Nun wollen wir uns dem allgemeinen Fall zuwenden, d. h., $\psi \in \mathcal{L}^1$ ist gegeben mit $\|\psi\|_k < \varepsilon$ und $\bar\partial\psi - \frac{1}{2}[\psi, \psi] = 0$, aber $\vartheta\psi \neq 0$.

Wir wollen diesen Fall zurückführen auf den vorigen. Es sei $f\colon M \to M$ ein beliebiger Diffeomorphismus, dessen Werte dicht bei den Werten der identischen Abbildung liegen und dessen Werte der ersten Ableitung dicht bei den Werten der identischen Abbildung liegen. Wir wollen Bedingungen finden, für die ψ durch f aus $\varphi(t)$ für ein t induziert wird.

Es sei $\{U_j, \zeta_j^\alpha(z)\}$ eine holomorphe Karte für M_ψ, d. h.

$$\bar\partial\zeta^\alpha(z) = \sum_{\beta=1}^{n} \psi^\beta(z) \cdot \partial_\beta \zeta^\alpha(z). \tag{0}$$

Es sei $\{U_j'\}$ eine Überdeckung von M mit $f(u_j') \subseteqq U_j$. Wird ψ durch f aus φ induziert ($f\colon M_\varphi \to M_\psi$), d. h., sind $\zeta_j^\alpha(f(z))$ holomorphe Koordinaten auf U_j' bezüglich φ, so haben wir die Differentialgleichung

$$\bar\partial\zeta^\alpha(f(z)) = \sum_{\beta=1}^{n} \varphi^\beta(z)\, \partial_\beta \zeta^\alpha(f(z)). \tag{1}$$

Für die obige Gleichung (0) können wir lokal auch

$$\frac{\partial}{\partial \bar z^\lambda} \zeta^\alpha(z) = \sum_{\beta=1}^{n} \psi_{\bar\lambda}^{\beta}(z) \frac{\partial \zeta^\alpha(z)}{\partial z^\beta} \tag{2}$$

schreiben. Wenn wir (1) und (2) zusammensetzen, erhalten wir

$$\sum_\beta \frac{\partial\zeta^\alpha}{\partial f^\beta} (\bar\partial f^\beta + \sum_\lambda \psi_{\bar\lambda}^{\beta} \bar\partial \bar f^\lambda) = \sum_{\beta,\gamma} \varphi^\gamma(z) \frac{\partial\zeta^\alpha}{\partial f^\beta} (\partial_\gamma f^\beta + \sum_\lambda \psi_{\bar\lambda}^{\beta}\, \partial_\gamma \bar f^\lambda).$$

Nun ist nach Voraussetzung $\|\psi\|_k$ klein genug: Dann ist aber $\left(\frac{\partial\zeta^\alpha}{\partial f^\beta}\right)$ umkehrbar. Damit erhalten wir

$$\bar\partial f^\beta + \sum_\lambda \psi_{\bar\lambda}^{\beta} \bar\partial \bar f^\lambda = \sum_\gamma \varphi^\gamma (\partial_\gamma f^\beta + \sum_\lambda \psi_{\bar\lambda}^{\beta}\, \partial_\gamma \bar f^\lambda). \tag{3}$$

Da $\|\psi\|_k$ klein genug ist, ist auch $(\partial_\gamma f^\beta + \sum_\lambda \psi_{\bar\lambda}^{\beta}\, \partial_\gamma \bar f^\lambda)$ umkehrbar. Daraus erkennen wir, daß φ eindeutig durch (3) gegeben ist. Wir schreiben dafür auch $\psi \circ f = \varphi$.

Die Reduktion des allgemeinen Falls auf den Fall $\vartheta\psi = 0$ führen wir nun so durch, daß wir für gegebenes ψ ein f konstruieren mit $\vartheta(\psi \circ f) = 0$.

Diese Konstruktion führen wir in zwei Schritten.

(1) Wir geben eine kanonische Konstruktion an, die jedem Vektorfeld ξ auf M einen Diffeomorphismus $f_\xi\colon M \to M$ zuordnet.

(2) Für gegebenes ψ existiert ein Vektorfeld ξ mit $\vartheta(\psi \circ f_\xi) = 0$.

