird durch folgendes Theorem gegeben:

1.5.2. Theorem. *Es sei M ein kompakter komplexer Raum und $(\mathcal{M} \to B, i\colon M \to \mathcal{M})$ eine semiuniverselle Deformation von M. Dann ist diese Deformation dann und nur dann universell, wenn für $n = 1, 2, \ldots$ folgendes gilt:*

Jeder Automorphismus von $(\mathcal{M}^{(n)}, i)$ wird durch einen Automorphismus von $(\mathcal{M}^{(n+1)}, i)$ induziert.

Bemerkung. Wenn der Kofunktor auf der Kategorie der komplexen Raumkeine über (B, o)

$$S \mapsto \mathrm{Aut}_S(\mathcal{M} \times_B S, i_S) = \{f\colon \mathcal{M} \times_B S \xrightarrow{\sim} \mathcal{M} \times_B S;\, f \circ i_S = i_S\}$$

(wobei i_S die durch i induzierte Abbildung $M \to \mathcal{M} \times_B S$ über dem Basispunkt von S ist) darstellbar ist durch einen komplexen Raumkeim $(A, e) \to (B, o)$, so bedeutet das Kriterium, daß (A, e) glatt über (B, o) ist.

Auf alle Fälle ist der obige Kofunktor F_A prodarstellbar durch eine formale Gruppe über $\hat{\mathcal{O}}_{B,o}$ mit einer zugrunde liegenden Algebra der Form

$$P = \hat{\mathcal{O}}_{B,o}[[t_1, \ldots, t_a]]/(f_1, \ldots, f_b)$$

mit $a = \dim H^0(M, \Theta_M)$, f_i Potenzreihen der Ordnung $g \geqq 2$, und das Kriterium von 1.5.2. ist äquivalent zu $f_1 = \cdots = f_b = 0$.

Beweis von 1.5.2.

Schritt 1 (Prodarstellbarkeit von F): Wir betrachten also die Kategorie der lokalen $\mathcal{O}_{B,o}$-Algebren, endlich über C, und schreiben $F(R)$ anstelle von $F(\mathrm{Spec}(R))$ (mit $\mathrm{Spec}(R)$ wird der entsprechende nulldimensionale Raumkeim bezeichnet). Wir schreiben $\mathcal{M}_R$ anstelle von $\mathcal{M} \times_B \mathrm{Spec}(R)$; sind $\mathcal{O}_{B,o}$-Morphismen $R' \xrightarrow{\alpha} R \xleftarrow{\beta} R''$ gegeben, $R^* = R' \times_R R''$, und Automorphismen $\mathcal{M}_{R'} \underset{\varphi'}{\xrightarrow{\sim}} \mathcal{M}_{R'}$, $\mathcal{M}_{R''} \underset{\varphi''}{\xrightarrow{\sim}} \mathcal{M}_{R''}$, die auf $\mathcal{M}_R$ denselben Automorphismus induzieren, so induzieren φ', φ'' einen Automorphismus $(\varphi', \varphi'')\colon \mathcal{M}_{R^*} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{R^*}$ (die zugrunde liegenden Räume sind alle gleich, die zugrunde liegenden Abbildungen sind die identischen Abbildungen, ferner ist

$$\mathcal{O}_{\mathcal{M}_{R^*}} \simeq (\mathcal{O}_{\mathcal{M}}/\mathcal{M}_0) \otimes_{\mathcal{O}_{B,o}} R^*$$

und das Tensorprodukt auf Grund der Flachheit mit dem Faserprodukt vertauschbar). Offensichtlich gilt

$$\begin{aligned} F(C[T]/(t^2)) &\simeq \mathrm{Kern}(\mathrm{Aut}(M \times \mathrm{Spec}(C[t]/(t^2)) \to \mathrm{Aut}(M))) \\ &\simeq \mathrm{Der}_C(\mathcal{O}_M, \mathcal{O}_M) = H^0(M, \Theta_M). \end{aligned}$$

Deshalb ist F prodarstellbar über einem geeigneten Quotienten P von $\hat{\mathcal{O}}_{B,o}[[t_1, \ldots, t_a]]$ mit $a = \dim H^0(M, \Theta_M)$ und

$$P/\mathfrak{m}_{B,o}P + (t_1, \ldots, t_a)^2 P \simeq C[[t_1, \ldots, t_a]]/(t_1, \ldots, t_a)^2$$

(vgl. [17]). Das Kriterium von Theorem 1.5.2. besagt nun: Jeder $\mathcal{O}_{B,o}$-Homomorphismus $P \xrightarrow{\varphi_n} \mathcal{O}_{B,o}/\mathfrak{m}^{n+1} = \mathcal{O}_{B^{(n)},o}$ läßt sich zu einem Homomorphismus $P \xrightarrow{\varphi_{n+1}} \mathcal{O}_{B^{(n+1)},o}$ liften, was offensichtlich nur möglich ist, wenn $P = \hat{\mathcal{O}}_{\hat{B},o}[[t_1, \ldots, t_a]]$ ist.

