II. Lokale Moduln

1. Komplex-analytische Familien

Dieser Abschnitt behandelt die Existenzsätze der klassischen lokalen Theorie der Deformationen komplex-analytischer Familien komplexer Mannigfaltigkeiten. Diese Theorie wurde 1958 von KODAIRA und SPENCER (vgl. [15]) begründet. Die wichtigsten Methoden und Resultate dieser Theorie, insbesondere der Existenzsatz für komplette Familien im Fall $H^2(M,\Theta) = 0$, werden in den Abschnitten 1.1. bis 1.3. dargelegt. Der allgemeine Existenzsatz für komplette Familien (KURANISHI 1962, [17]; vgl. auch [18] und [19]) wird in 1.4. skizziert. Abschnitt 1.5. beschäftigt sich mit der Frage, wann der Kuranishi-Raum (vgl. 1.4.) ein lokaler Modulraum ist. Hier wird im wesentlichen die Hindernistheorie von J. WAVRIK (1969, [23]) erläutert. Schließlich werden einige zusammenfassende Bemerkungen über die vorliegenden Resultate und die benutzten Methoden gemacht.

1.1. Komplex-analytische Familien und Deformationen. Beispiele

1.1.1. Definition. Eine *komplex-analytische Familie von kompakten komplexen Mannigfaltigkeiten* ist ein Tripel (M, π, B), wobei B ein zusammenhängender komplexer Raum, M eine beliebige komplexe Mannigfaltigkeit und $\pi\colon M \to B$ eine surjektive holomorphe Abbildung mit $\mathrm{Rang}(\mathrm{Jac}(\pi)) = \dim_{\mathbf{C}} B$ (π eigentlich) ist. ($\mathrm{Jac}(\pi)$ ist die Jacobische Matrix von π.)

Bemerkung. Offenbar sind dann die Fasern $M_t = \pi^{-1}(t)$ kompakte Untermannigfaltigkeiten von M, und es ist

$$\dim_{\mathbf{C}} M_t = \dim_{\mathbf{C}} M - \dim_{\mathbf{C}} B.$$

Beispiel 1 (*Komplexe Tori*). Es sei $w \in \mathbf{C}$, $\mathrm{Im}\, w > 0$; $T_w := \mathbf{C}/G$, wobei G das Gitter $\{mw + n \mid m, n \in \mathbf{Z}\}$ ist. Dann ist $\{T_w \mid \mathrm{Im}\, w > 0\}$ eine komplex-analytische Familie.

Ist nämlich $B = \{w \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Im}\, w > 0\}$, dann operiert auf $\mathbf{C} \times B$ die Gruppe

$$\Gamma = \{g_{mn} \mid (m, n) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z},\ g_{mn}(z, b) := (mw + n + z, b)\}$$

von Automorphismen eigentlich unstetig und fixpunktfrei. Daher ist $M = \mathbf{C} \times B/\Gamma$ eine komplexe Mannigfaltigkeit, und die Projektion $\mathbf{C} \times B \xrightarrow{\pi} B$ induziert eine holomorphe Abbildung $M \xrightarrow{\pi} B$ mit $\mathrm{Rang}(\pi) = 1$ und $\pi^{-1}(w) = T_w$.

Beispiel 2 (*Regelflächen*). Vgl. Teil I, Abschnitt 4.2.

1.1.2. **Satz** (Ehresmann 1947). *Ist $\{M_t \mid t \in B\}$ eine komplex-analytische Familie und ist B glatt, so ist $M \to B$ eine C^∞-lokal-triviale Faserung.*

Der Beweis ist allgemein bekannt und z. B. in [14] zu finden. Der Beweis ist völlig analog zu dem analytischen Analogon (Teil I, Abschnitt 3.3., Anwendung 2), da sich C^∞-Vektorfelder stets liften lassen.

Dieser Satz läßt sich bei beliebiger Parametermannigfaltigkeit B wie folgt verallgemeinern:

Ist M eine kompakte, komplexe Mannigfaltigkeit und V eine kompakte C^∞-Mannigfaltigkeit, so ist $\mathrm{Diff}^r(V, M) =$ Menge aller C^r-Diffeomorphismen $f\colon V \to M$ $(r \geqq 1)$ eine Banach-komplexe Mannigfaltigkeit.