Zu (1). Wir fixieren eine hermitesche Metrik $(g_{\alpha\bar\beta})$ auf M. Mit Hilfe der Christoffelsymbole

$$\Gamma_{\lambda\beta}^{\alpha} = \sum_\mu g^{\bar\mu\alpha} \left(\frac{\partial g_{\beta\bar\mu}}{\partial z^\lambda}\right)$$

definieren wir für ein Vektorfeld $u(z) = \sum_\alpha u^\alpha(z) \frac{\partial}{\partial z^\alpha}$ die kovarianten Ableitungen

$$\nabla_\lambda u^\alpha = \frac{\partial u^\alpha}{\partial z^\lambda} + \sum_\beta \Gamma_{\lambda\beta}^{\alpha} u^\beta, \qquad \overline{\nabla}_\lambda u^\alpha = \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar z^\lambda}.$$

Ist $z(t)$ eine Kurve längs der $u(z)$ definiert ist, dann definieren wir

$$\nabla_t u^\alpha(z(t)) = \sum_\lambda \nabla_\lambda u^\alpha \frac{dz^\lambda(t)}{dt} + \sum_\lambda \overline{\nabla}_\lambda u^\alpha \overline{\frac{dz^\lambda(t)}{dt}}$$
$$= \frac{d}{dt} u^\alpha(z(t)) + \sum_{\lambda,\beta} \Gamma^\alpha_{\lambda\beta}(z(t)) \frac{dz^\lambda(t)}{dt} u^\beta(z(t)).$$

Die Geodätischen von M sind dann durch die Gleichung

$$\nabla_t \left(\frac{dz^\alpha(t)}{dt}\right) = 0,$$

d. h.

$$\frac{d^2 z^\alpha(t)}{dt^2} + \sum_{\lambda,\beta} \Gamma^\alpha_{\lambda\beta}(z(t)) \cdot \frac{dz^\lambda}{dt}(t) \cdot \frac{dz^\beta}{dt}(t) = 0 \tag{4}$$

gegeben. Es sei $z^\alpha(t) = z^\alpha(t, z_0, \zeta)$ die Lösung von (4) mit

$$z^\alpha(0) = z_0^\alpha, \qquad \frac{dz^\alpha}{dt}(0) = \zeta^\alpha.$$

Aus dem Existenz- und Eindeutigkeitssätzen für gewöhnliche Differentialgleichungen erhält man

(1) $\quad z^\alpha(t, z_0, \zeta) \in C^\infty$ in (t, z_0, ζ),

(2) $\quad z^\alpha(kt, z_0, \zeta) = z^\alpha(t, z_0, k\zeta)$.

Wir setzen nun

$$f^\alpha(z_0, \zeta) =: z^\alpha(1, z_0, \zeta).$$

Dann ist $f \in C^\infty$ in z_0, ζ; und es ist

$$f^\alpha(z_0, t\zeta) = z^\alpha(t, z_0, \zeta).$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{d}{dt} z^\alpha(t, z_0, \zeta) = \sum_\beta \left(\zeta^\beta \frac{\partial f^\alpha}{\partial \zeta^\beta}(z_0, t\zeta) + \bar{\zeta}^\beta \frac{\partial f^\alpha}{\partial \bar{\zeta}^\beta}(z_0, t\zeta)\right)$$

und damit für $t = 0$

$$\zeta^\alpha = \frac{dz^\alpha}{dt}(0, z_0, \zeta) = \sum_\beta \left[\zeta^\beta \frac{\partial f^\alpha}{\partial \zeta^\beta}(z_0, 0) + \bar{\zeta}^\beta \frac{\partial f^\alpha}{\partial \bar{\zeta}^\beta}(z_0, 0)\right].$$

Daraus folgt

$$f^\alpha(z_0, 0) = z_0^\alpha, \qquad \frac{\partial f^\alpha}{\partial \zeta^\beta}(z_0, 0) = \delta^\alpha_\beta, \qquad \frac{\partial f^\alpha}{\partial \bar{\zeta}^\beta}(z_0, 0) = 0.$$

Jetzt können wir die Taylorsche Formel von f angeben:

$$f^\alpha(z_0, \zeta) = z_0^\alpha + \zeta^\alpha + o(|\zeta|^2) \tag{5}$$

(dabei ist $o(|\zeta|^2)$ durch $M|\zeta|^2$ beschränkt für $M > 0$, $|\zeta|$ genügend klein).