Schritt 2 (($\mathcal{M}, i$) universell $\Rightarrow$ jeder Automorphismus läßt sich liften): Es sei $\varphi\colon (\mathcal{M}^{(n)}, i) \simeq (\mathcal{M}^{(n)}, i)$ ein Automorphismus und $j\colon \mathcal{M}^{(n)} \to \mathcal{M}^{(n+1)}$ die kanonische Einbettung. Ferner sei

$$S = B^{(n+1)} \amalg_{B^{(n)}} B^{(n+1)} (= \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{B^{(n+1)},o} \times_{\mathcal{O}_{B^{(n)},o}} \mathcal{O}_{B^{(n+1)},o})),$$

und die Diagramme

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathcal{M}' & \\ \mathcal{M}^{(n+1)} \arrow[ur] & & \mathcal{M}^{(n+1)} \arrow[ul] \\ & \mathcal{M}^{(n)} \arrow[ul, "j"] \arrow[ur, "j'"'] & \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathcal{M}'' & \\ \mathcal{M}^{(n+1)} \arrow[ur] & & \mathcal{M}^{(n+1)} \arrow[ul] \\ & \mathcal{M}^{(n)} \arrow[ul, "j \circ \varphi"] \arrow[ur, "j"'] & \end{tikzcd}$$

seien kouniversell. Dann definieren $\mathcal{M}', \mathcal{M}''$ Deformationen von M über S, die auf jedem der beiden Summanden von S die Deformationen $(\mathcal{M}^{(n+1)}, i)$ induzieren, so daß also die beiden zugehörigen Abbildungen $f'\colon S \to B$, $f''\colon S \to B$, durch die $\mathcal{M}'$ bzw. $\mathcal{M}''$ induziert werden, auf beiden Summanden die kanonische Einbettung $B^{(n+1)} \to B$ induzieren. Also ist $f' = f''$, und somit gibt es einen Automorphismus von Deformationen $\psi\colon \mathcal{M}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}''$. Über jedem der beiden Summanden von S induziert ψ ebenfalls Automorphismen von Deformationen

$$\psi_1\colon \mathcal{M}^{(n+1)} \to \mathcal{M}^{(n+1)},$$
$$\psi_2\colon \mathcal{M}^{(n+1)} \to \mathcal{M}^{(n+1)}$$

mit $\psi_1 \circ j \circ \varphi = j \circ \varphi$, $\psi_2 \circ j = j \circ \varphi$, also wird φ durch den Automorphismus $\psi_1^{-1} \circ \psi_2$ von $\mathcal{M}^{(n+1)}$ induziert.

Schritt 3 (Jeder Automorphismus läßt sich liften $\Rightarrow$ ($\mathcal{M}, i$) ist universell): Wenn eine Deformation von M durch zwei verschiedene Morphismen induziert wird, sind diese Morphismen schon auf einer infinitesimalen Umgebung des Basispunktes verschieden voneinander. Es genügt daher zu zeigen: Ist $(Y, \eta\colon M \to Y)$ eine Deformation von M über dem nulldimensionalen Raumkeim $S = \operatorname{Spec}(R/I)$ (mit $\mathfrak{m}_R I = 0$), induziert durch $f\colon S \to B$, so wird jede Deformation von M über $T = \operatorname{Spec}(R)$, die auf $S \subset T$ zu (Y, η) isomorph ist, durch genau eine Fortsetzung $T \to B$ von f induziert. Die Menge aller Fortsetzungen $g\colon T \to B$ von f entspricht umkehrbar eindeutig der Menge aller Isomorphieklassen von Paaren (X, u), X ein komplexer Raum über T und u eine abgeschlossene Einbettung $Y \to X$ über T, so daß $(X, u \circ \eta)$ eine Deformation von M über T ist. (Man ordnet jeder Fortsetzung g die induzierte Deformation $X = \mathcal{M} \times_B T$ und die durch $S \hookrightarrow T$ induzierte Einbettung $Y \simeq \mathcal{M} \times_B S \subset \mathcal{M} \times_B T$ zu.) Sind g, g' Fortsetzungen, so daß es einen Isomorphismus der entsprechenden Deformationen $(X, u \circ \eta) \xrightarrow{\sigma} (X', u' \circ \eta)$ gibt, so induziert σ einen Automorphismus $\bar{\tau}\colon (Y, \eta) \simeq (Y, \eta)$, der sich, da $\operatorname{Aut}_B(\mathcal{M})$ durch eine formale Potenzreihenalgebra über $\mathcal{O}_{\hat{B},o}$ prodarstellbar ist und S, T nulldimensional sind, zu einem Automorphismus $\tau\colon (X, u \circ \eta) \simeq (X, u \circ \eta)$ liften läßt. Daher induziert