Ist $M_i \subset M$, $(z_i)\colon M_i \to C^n$, $i = 1, \ldots, k$, ein Atlas von M, ist $V_i \subset \bar{V}_i \subset f^{-1}M_i$ eine offene Überdeckung von V, $\bar{V}_i$ kompakt, so ist $W = \{g \in \mathrm{Diff}^{(r)}(V, M) \mid g(\bar{V}_i) \subset M_i\}$ eine Umgebung von f, und durch $g \mapsto ((z_i) \circ g)$ erhält man eine Einbettung von W auf einen komplexen Unterraum des Banachraumes $C^{(r)}(\bar{V}_1, C^n) \times \cdots \times C^{(r)}(\bar{V}_k, C^n)$ (mit der „r-Jet-Norm" versehen).

Offensichtlich ist der Tangentialraum in f an $\mathrm{Diff}^r(V, M)$ gleich $\Gamma^{(r)}(V, V \times_M T_M)$ ($V \times_M T_M$ mittels $f\colon V \to M$ gebildet, $\Gamma^{(r)}$ bezeichnet den Banachraum der Schnitte der Klasse C^r eines Vektorbündels, $T_M \xrightarrow{\tau} M$ sei das reelle Tangentialbündel an M).

Fixiert man auf M eine Riemannsche Metrik, so gibt es eine Umgebung N des Nullschnittes und eine C^∞-Abbildung $e\colon N \to M$, so daß $e(\xi)$ für einen Tangentialvektor ξ aus M der Punkt auf der Geodätischen durch den Fußpunkt $\tau(\xi)$ von ξ und mit der Anfangsrichtung ξ ist, der dem Parameter der Bogenlänge 1 entspricht, derart daß $N \to M \times M$ mit $\xi \mapsto (\tau(\xi), e(\xi))$ eine offene Einbettung ist.

Wählt man N hinreichend klein und betrachtet man die Menge U derjenigen Schnitte aus $\Gamma^{(r)}(V, V \times_M T_M)$, die den Abbildungen

$$\begin{tikzcd} s\colon V \arrow[r] \arrow[dr, "f"'] & N \subset T_M \arrow[d, "\tau"] \\ & M \end{tikzcd}$$

entsprechen, so erhält man durch die Zuordnung $s \mapsto e \circ s$ einen Isomorphismus von U auf eine Umgebung von f in $\mathrm{Diff}^{(r)}(V, M)$. Diese Konstruktion läßt sich auch im Fall einer Familie von glatten Mannigfaltigkeiten durchführen:

Ist $p\colon M \to B$ ein glatter eigentlicher Morphismus komplexer Räume und V eine kompakte C^∞-Mannigfaltigkeit,

$$\mathrm{Diff}^{(r)}(V, M \mid B) = \{f \mid f\ C^{(r)}\text{-Diffeomorphismus von } V \text{ auf eine Faser von } p\},$$

so gilt

1.1.3. **Satz.** $\mathrm{Diff}^{(r)}(V, M \mid B)$ *ist ein Banach-komplexer Raum, und die kanonische Projektion* $\mathit{Diff}^{(r)}(V, M \mid B) \to B$ *ist ein glatter Morphismus. Der Tangentialraum an* $f \in \mathrm{Diff}^{(r)}(V, M \mid B)$ *ist* $T_f\, \mathrm{Diff}^{(r)}(V, M \mid B) = \Gamma^{(r)}(V, V \times_M T_{M|B})$, *wobei* $T_{M|B}$ *das Bündel längs der Faser ist.*

Ist also f_b ein r-Diffeomorphismus von V auf die Faser M_b, so gibt es nach dem Satz über implizite Funktionen in einer Umgebung U von b in B einen Schnitt f von $\mathrm{Diff}^{(r)}(V, M \mid B) \to B$, $t \mapsto f_t$; daher ist $U \times V \to M \mid U$, $(t, x) \mapsto f_t(x)$, eine Trivialisierung von $M \mid U$, die auf den Fasern ein r-Diffeomorphismus ist.

Der folgende Satz ist 1965 von GRAUERT und FISCHER bewiesen worden und im gewissen Sinne analog zu 1.1.3.:

1.1.4. **Satz.** *Ist $M \xrightarrow{\pi} B$ ein glatter und eigentlicher Morphismus komplexer Räume und sind alle Fasern M_t isomorph zu einer komplexen Mannigfaltigkeit V, so ist $M \xrightarrow{\pi} B$ analytisch lokal trivial.*