Nun sei $\zeta = \sum_\alpha \zeta^\alpha(z) \frac{\partial}{\partial z^\alpha}$ ein Vektorfeld auf M. Wir definieren den Diffeomorphismus $f_\zeta \colon M \to M$ durch $z^\alpha \mapsto f^\alpha(z, \zeta(z))$. Aus der Gleichung (5) erhalten wir

$$f_\zeta^\alpha(z) = z^\alpha + \zeta^\alpha(z) + o(|\zeta(z)|^2). \tag{6}$$

Nun wollen wir $\varphi = \psi \circ f_\zeta$ berechnen. Dazu benutzen wir die Gleichung (3). Zur Abkürzung von (6) schreiben wir

$$f_\zeta^\alpha = z^\alpha + \zeta^\alpha + \nu^\alpha .$$

Damit erhalten wir

$$\bar\partial\zeta^\beta + \bar\partial\nu^\beta + \sum_\lambda \psi_{\bar\lambda}^\beta(f_\zeta)\,(d\bar z^\lambda + \bar\partial\bar\zeta^\lambda + \bar\partial\bar\nu^\lambda)$$

$$= \sum_{\gamma=1}^{n} [\delta_\gamma^\beta + \partial_\gamma\zeta^\beta + \partial_\gamma\nu^\beta + \sum_\lambda \psi_{\bar\lambda}^\beta(f_\zeta)\,(\partial_\gamma\bar\zeta^\lambda + \partial_\gamma\bar\nu^\lambda]\,\varphi^\gamma .$$

Nach der letzten Bemerkung ist die Matrix $[\ldots]$ umkehrbar. Wenn wir mit der Inversen multiplizieren, erhalten wir

$$\varphi^\gamma = \bar\partial\zeta^\gamma + \sum_\lambda \psi_{\bar\lambda}^\gamma(f_\zeta)\,d\bar z^\lambda + \cdots = \bar\partial\zeta^\gamma + \sum_\lambda \psi_{\bar\lambda}^\gamma(f_\zeta)\,dz^\lambda + R^\gamma(\psi, \zeta),$$

also

$$\psi \circ f = \varphi = \bar\partial\zeta + \psi + R(\psi, \zeta) \tag{7}$$

mit $R(t\psi, t\zeta) = t^2R^1(\psi, \zeta, t)$ für $t \in R$; $R, R^1 \in C^\infty$ in $\psi_{\bar\beta}^\alpha(z), \zeta^\alpha(z), \ldots$

Nun sei $H^0 \subseteqq A^0$ der Raum der holomorphen Vektorfelder auf M, F^0 sei das orthogonale Komplement bezüglich $(\ ,\ )$ von H^0. Wir geben jetzt A^0 und A^1 die $\|\ \|_k$-Topologie und beweisen:

Es existieren Umgebungen U und V in A^1 (bzw. A^0), so daß für beliebiges $\psi \in U$ genau ein $\zeta = \zeta(\psi)$ in V existiert mit

$$\vartheta(\psi \circ f_\zeta) = 0 \tag{8}$$

Beweis. Nach (7) gilt

$$\psi \circ f_\zeta = \partial\zeta + \psi + R(\psi, \zeta).$$

Damit ist (8) erfüllt für ein ζ genau dann, wenn

$$0 = \vartheta\,\bar\partial\zeta + \vartheta\psi + \vartheta R(\psi, \zeta) \quad \text{ist.}$$

Für $\zeta \in F^0$ ist nun

$$\zeta = H\zeta + \Box \circ G\zeta = H\zeta + G \circ \Box\zeta = H\zeta + G\vartheta\,\bar\partial\zeta$$

(denn $\vartheta\zeta = 0$!).

Nun ist für $\zeta \in F^0$ nach Definition $\zeta \perp H^0$ und damit $H\zeta = 0$ und somit $\zeta = G\vartheta\,\bar\partial\zeta$. Die Gleichung (8) ist also genau dann erfüllt, wenn

$$\zeta + G\vartheta\psi + G\vartheta R(\psi, \zeta) = 0,$$

d. h.

$$\zeta = -G\vartheta\psi - G\vartheta R(\psi, \zeta)$$

ist. Wir haben also gesehen:

Ein $\zeta \in F^0$ zu finden mit $\vartheta(\psi \circ f_\zeta) = 0$ ist gleichbedeutend damit, ein ζ zu finden mit

$$\zeta = G\vartheta\psi + G\vartheta R(\psi, \zeta) = 0. \tag{9}$$

Nun wählen wir Umgebungen U_1, V_1 so daß R auf $U_1 \times V_1$ definiert ist. Damit haben wir eine Abbildung $h\colon U_1 \times V_1 \to F_0$,

$$h(\psi, \zeta) = \zeta + G\vartheta\psi + G\vartheta R(\psi, \zeta).$$