II. Lokale Moduln

1. Komplex-analytische Familien

Dieser Abschnitt behandelt die Existenzsätze der klassischen lokalen Theorie der Deformationen komplex-analytischer Familien komplexer Mannigfaltigkeiten. Diese Theorie wurde 1958 von KODAIRA und SPENCER (vgl. [15]) begründet. Die wichtigsten Methoden und Resultate dieser Theorie, insbesondere der Existenzsatz für komplette Familien im Fall $H^2(M, \Theta) = 0$, werden in den Abschnitten 1.1. bis 1.3. dargelegt. Der allgemeine Existenzsatz für komplette Familien (KURANISHI 1962, [17]; vgl. auch [18] und [19]) wird in 1.4. skizziert. Abschnitt 1.5. beschäftigt sich mit der Frage, wann der Kuranishi-Raum (vgl. 1.4.) ein lokaler Modulraum ist. Hier wird im wesentlichen die Hindernistheorie von J. WAVRIK (1969, [23]) erläutert. Schließlich werden einige zusammenfassende Bemerkungen über die vorliegenden Resultate und die benutzten Methoden gemacht.

1.1. Komplex-analytische Familien und Deformationen. Beispiele

1.1.1. Definition. Eine *komplex-analytische Familie von kompakten komplexen Mannigfaltigkeiten* ist ein Tripel (M, π, B), wobei B ein zusammenhängender komplexer Raum, M eine beliebige komplexe Mannigfaltigkeit und $\pi: M \to B$ eine surjektive holomorphe Abbildung mit $\operatorname{Rang}(\operatorname{Jac}(\pi)) = \dim_{\mathbf{C}} B$ (π eigentlich) ist. ($\operatorname{Jac}(\pi)$ ist die Jacobische Matrix von π.)

Bemerkung. Offenbar sind dann die Fasern $M_t = \pi^{-1}(t)$ kompakte Untermannigfaltigkeiten von M, und es ist

$$\dim_{\mathbf{C}} M_t = \dim_{\mathbf{C}} M - \dim_{\mathbf{C}} B.$$

Beispiel 1 (*Komplexe Tori*). Es sei $w \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Im} w > 0$; $T_w := \mathbf{C}/G$, wobei G das Gitter $\{mw + n \mid m, n \in \mathbf{Z}\}$ ist. Dann ist $\{T_w \mid \operatorname{Im} w > 0\}$ eine komplex-analytische Familie.

Ist nämlich $B = \{w \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} w > 0\}$, dann operiert auf $\mathbf{C} \times B$ die Gruppe

$$\Gamma = \{g_{mn} \mid (m, n) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z},\ g_{mn}(z, b) := (mw + n + z, b)\}$$

von Automorphismen eigentlich unstetig und fixpunktfrei. Daher ist $M = \mathbf{C} \times B/\Gamma$ eine komplexe Mannigfaltigkeit, und die Projektion $\mathbf{C} \times B \xrightarrow{\pi} B$ induziert eine holomorphe Abbildung $M \xrightarrow{\pi} B$ mit $\operatorname{Rang}(\pi) = 1$ und $\pi^{-1}(w) = T_w$.

Beispiel 2 (*Regelflächen*). Vgl. Teil I, Abschnitt 4.2.

1.1.2. Satz (Ehresmann 1947). *Ist $\{M_t \mid t \in B\}$ eine komplex-analytische Familie und ist B glatt, so ist $M \to B$ eine C^∞-lokal-triviale Faserung.*

Der Beweis ist allgemein bekannt und z. B. in [14] zu finden. Der Beweis ist völlig analog zu dem analytischen Analogon (Teil I, Abschnitt 3.3., Anwendung 2), da sich C^∞-Vektorfelder stets liften lassen.