Wir wollen diesen Satz nur für den Fall beweisen, daß es einen B-flachen komplexen Raum $I \to B$ und einen I-Isomorphismus $V \times I \xrightarrow{\sim} M \times_B I$ gibt, der den Funktor $\mathrm{Isom}_B(V \times B, M)$ repräsentiert, welcher jedem $B' \to B$ die Menge aller B'-Isomorphismen $V \times B' \xrightarrow{\sim} M \times_B B'$ zuordnet.
Dies ist z. B. für projektive Mannigfaltigkeiten immer der Fall, da der Funktor dann durch ein Unterschema des Hilbertschemas von $M \times_B M$ repräsentiert wird (vgl. Teil I, Abschnitt 2.).
Die Fasern von $I \to B$ sind nach Voraussetzung nicht leer und daher isomorph zu $\mathrm{Aut}(V) :=$ Automorphismengruppe von V; also ist $I \to B$ glatt, und der Satz über implizite Funktionen liefert zu jedem Punkt $b \in B$ eine Umgebung U und einen U-Isomorphismus $V \times U \xrightarrow{\sim} M \mid U$.

Beispiel 3 (*Hopfsche Flächen*). Es sei X eine zweidimensionale kompakte komplexe Mannigfaltigkeit mit $W = \mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}$ als universeller Überlagerung. Dann heißt X *Hopfsche Fläche.*

Es sei $0 < |\alpha| < 1$, $t \in \mathbb{C}$, $g: W \to W$ der Automorphismus

$$(z_1, z_2) \mapsto (\alpha z_1 + t z_2, \alpha z_2)$$

und $G_t = \{g^m \mid m \in \mathbb{Z}\}$. G_t operiert eigentlich unstetig und fixpunktfrei auf W, d. h., $M_t = W/G_t$ ist eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit.

1.1.5. **Satz.** *$\{M_t \mid t \in \mathbb{C}\}$ ist eine komplex-analytische Familie.*

Beweisidee. Auf $\mathbb{C} \times W$ operiert die Gruppe $\Gamma = \{\gamma^m \mid m \in \mathbb{Z}\}$ mit

$$\gamma \begin{pmatrix} t \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & t \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} t \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

eigentlich unstetig und fixpunktfrei. Daher ist $M = \mathbb{C} \times W/\Gamma$ eine komplexe Mannigfaltigkeit, und $M \xrightarrow{\mathrm{proj}} C$ ist eine komplex-analytische Familie. Offenbar ist $\mathrm{proj}^{-1}(t) = M_t$, q. e. d.

1.2. Infinitesimale Deformationen

Alle Mannigfaltigkeiten einer komplex-analytischen Familie sind nach 1.1.2. C^∞-diffeomorph; bei einer Deformation wird also die komplexe Struktur geändert. Ist V die zugrunde liegende C^∞-Mannigfaltigkeit einer komplexen Mannigfaltigkeit M, so wird die komplexe Struktur durch einen Endomorphismus

$$C_0 : T_V \to T_V, \quad C_0^2 = -\mathrm{id}_{T_V},$$

beschrieben, und jeder solche Endomorphismus (fast-komplexe Struktur) ist möglicher Kandidat für eine komplexe Struktur. Wir betrachten nur solche Endomorphismen C, für die $\mathrm{id}_{T_V} - C \circ C_0$ überall umkehrbar ist. Setzen wir $F' = (\mathrm{id} - C \circ C_0)$, $F'' = (\mathrm{id} + C \circ C_0)$, so gilt $F' \circ C_0 = C \circ F'$, $F'' \circ C_0$

$= -C \circ F''$, und folglich ist $\varphi := F'^{-1} \circ F''$ ein Endomorphismus von T_V mit

$$\varphi \circ C_0 = -C_0 \circ \varphi. \tag{1}$$

Identifizieren wir nun noch T_V mit dem komplex-analytischen Tangentialbündel T_M $\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} \mapsto \frac{\partial}{\partial z_\nu}, \frac{\partial}{\partial y_\nu} \mapsto -i\frac{\partial}{\partial z_\nu}\right.$, wobei $z_\nu = x_\nu + iy_\nu$ komplex-analytische Koordinaten sind$\Big)$, so ist φ also eine (0, 1)-Form auf M mit Werten in T_M, d. h. $\varphi \in \Gamma^{(\infty)}(M, A^{0,1} \otimes \Theta_M)$.

Ist umgekehrt φ eine solche (0, 1)-Form und $\mathrm{id}_{T_V} - \varphi$ überall umkehrbar, so wird durch

$$C = C_0 \circ (\mathrm{id} - \varphi)^{-1} \circ (\mathrm{id} + \varphi) \tag{2}$$

eine fast-komplexe Struktur mit der zugehörigen Form φ definiert. Dabei entspricht C_0 der 0-Form.

