Nach Definition von $(A^\lambda_{j\alpha})$ ist

$$\sum_\lambda \varphi^\lambda(t)\cdot\partial_\lambda\zeta^\alpha_j(z,t)=\bar\partial\zeta^\alpha_j(z,t),$$

d. h.

$$(\bar\partial-\sum_\lambda\varphi^\lambda(t)\cdot\partial_\lambda)\,\zeta^\alpha_j(z,t)=0. \qquad (*)$$

1.2.3. Lemma. *Die komplexe Struktur auf M_t wird durch $\varphi(t)$ bestimmt, d. h., eine C^∞-Funktion f auf M_t ist genau dann holomorph, wenn*

$$(\bar\partial-\sum_\lambda\varphi^\lambda(t)\,\partial_\lambda)(f)=0$$

ist.

Beweis. Die Implikation ($\Rightarrow$) ist wegen $(*)$ sofort klar.
($\Leftarrow$) Aus

$$(\bar\partial-\sum_\lambda\varphi^\lambda(t)\,\partial_\lambda)(f)=0$$

folgt sofort wegen $(*)$

$$\sum_\gamma\frac{\partial f}{\partial\bar\zeta^\alpha_j}\,(\bar\partial-\sum_\lambda\varphi^\lambda_{\bar\alpha}(t)\,\partial_\lambda)\,\bar\zeta^\gamma_j=0.$$

Da $\zeta^\alpha_j(z,0)$ holomorph in z ist, folgt $\varphi(0)=0$ (d. h. (2)) und daraus, weil die ζ^γ_j Koordinaten sind, die Umkehrbarkeit von $(\bar\partial_\alpha-\sum_\lambda\varphi^\lambda_{\bar\alpha}(t)\,\partial_\lambda)\,\bar\zeta^\gamma_j$ für kleine t.
Daher ist $\frac{\partial f}{\partial\bar\zeta^\alpha_j}=0$, also f holomorph.

Die Eigenschaft (1) in 1.2.2. ist nun weiter nichts als die gewöhnliche Integrabilitätsbedingung, die wegen des Lemmas erfüllt ist. (3) folgt durch explizite Berechnung von $\varrho_0\left(\frac{\partial}{\partial t_\nu}\right)$ über den Dolbeault-Isomorphismus.

1.3. Existenz semiuniverseller Familien I

Wir geben nun das Existenztheorem von Kodaira-Nirenberg-Spencer (1958, [15]) für semiuniverselle Familien an.

1.3.1. Theorem. *Es sei M eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit und $H^2(M,\Theta)=0$. Dann existiert eine komplex-analytische Familie $\mathcal{M}\xrightarrow{\pi}B$, $B=\{t\in C^m\mid |t|<\varepsilon\}$, mit*

(1) $M_0=M$ (*wobei allgemein $M_t=\pi^{-1}(t)$ ist*),

(2) $\varrho_0\left(\frac{\partial}{\partial t_\nu}\right)=-\eta^\nu$ *für eine feste Basis $\eta^1,\dots,\eta^m$ von $H^1(M,\Theta)$.*

Bemerkung. Die Semiuniversalität der Familie $\mathcal{M}\xrightarrow{\pi}B$ folgt sofort aus (2) und dem folgenden Theorem.

1.3.2. Theorem (Kodaira-Spencer 1958, vgl. [16], [14]). *Es sei $\{M_t\mid t\in B\}$ eine komplex-analytische Familie, $t_0\in B$. Ist dann ϱ_{t_0} surjektiv, so ist die Familie semiuniversell in t_0.*

Wir verzichten hier auf den Beweis und verweisen auf die angegebene Literatur.

Wir geben nun eine Beweisskizze von Satz 1.3.1. an:

1. Konstruktion einer $(0,1)$-Vektorform $\varphi(t)$ auf M, die holomorph von t abhängt und für die $\bar\partial\varphi(t) - \frac{1}{2}[\varphi(t), \varphi(t)] = 0$, $\varphi(0) = 0$ und $\left.\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t^\nu}\right|_{t=0} = \eta^\nu$ gilt.

2. Daraus folgt unter Benutzung des Theorems von NEWLANDER-NIRENBERG (1957, [21]):

a) $\varphi(t)$ bestimmt eine komplexe Struktur M_t auf M.

b) $\{M_t \mid t \in B\}$ ist eine komplex-analytische Familie.

c) $\{M_t \mid t \in B\}$ ist semiuniversell in 0.