$\sigma \circ \tau^{-1}$ auf Y die identische Abbildung

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow[\tau^{-1}]{\sim} & X & \xrightarrow[\sigma]{\sim} & X' \\ {\scriptstyle u}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle u} & & \uparrow{\scriptstyle u'} \\ Y & \xrightarrow[\tau^{-1}]{\sim} & Y & \xrightarrow[\tau]{\sim} & Y \end{array}$$

und $(X, u) \simeq (X', u')$, also ist $g' = g$, q. e. d.

1.5.3. Interpretation mittels Vektorfeldern. Es sei $X \xrightarrow{\pi} (S, o)$ eine Deformation von M, $\Theta^{(n)}$ die Garbe der Vektorfelder längs der Fasern von $X^{(n)} \to S^{(n)}$,

$$\Theta^{(n)} = \Theta_{X^{(n)}/S^{(n)}} \simeq \Theta_{X/S} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S^{(n)}}$$

und $\mathcal{V}^{(n)} \subset \Theta^{(n)}$ die Untergarbe der auf $X^{(0)} \times M$ verschwindenden Vektorfelder:

$$\mathcal{V}^{(n)} = \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{n+1} \otimes \Theta^{(n)}$$

($\mathfrak{m}$ Ideal in $\mathcal{O}_S$, das zum Basispunkt o gehört). Bezeichnen wir mit $\mathcal{G}^{(n)}$ die Garbe der Keime von Automorphismen (von Deformationen) von $X^{(n)}$ über $S^{(n)}$, so gibt es einen kanonischen Garbenmorphismus

$$\alpha_n : \mathcal{V}^{(n)} \to \mathcal{G}^{(n)},$$

der Automorphismus $\alpha_n(\vartheta)$ ist wie folgt definiert: Auf dem zugrunde liegenden Raum ist $\alpha_n(\vartheta)$ die Identität, und für Funktionen f auf $X^{(n)}$ ist

$$\alpha_n(\vartheta)^* (f) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \vartheta^k(f)$$

($\vartheta \in \mathcal{V}_x^{(n)} = \mathrm{Der}_{\mathcal{O}_{S^{(n)},o}}(\mathcal{O}_{X^{(n)},x}, \mathfrak{m}\mathcal{O}_{X^{(n)},x})$, daher ist $\vartheta^k(f) = 0$ für $k > n$).

(Bemerkung. Ist u eine komplexe Variable, so ist $u \mapsto \alpha(u\vartheta)(x)$ die zu dem Vektorfeld ϑ gehörige Integralkurve durch x.)
Nach J. Wavrik [23]) ist α_n ein Isomorphismus von Garben. Nach 1.5.2. besitzt M genau dann eine universelle Deformation, wenn für jede Deformation von M (bzw. für eine semiuniverselle Deformation von M) der kanonische Morphismus $H^0(M_0, \mathcal{G}^{(n)}) \to H^0(M_0, \mathcal{G}^{(n-1)})$ surjektiv ist; da die α_n Isomorphismen sind, ist die Surjektivität der Einschränkungsmorphismen

$$H^0(M, \mathcal{V}^{(n)}) \to H^0(M, \mathcal{V}^{(n-1)}), \qquad n \geqq 1,$$

dazu äquivalent. Ein weiteres Kriterium für die Existenz eines Modulraumes ist die Lösbarkeit eines anderen Erweiterungsproblems.

1.5.4. Theorem (J. Wavrik, [23]). *M besitzt genau dann einen lokalen Modulraum, wenn für eine semiuniverselle Familie $\mathcal{M} \xrightarrow{\pi} B$ der kanonische Homomorphismus*

$$H^0(M, \Theta^{(n)}) \to H^0(M, \Theta)$$

surjektiv ist für alle n.

Beweisidee. Durch vollständige Induktion nach n zeigt man, daß für eine Deformation von M, für die die kanonischen Homomorphismen $H^0(M, \Theta^{(n)}) \to H^0(M, \Theta)$ surjektiv sind, die Einschränkungen $H^0(M, \Theta^{(n)}) \to H^0(M, \Theta^{(n-1)})$ surjektiv sind. Damit sind auch die kanonischen Morphismen $H^0(M, \mathcal{V}^{(n)}) \to H^0(M, \mathcal{V}^{(n-1)})$ für eine solche Familie surjektiv, d. h., M besitzt einen Modulraum. Ist andererseits