1.2.1. Theorem (Newlander-Nirenberg [21]). *Ist die fast-komplexe Struktur C auf V durch die (0, 1)-Form $\varphi \in \Gamma^{(\infty)}(M, A^{0,1} \otimes \Theta_M)$ definiert, so ist C genau dann integrierbar, wenn*

$$\bar\partial\varphi - \frac{1}{2}[\varphi, \varphi] = 0$$

ist. Die holomorphen Funktionen f bezüglich der durch C definierten komplexen Struktur sind diejenigen C^∞-Funktionen, die der Differentialgleichung

$$\bar\partial f - \varphi f = 0$$

genügen.

Wir wollen dieses Theorem hier nicht beweisen. Für den reell-analytischen Fall ist der Beweis eine einfache Anwendung des Satzes von Frobenius, für den differenzierbaren Fall ist der Beweis jedoch erheblich schwieriger. In der Integrabilitätsbedingung ist das Klammerprodukt für $\varphi \in \Gamma^{(\infty)}(M, A^{0,p} \otimes \Theta_M)$, $\psi \in \Gamma^{(\infty)}(M, A^{0,q} \otimes \Theta_M)$ wie folgt definiert:

Ist in komplexen Koordinaten $z_1, \ldots, z_n$ ausgedrückt

$$\varphi = \sum_{(j)} d\bar z_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar z_{j_p} \cdot \xi_{j_1 j_2 \ldots j_p},$$

$$\psi = \sum_{(k)} d\bar z_{k_1} \wedge \cdots \wedge d\bar z_{k_q} \cdot \eta_{k_1 k_2 \ldots k_q},$$

so ist

$$[\varphi, \psi] = \sum_{(j),(k)} d\bar z_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar z_{j_p} \wedge d\bar z_{k_1} \wedge \cdots \wedge d\bar z_{k_q} [\xi_{j_1 \ldots j_p}, \eta_{k_1 \ldots k_q}],$$

wobei in der Summe die gewöhnlichen Lie-Klammern für Funktionen vorkommen.

Für eine komplex-analytische Familie $M \xrightarrow{\pi} B$ erhält man also für jedes nahe bei einem ausgezeichneten Basispunkt O von B gelegene t und einen Diffeomorphismus $M_t \xrightarrow{\sim} M_0$ eine (0, 1)-Vektorform $\varphi(t)$ auf M_0. Wir wollen diese Form direkt beschreiben und den Zusammenhang mit der Kodaira-Spencer-Abbildung angeben. Die Kodaira-Spencer-Abbildung (vgl. Teil I, Abschnitt 3.3.) läßt sich wie folgt beschreiben:

Lokal auf M läßt sich jedes holomorphe Vektorfeld Θ auf B holomorph auf M liften, d. h., es gibt eine offene Überdeckung $U_1, \ldots, U_k$ von M und holomorphe Vektorfelder Θ_i auf U_i, $i = 1, \ldots, k$, die Liftungen von Θ sind. Dann gilt auf

$U_{ij} = U_i \cap U_j$, daß $\Theta_i - \Theta_j = \Theta_{ij}$ aus $\Theta_{M|B}(U_{ij})$ ist (wegen der exakten Folge $0 \to \Theta_{M|B} \to \Theta_M \to p^*\Theta_B$), und offensichtlich ist Θ_{ij} ein 1-Kozyklus, dessen Einschränkung auf M_t die Klasse $\varrho_t(\Theta(t))$ repräsentiert.

Ist beispielsweise

$$B = \{t = (t_1, \ldots, t_m) \in C^m, \quad |t_i| < \varepsilon\}$$

und $(U_i, (\zeta_i, t))$, $\zeta_i = (\zeta_i^1, \ldots, \zeta_i^n)$, $i = 1, \ldots, N$, ein Atlas auf M, so daß

$$\zeta_i = f_{ij}(\zeta_j, t) = (f_{ij}^\nu(\zeta_j, t))$$

auf $U_i \cap U_j$ ist, so ist $\Theta_i = \frac{\partial}{\partial t_\nu}$ auf U_i eine Liftung von $\frac{\partial}{\partial t_\nu}$ auf B, und auf $U_i \cap U_j$ gilt

$$\Theta_j = \sum_{k=1}^{n} \Theta_i(\zeta_j^k) \frac{\partial}{\partial \zeta_j^k} + \sum_{l=1}^{m} \Theta_i(t_l) \frac{\partial}{\partial t_l} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_{ji}^k}{\partial t_\nu} \frac{\partial}{\partial \zeta_j^k} + \frac{\partial}{\partial t_\nu},$$

d. h., $\varrho_t\left(\frac{\partial}{\partial t_\nu}\right)$ wird durch den Kozyklus $\Theta_i - \Theta_j = \Theta_{ij}$ repräsentiert.