Zu 1. Mittels einer hermiteschen Metrik $\{g_{\alpha\beta}\}$ wird durch

$$(\varphi, \psi) = \int_M \sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha\beta}\varphi^\alpha \wedge (*\,\psi^\beta)$$

ein Skalarprodukt auf $\mathscr{L}^p = \Gamma^{(\infty)}(M, A^{0,p} \otimes \Theta_M)$ definiert. Dabei ist

$$\varphi = \sum_\alpha \varphi^\alpha \frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \qquad \psi = \sum_\beta \psi^\beta \frac{\partial}{\partial z_\beta} \in \mathscr{L}^q,$$

$*\colon \Gamma^{(\infty)}A^{0,p} \to \Gamma^{(\infty)}A^{n,n-p}$ die durch die metrische Form ω mittels

$$\frac{\omega^n}{n!}\cdot(\varphi, \psi)(z) = \varphi(z) \wedge (*\,\bar\psi)(z)$$

definierte lineare Abbildung.

Es sei ϑ der zu $\bar\partial$ adjungierte, d. h. der durch $(\bar\partial\varphi, \psi) = (\varphi, \vartheta\psi)$ definierte Operator, $\Box = \vartheta\bar\partial + \bar\partial\vartheta$ der Laplace-Operator, $\mathscr{H}^q = \{\varphi \in \mathscr{L}^q, \Box\,\varphi = 0\} \cong H^q(M, \Theta)$ der Raum der harmonischen $(0, q)$-Formen.

Für gilt $\mathscr{L}^q$ das klassische

Zerlegungstheorem.

(1) $\mathscr{L}^q = \mathscr{H}^q \oplus \Box\mathscr{L}^q$.

(2) *Jedes $\varphi \in \mathscr{L}^q$ hat eine eindeutige Darstellung*

$$\varphi = \eta + \Box\,\psi \quad \textit{mit} \quad \eta \in \mathscr{H}^q \quad \textit{und} \quad \psi \in (\mathscr{H}^q)^\perp.$$

Wir schreiben $\eta = H(\varphi)$, $\psi = G(\varphi)$ ($H :=$ harmonischer Operator, $G :=$ Green-Operator.)

Wir konstruieren $\varphi(t)$ als formale Potenzreihe

$$\varphi(t) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \varphi_\mu(t),$$

$$\varphi_\mu(t) = \sum_{\nu_1+\cdots+\nu_m=\mu} \varphi_{\nu_1\cdots\nu_m} t_1^{\nu_1}\cdots t_m^{\nu_m},$$

welche für kleine t konvergiert. Es sei $\eta^1, \ldots, \eta^m$ eine Basis von $H^1(M, \Theta)$. Wir setzen $\varphi_1(t) = \sum_{\nu=1}^{m} \eta^\nu t_\nu$ und betrachten die Differentialgleichung

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) + \frac{1}{2}\,\vartheta G[\varphi(t), \varphi(t)].$$

Diese hat eine formale Lösung

$$\varphi(t) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \varphi_\mu(t)$$

mit

$$\varphi_\mu(t) = \sum_{k=1}^{\mu-1} \frac{1}{2} \vartheta G[\varphi_k, \varphi_{\mu-k}] \quad \text{für} \quad \mu \geqq 2.$$

Lemma 1. *$\varphi(t)$ konvergiert für kleine t.*

Der Beweis benutzt Eigenschaften der sogenannten Höldernorm $\|\varphi(t)\|_{k+\alpha}$ für $k \in \mathbf{Z}$, $0 \leqq \alpha \leqq 1$ (vgl. [14]). Es ist nämlich

$$\|\varphi(t)\| \leqq |A(t)|$$

für eine gewisse konvergente Reihe $A(t)$ (vgl. [14]).

Lemma 2. *Für die Reihe $\varphi(t)$ gilt*

$$\bar{\partial}(t) - \frac{1}{2}[\varphi(t), \varphi(t)] = 0$$

genau dann, wenn

$$H[\varphi(t), \varphi(t)] = 0$$

ist.

Beweis. ($\Rightarrow$) folgt sofort wegen $H\bar{\partial} = 0$. ($\Leftarrow$) Für $\psi(t) = \bar{\partial}\varphi(t) - \frac{1}{2}[\varphi(t), \varphi(t)]$ gilt $\psi(t) = -\vartheta G[\psi(t), \psi(t)]$ und daher die Abschätzung

$$\|\psi(t)\|_{k+\alpha} < C \cdot \|\varphi(t)\|_{k+\alpha} \cdot \|\varphi(t)\|_{k+\alpha}$$

für $\psi(t) \neq 0$, $\varphi(t) \neq 0$. Daher muß $\psi(t) = 0$ sein.