Dieser Satz läßt sich bei beliebiger Parametermannigfaltigkeit B wie folgt verallgemeinern:
Ist M eine kompakte, komplexe Mannigfaltigkeit und V eine kompakte C^∞-Mannigfaltigkeit, so ist $\mathrm{Diff}^r(V, M) =$ Menge aller C^r-Diffeomorphismen $f\colon V \to M$ $(r \geqq 1)$ eine Banach-komplexe Mannigfaltigkeit.
Ist $M_i \subset M$, $(z_i)\colon M_i \to C^n$, $i = 1, \ldots, k$, ein Atlas von M, ist $V_i \subset \bar{V}_i \subset f^{-1}M_i$ eine offene Überdeckung von V, $\bar{V}_i$ kompakt, so ist $W = \{g \in \mathrm{Diff}^{(r)}(V, M) \mid g(\bar{V}_i) \subset M_i\}$ eine Umgebung von f, und durch $g \mapsto ((z_i) \circ g)$ erhält man eine Einbettung von W auf einen komplexen Unterraum des Banachraumes $C^{(r)}(\bar{V}_1, C^n) \times \cdots \times C^{(r)}(\bar{V}_k, C^n)$ (mit der „r-Jet-Norm" versehen).
Offensichtlich ist der Tangentialraum in f an $\mathrm{Diff}^r(V, M)$ gleich $\Gamma^{(r)}(V, V \times_M T_M)$ ($V \times_M T_M$ mittels $f\colon V \to M$ gebildet, $\Gamma^{(r)}$ bezeichnet den Banachraum der Schnitte der Klasse C^r eines Vektorbündels, $T_M \xrightarrow{\tau} M$ sei das reelle Tangentialbündel an M).
Fixiert man auf M eine Riemannsche Metrik, so gibt es eine Umgebung N des Nullschnittes und eine C^∞-Abbildung $e\colon N \to M$, so daß $e(\xi)$ für einen Tangentialvektor ξ aus M der Punkt auf der Geodätischen durch den Fußpunkt $\tau(\xi)$ von ξ und mit der Anfangsrichtung ξ ist, der dem Parameter der Bogenlänge 1 entspricht, derart daß $N \to M \times M$ mit $\xi \mapsto (\tau(\xi), e(\xi))$ eine offene Einbettung ist.
Wählt man N hinreichend klein und betrachtet man die Menge U derjenigen Schnitte aus $\Gamma^{(r)}(V, V \times_M T_M)$, die den Abbildungen

$$\begin{tikzcd} s\colon V \arrow[r] \arrow[dr, "f"'] & N \subset T_M \arrow[d, "\tau"] \\ & M \end{tikzcd}$$

entsprechen, so erhält man durch die Zuordnung $s \mapsto e \circ s$ einen Isomorphismus von U auf eine Umgebung von f in $\mathrm{Diff}^{(r)}(V, M)$. Diese Konstruktion läßt sich auch im Fall einer Familie von glatten Mannigfaltigkeiten durchführen:
Ist $p\colon M \to B$ ein glatter eigentlicher Morphismus komplexer Räume und V eine kompakte C^∞-Mannigfaltigkeit,

$$\mathrm{Diff}^{(r)}(V, M \mid B) = \{f \mid f\ C^{(r)}\text{-Diffeomorphismus von } V \text{ auf eine Faser von } p\},$$

so gilt

1.1.3. Satz. *$\mathrm{Diff}^{(r)}(V, M \mid B)$ ist ein Banach-komplexer Raum, und die kanonische Projektion $\mathrm{Diff}^{(r)}(V, M \mid B) \to B$ ist ein glatter Morphismus. Der Tangentialraum an $f \in \mathrm{Diff}^{(r)}(V, M \mid B)$ ist $T_f\, \mathrm{Diff}^{(r)}(V, M \mid B) = \Gamma^{(r)}(V, V \times_M T_{M|B})$, wobei $T_{M|B}$ das Bündel längs der Faser ist.*

Ist also f_b ein r-Diffeomorphismus von V auf die Faser M_b, so gibt es nach dem Satz über implizite Funktionen in einer Umgebung U von b in B einen Schnitt f von $\mathrm{Diff}^{(r)}(V, M \mid B) \to B$, $t \mapsto f_t$; daher ist $U \times V \to M \mid U$, $(t, x) \mapsto f_t(x)$, eine Trivialisierung von $M \mid U$, die auf den Fasern ein r-Diffeomorphismus ist.