Es sei $\{M_t \mid t \in B\}$ eine komplex-analytische Familie und B, $(U_i, (\zeta_i, t))$, und f_{ij}^ν seien wie oben definiert. Die angekündigte Beschreibung der komplexen Struktur von M_t durch eine (0, 1)-Form $\varphi(t)$ auf M_0, die holomorph von t abhängt, wird durch folgenden Satz geliefert:

1.2.2. Theorem. *Es sei $M \xrightarrow{\pi} B$ eine komplex-analytische Familie. Dann existiert eine Familie $\varphi(t)$ von (0, 1)-Vektorformen auf M_0, die holomorph von t abhängt, mit folgenden Eigenschaften:*

(1) $\quad \bar{\partial}\varphi(t) - \frac{1}{2}[\varphi, \varphi] = 0,$

(2) $\quad \varphi(0) = 0,$

(3) $\quad \varrho_0\left(\frac{\partial}{\partial t_\nu}\right) = - \left.\frac{\partial \varphi(t)}{\partial t_\nu}\right|_{t=0}.$

Beweisskizze.

1. Konstruktion von $\varphi(t)$: Es sei $t = 0$, und $(z_1, \ldots, z_n)$ seien Koordinaten auf $M = M_0$. $\zeta_j^\alpha(z, 0)$ sind ebenfalls Koordinaten auf M, holomorph in z. Daher ist die Matrix $\left(\frac{\partial \zeta_j^\alpha}{\partial z_\lambda}\right)$ umkehrbar für $|t| < \varepsilon$.

Es sei $(A_{j\alpha}^\lambda)$ die inverse Matrix.

Definition:

$$\varphi_j^\lambda(t) =_{\mathrm{Df}} \sum_{\alpha,\gamma} A_{j\alpha}^\lambda \frac{\partial \zeta_j^\alpha(z, t)}{\partial \bar{z}_\gamma} d\bar{z}_\gamma = \sum_\alpha A_{j\alpha}^\lambda \bar{\partial}_j^\alpha(z, t) \in A^{0,1}.$$

Diese Definition hängt nicht von der Wahl der Karten U_i und der Koordinaten z ab. Daher ist durch

$$\varphi(t) = \sum_\lambda \varphi^\lambda(t) \frac{\partial}{\partial t_\lambda}$$

eine (0, 1)-Vektorform auf M definiert.

Nach Definition von $(A^\lambda_{j\alpha})$ ist

$$\sum_\lambda \varphi^\lambda(t) \cdot \partial_\lambda \zeta^\alpha_j(z,t) = \bar\partial \zeta^\alpha_j(z,t),$$

d. h.

$$(\bar\partial - \sum_\lambda \varphi^\lambda(t) \cdot \partial_\lambda)\, \zeta^\alpha_j(z,t) = 0. \tag{$*$}$$

1.2.3. Lemma. *Die komplexe Struktur auf M_t wird durch $\varphi(t)$ bestimmt, d. h., eine C^∞-Funktion f auf M_t ist genau dann holomorph, wenn*

$$(\bar\partial - \sum_\lambda \varphi^\lambda(t)\, \partial_\lambda)(f) = 0$$

ist.

Beweis. Die Implikation ($\Rightarrow$) ist wegen ($*$) sofort klar.
($\Leftarrow$) Aus

$$(\bar\partial - \sum_\lambda \varphi^\lambda(t)\, \partial_\lambda)(f) = 0$$

folgt sofort wegen ($*$)

$$\sum_\gamma \frac{\partial f}{\partial \bar\zeta^\alpha_j} (\bar\partial - \sum_\lambda \varphi^{\lambda}_{\bar\alpha}(t)\, \partial_\lambda)\, \bar\zeta^\gamma_j = 0.$$

Da $\zeta^\alpha_j(z,0)$ holomorph in z ist, folgt $\varphi(0) = 0$ (d. h. (2)) und daraus, weil die ζ^γ_j Koordinaten sind, die Umkehrbarkeit von $(\bar\partial_\alpha - \sum_\lambda \varphi^{\lambda}_{\bar\alpha}(t)\, \partial_\lambda)\, \bar\zeta^\gamma_j$ für kleine t.
Daher ist $\dfrac{\partial f}{\partial \bar\zeta^\alpha_j} = 0$, also f holomorph.