Bemerkung. Wegen der Voraussetzung $H^2(M, \Theta) \cong \mathcal{H}^2 = 0$ ist also

$$\bar{\partial}\varphi(t) - \frac{1}{2}[\varphi(t), \varphi(t)] = 0,$$

d. h., nach dem Theorem von Newlander-Nirenberg (vgl. [21]) bestimmt $\varphi(t)$ eine komplexe Struktur M_t auf M.

Lemma 3. *Die Familie $\{M_t \mid t \in B\}$, B Konvergenzbereich von $\varphi(t)$, ist eine komplexanalytische Familie.*

Beweis. Die Familie $\varphi(t)$ definiert eine (0, 1)-Vektorform auf $M \times B$: $\varphi(z, t) = \varphi(t)(z)$. Dann gilt

$$\bar{\partial}\varphi - \frac{1}{2}[\varphi, \varphi] = 0 \quad \text{auf} \quad M \times B,$$

d. h., φ induziert eine komplexe Struktur $\mathcal{M}$ auf $M \times B$, und die Projektion

$$\mathcal{M} \xrightarrow{\pi} B$$

ist holomorph vom Rang m. Weiterhin gilt $\pi^{-1}(t) = M_t$ und

$$\varrho_0\left(\frac{\partial}{\partial t^\nu}\right) = -\left(\frac{\partial \varphi(t)}{\partial t^\nu}\right)_{t=0} = -\left(\frac{\partial \varphi_1(t)}{\partial t^\nu}\right)_{t=0} = -\eta^\nu.$$

Daher ist ϱ_0 surjektiv (sogar ein Isomorphismus!), und nach Theorem 1.3.2 ist $\mathcal{M} \xrightarrow{\pi} B$ semiuniversell in 0, q. e. d.

1.4. Existenz semiuniverseller Familien II

Wir wollen nun einen zum vorigen Teil analogen Satz ohne die Einschränkung $H^2(M, \Theta) = 0$ beweisen. Aus dem vorigen Teil wissen wir, daß eine konvergente Potenzreihe $\varphi(t)$ existiert, die der Gleichung

$$\varphi(t) = \eta(t) + \frac{1}{2}\,\vartheta G[\varphi(t), \varphi(t)]$$

genügt, wobei $\varphi(t) = \sum_{\nu=1}^{m} \eta^\nu t_\nu$ und $\eta^1, \ldots, \eta^m$ Basis von $H^1(M, \Theta)$ ist. Dieses $\varphi(t)$ definiert eine komplexe Struktur genau dann, wenn

$$\bar{\partial}\varphi(t) - \frac{1}{2}[\varphi(t), \varphi(t)] = 0$$

ist. Das ist genau dann der Fall, wenn $H[\varphi(t), \varphi(t)] = 0$ ist. Es sei $\{\beta_\lambda, \lambda = 1, \ldots, \nu\}$ eine Orthonormalbasis von $H^2(M, \Theta)$; dann ist

$$H[\varphi(t), \varphi(t)] = \sum_{\lambda=1}^{\nu} ([\varphi(t), \varphi(t)], \beta_\lambda) \cdot \beta_\lambda$$

(wobei (,) das innere Produkt in H^2 ist). Daher ist $H[\varphi(t), \varphi(t)] = 0$ genau dann, wenn

$$b_\lambda(t) := ([\varphi(t), \varphi(t)], \beta_\lambda) = 0$$

ist für $\lambda = 1, \ldots, \nu$. Nun ist $b_\lambda(t)$ holomorph in t und $b_\lambda(0) = 0$.
Es sei

$$B = \{t \mid |t| < \varepsilon, b_\lambda(t) = 0, \lambda = 1, \ldots, \nu\}$$

(ε so klein, daß die $b_\lambda(t)$ konvergieren). Wenn dann t aus der analytischen Menge B ist, erfüllt $\varphi(t)$ die Integrabilitätsbedingung. B wird der Basisraum unserer zu konstruierenden semiuniversellen Familie.