Die Eigenschaft (1) in 1.2.2. ist nun weiter nichts als die gewöhnliche Integrabilitätsbedingung, die wegen des Lemmas erfüllt ist. (3) folgt durch explizite Berechnung von $\varrho_0\left(\dfrac{\partial}{\partial t_\nu}\right)$ über den Dolbeault-Isomorphismus.

1.3. Existenz semiuniverseller Familien I

Wir geben nun das Existenztheorem von Kodaira-Nirenberg-Spencer (1958, [15]) für semiuniverselle Familien an.

1.3.1. Theorem. *Es sei M eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit und $H^2(M,\Theta) = 0$. Dann existiert eine komplex-analytische Familie $\mathcal{M} \xrightarrow{\pi} B$, $B = \{t \in \mathbb{C}^m \mid |t| < \varepsilon\}$, mit*

(1) $M_0 = M$ *(wobei allgemein $M_t = \pi^{-1}(t)$ ist),*

(2) $\varrho_0\left(\dfrac{\partial}{\partial t_\nu}\right) = -\eta^\nu$ *für eine feste Basis $\eta^1, \ldots, \eta^m$ von $H^1(M,\Theta)$.*

Bemerkung. Die Semiuniversalität der Familie $\mathcal{M} \xrightarrow{\pi} B$ folgt sofort aus (2) und dem folgenden Theorem.

1.3.2. Theorem (Kodaira-Spencer 1958, vgl. [16], [14]). *Es sei $\{M_t \mid t \in B\}$ eine komplex-analytische Familie, $t_0 \in B$. Ist dann ϱ_{t_0} surjektiv, so ist die Familie semiuniversell in t_0.*

Wir verzichten hier auf den Beweis und verweisen auf die angegebene Literatur.

Wir geben nun eine Beweisskizze von Satz 1.3.1. an:

1. Konstruktion einer $(0, 1)$-Vektorform $\varphi(t)$ auf M, die holomorph von t abhängt und für die $\bar\partial\varphi(t) - \frac{1}{2}[\varphi(t), \varphi(t)] = 0$, $\varphi(0) = 0$ und $\left.\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t^\nu}\right|_{t=0} = \eta^\nu$ gilt.

2. Daraus folgt unter Benutzung des Theorems von NEWLANDER-NIRENBERG (1957, [21]):

a) $\varphi(t)$ bestimmt eine komplexe Struktur M_t auf M.

b) $\{M_t \mid t \in B\}$ ist eine komplex-analytische Familie.

c) $\{M_t \mid t \in B\}$ ist semiuniversell in 0.

Zu 1. Mittels einer hermiteschen Metrik $\{g_{\alpha\beta}\}$ wird durch

$$(\varphi, \psi) = \int_M \sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha\beta}\varphi^\alpha \wedge (*\,\psi^\beta)$$

ein Skalarprodukt auf $\mathcal{L}^p = \Gamma^{(\infty)}(M, A^{0,p} \otimes \Theta_M)$ definiert. Dabei ist

$$\varphi = \sum_\alpha \varphi^\alpha \frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \qquad \psi = \sum_\beta \psi^\beta \frac{\partial}{\partial z_\beta} \in \mathcal{L}^q,$$

$*: \Gamma^{(\infty)}A^{0,p} \to \Gamma^{(\infty)}A^{n,n-p}$ die durch die metrische Form ω mittels

$$\frac{\omega^n}{n!}\cdot(\varphi, \psi)(z) = \varphi(z) \wedge (*\,\bar\psi)(z)$$

definierte lineare Abbildung.

Es sei ϑ der zu $\bar\partial$ adjungierte, d. h. der durch $(\bar\partial\varphi, \psi) = (\varphi, \vartheta\psi)$ definierte Operator, $\Box = \vartheta\bar\partial + \bar\partial\vartheta$ der Laplace-Operator, $\mathcal{H}^q = \{\varphi \in \mathcal{L}^q, \Box\,\varphi = 0\} \cong H^q(M, \Theta)$ der Raum der harmonischen $(0, q)$-Formen.

Für gilt $\mathcal{L}^q$ das klassische

Zerlegungstheorem.

(1) $\mathcal{L}^q = \mathcal{H}^q \oplus \Box\mathcal{L}^q$.

(2) *Jedes* $\varphi \in \mathcal{L}^q$ *hat eine eindeutige Darstellung*

$$\varphi = \eta + \Box\,\psi \quad \text{mit} \quad \eta \in \mathcal{H}^q \quad \text{und} \quad \psi \in (\mathcal{H}^q)^\perp.$$

Wir schreiben $\eta = H(\varphi)$, $\psi = G(\varphi)$ ($H :=$ harmonischer Operator, $G :=$ Green-Operator.)

Wir konstruieren $\varphi(t)$ als formale Potenzreihe

$$\varphi(t) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \varphi_\mu(t),$$

$$\varphi_\mu(t) = \sum_{\nu_1+\cdots+\nu_m=\mu} \varphi_{\nu_1\cdots\nu_m} t_1^{\nu_1}\cdots t_m^{\nu_m},$$

welche für kleine t konvergiert. Es sei $\eta^1, \ldots, \eta^m$ eine Basis von $H^1(M, \Theta)$. Wir setzen $\varphi_1(t) = \sum_{\nu=1}^{m} \eta^\nu t_\nu$ und betrachten die Differentialgleichung

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) + \frac{1}{2}\vartheta G[\varphi(t), \varphi(t)].$$

Diese hat eine formale Lösung

$$\varphi(t) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \varphi_\mu(t)$$

mit

$$\varphi_\mu(t) = \sum_{k=1}^{\mu-1} \frac{1}{2}\, \vartheta G[\varphi_k, \varphi_{\mu-k}] \quad \text{für} \quad \mu \geqq 2.$$

Lemma 1. *$\varphi(t)$ konvergiert für kleine t.*

Der Beweis benutzt Eigenschaften der sogenannten Höldernorm $\|\varphi(t)\|_{k+\alpha}$ für $k \in \mathbf{Z}$, $0 \leqq \alpha \leqq 1$ (vgl. [14]). Es ist nämlich

$$\|\varphi(t)\| \leqq |A(t)|$$

für eine gewisse konvergente Reihe $A(t)$ (vgl. [14]).

Lemma 2. *Für die Reihe $\varphi(t)$ gilt*

$$\bar{\partial}(t) - \frac{1}{2}\, [\varphi(t), \varphi(t)] = 0$$

genau dann, wenn

$$H[\varphi(t), \varphi(t)] = 0$$

ist.

Beweis. ($\Rightarrow$) folgt sofort wegen $H\bar{\partial} = 0$. ($\Leftarrow$) Für $\psi(t) = \bar{\partial}\varphi(t) - \frac{1}{2}\, [\varphi(t), \varphi(t)]$ gilt $\psi(t) = -\vartheta G[\psi(t), \psi(t)]$ und daher die Abschätzung

$$\|\psi(t)\|_{k+\alpha} < C \cdot \|\varphi(t)\|_{k+\alpha} \cdot \|\varphi(t)\|_{k+\alpha}$$

für $\psi(t) \neq 0$, $\varphi(t) \neq 0$. Daher muß $\psi(t) = 0$ sein.

Bemerkung. Wegen der Voraussetzung $H^2(M, \Theta) \cong \mathscr{H}^2 = 0$ ist also

$$\bar{\partial}\varphi(t) - \frac{1}{2}\, [\varphi(t), \varphi(t)] = 0,$$

d. h., nach dem Theorem von Newlander-Nirenberg (vgl. [21]) bestimmt $\varphi(t)$ eine komplexe Struktur M_t auf M.

Lemma 3. *Die Familie $\{M_t \mid t \in B\}$, B Konvergenzbereich von $\varphi(t)$, ist eine komplex-analytische Familie.*

Beweis. Die Familie $\varphi(t)$ definiert eine $(0, 1)$-Vektorform auf $M \times B$: $\varphi(z, t) = \varphi(t)(z)$. Dann gilt

$$\bar{\partial}\varphi - \frac{1}{2}\, [\varphi, \varphi] = 0 \quad \text{auf} \quad M \times B,$$

d. h., φ induziert eine komplexe Struktur $\mathcal{M}$ auf $M \times B$, und die Projektion

$$\mathcal{M} \xrightarrow{\pi} B$$

ist holomorph vom Rang m. Weiterhin gilt $\pi^{-1}(t) = M_t$ und

$$\varrho_0 \left(\frac{\partial}{\partial t^\nu}\right) = -\left(\frac{\partial \varphi(t)}{\partial t^\nu}\right)_{t=0} = -\left(\frac{\partial \varphi_1(t)}{\partial t^\nu}\right)_{t=0} = -\eta^\nu.$$

Daher ist ϱ_0 surjektiv (sogar ein Isomorphismus!), und nach Theorem 1.3.2 ist $\mathcal{M} \xrightarrow{\pi} B$ semiuniversell in 0, q. e. d.