Für die weiteren Betrachtungen benötigen wir die sogenannte *Sobolev-Norm.* Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, f, g komplexe C^∞-Funktionen, auf U definiert, k eine natürliche Zahl,

$$\langle f, g\rangle_k := \sum_{|\alpha| \leq k} \int_U D^\alpha f(x) \cdot \overline{D^\alpha g(x)}\, dx$$

mit $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$,

$$D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)^{\alpha_n}, \qquad \|f\|_k = \sqrt{\langle f, f\rangle_k}.$$

Für diese Norm gilt das klassische

1.4.1. Sobolev-Lemma. *Es sei V eine offene relativ kompakte Teilmenge von U. Dann gibt es eine Konstante c, so daß für alle $x \in V$*

$$|D^\alpha f(x)| = c \cdot \|f\|_{k+|\alpha|}$$

ist, falls nur $k > n/2$ ist. c hängt nur von k, $|\alpha|$, V und U ab.

Aus dem Lemma kann man leicht folgern: Es gibt eine Konstante c, so daß für $k \geq n + 2$

$$\|f \cdot g\|_k = c\|f\|_k \cdot \|g\|_k$$

ist.

Nun ist es nicht schwer, (mit der Zerlegung der Einheit) die Norm auf $\mathcal{L}^p$ auszudehnen. Man kann zeigen: Für $k \geqq 2\dim_{\mathbf{C}} M + 2$ gilt

(1) $\|[\varphi, \psi]\|_k \leqq c_k \|\varphi\|_{k+1} \cdot \|\psi\|_{k+1}$,

(2) $\|H\varphi\|_k \leqq c_k \|\varphi\|_k$,

(3) $\|\vartheta G\|_k \leqq c_k \|\varphi\|_{k-1}$

mit einer nur von der Norm abhängigen Konstanten c_k.

Wir wollen nun folgendes beweisen: *Es sei ψ eine beliebige Vektorform aus $\mathcal{L}^1$ mit*

$$\bar\partial\psi - \frac{1}{2}[\psi, \psi] = 0 \quad und \quad \vartheta\psi = 0.$$

Wenn dann $\|\psi\|_k$ genügend klein ist ($k \gg 0$), dann existiert ein t mit $\varphi(t) = \psi$.

Beweis. Es ist $\bar\partial\psi - \frac{1}{2}[\psi, \psi] = 0$. Da $\square = \vartheta\bar\partial + \bar\partial\vartheta$ und $\vartheta\psi = 0$ ist, ist $\square\psi = \vartheta\bar\partial\psi$ und somit

$$\square\,\psi = \frac{1}{2}\vartheta[\psi, \psi].$$

Andererseits ist

$$\psi = H\psi + \square\, G\psi = H\psi + G\square\,\psi$$

und damit

$$\psi - H\psi = G\,\square\,\psi = \frac{1}{2}G\vartheta[\psi, \psi].$$

Ist $\eta := H\psi$, dann ist

$$\psi = \eta + \frac{1}{2}\vartheta G[\psi, \psi].$$

Wenn nun $\|\psi\|_k$ klein ist, ist $\|\eta\|_k$ klein (wegen $\|H\psi\|_k \leqq c_k \cdot \|\psi\|_k$), und damit ist $\eta = \eta(t)$ für ein t mit $|t| < \varepsilon$ (denn es ist $\eta(t) = \sum \eta^\nu t_\nu$, η^ν Basis von $H^1(M, \Theta)$).

Wir haben also außer $\varphi(t)$ noch eine Lösung unserer Ausgangsgleichung

$$\psi = \eta(t) + \frac{1}{2}\vartheta G[\psi, \psi].$$

Es sei nun $\tau = \varphi(t) - \psi$. Wir wollen zeigen, daß $\tau = 0$ ist. Zunächst ist klar, daß $\|\tau\|_k$ genügend klein ist ($\|\tau\|_k \leqq \|\psi\|_k + \|p(t)\|_k$, $\|\psi(t)\|_k$ ist in der Umgebung von 0 genügend klein). Nun ist

$$\tau = \frac{1}{2}\vartheta G[\varphi(t), \varphi(t)] - \frac{1}{2}\vartheta G[\psi, \psi],$$

also

$$\tau = \frac{1}{2}\vartheta G(2[\psi, \tau] + [\tau, \tau]).$$

Daraus folgt

$$\|\tau\|_k \leqq D(2\|\psi\|_k \cdot \|\tau\|_k + \|\tau\|_k^2).$$

Da $\|\psi\|_k$ genügend klein ist, läßt sich diese Ungleichung nur erfüllen, wenn $\|\tau\|_k = 0$ ist.