1.4. Existenz semiuniverseller Familien II

Wir wollen nun einen zum vorigen Teil analogen Satz ohne die Einschränkung $H^2(M, \Theta) = 0$ beweisen. Aus dem vorigen Teil wissen wir, daß eine konvergente Potenzreihe $\varphi(t)$ existiert, die der Gleichung

$$\varphi(t) = \eta(t) + \frac{1}{2}\,\vartheta G[\varphi(t), \varphi(t)]$$

genügt, wobei $\varphi(t) = \sum_{\nu=1}^{m} \eta^\nu t_\nu$ und $\eta^1, \ldots, \eta^m$ Basis von $H^1(M, \Theta)$ ist. Dieses $\varphi(t)$ definiert eine komplexe Struktur genau dann, wenn

$$\bar{\partial}\varphi(t) - \frac{1}{2}\,[\varphi(t), \varphi(t)] = 0$$

ist. Das ist genau dann der Fall, wenn $H[\varphi(t), \varphi(t)] = 0$ ist. Es sei $\{\beta_\lambda, \lambda = 1, \ldots, \nu\}$ eine Orthonormalbasis von $H^2(M, \Theta)$; dann ist

$$H[\varphi(t), \varphi(t)] = \sum_{\lambda=1}^{\nu} ([\varphi(t), \varphi(t)], \beta_\lambda) \cdot \beta_\lambda$$

(wobei (,) das innere Produkt in H^2 ist). Daher ist $H[\varphi(t), \varphi(t)] = 0$ genau dann, wenn

$$b_\lambda(t) := ([\varphi(t), \varphi(t)], \beta_\lambda) = 0$$

ist für $\lambda = 1, \ldots, \nu$. Nun ist $b_\lambda(t)$ holomorph in t und $b_\lambda(0) = 0$.
Es sei

$$B = \{t \mid |t| < \varepsilon, b_\lambda(t) = 0, \lambda = 1, \ldots, \nu\}$$

(ε so klein, daß die $b_\lambda(t)$ konvergieren). Wenn dann t aus der analytischen Menge B ist, erfüllt $\varphi(t)$ die Integrabilitätsbedingung. B wird der Basisraum unserer zu konstruierenden semiuniversellen Familie.

Für die weiteren Betrachtungen benötigen wir die sogenannte *Sobolev-Norm.* Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, f, g komplexe C^∞-Funktionen, auf U definiert, k eine natürliche Zahl,

$$\langle f, g\rangle_k := \sum_{|\alpha| \leq k} \int_U D^\alpha f(x) \cdot \overline{D^\alpha g(x)}\, dx$$

mit $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$,

$$D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)^{\alpha_n}, \qquad \|f\|_k = \sqrt{\langle f, f\rangle_k}.$$

Für diese Norm gilt das klassische

1.4.1. Sobolev-Lemma. *Es sei V eine offene relativ kompakte Teilmenge von U. Dann gibt es eine Konstante c, so daß für alle $x \in V$*

$$|D^\alpha f(x)| = c \cdot \|f\|_{k+|\alpha|}$$

ist, falls nur $k > n/2$ ist. c hängt nur von k, $|\alpha|$, V und U ab.

Aus dem Lemma kann man leicht folgern: Es gibt eine Konstante c, so daß für $k \geq n + 2$

$$\|f \cdot g\|_k = c\|f\|_k \cdot \|g\|_k$$

ist.

Nun ist es nicht schwer, (mit der Zerlegung der Einheit) die Norm auf $\mathcal{L}^p$ auszudehnen. Man kann zeigen: Für $k \geqq 2 \dim_{\mathbf{C}} M + 2$ gilt

(1) $\quad \|[\varphi, \psi]\|_k \leqq c_k \|\varphi\|_{k+1} \cdot \|\psi\|_{k+1}$,

(2) $\quad \|H\varphi\|_k \leqq c_k \|\varphi\|_k$,

(3) $\quad \|\vartheta G\|_k \leqq c_k \|\varphi\|_{k-1}$

mit einer nur von der Norm abhängigen Konstanten c_k.

Wir wollen nun folgendes beweisen: *Es sei ψ eine beliebige Vektorform aus $\mathcal{L}^1$ mit*

$$\bar{\partial}\psi - \frac{1}{2}[\psi, \psi] = 0 \quad \textit{und} \quad \vartheta\psi = 0.$$

Wenn dann $\|\psi\|_k$ genügend klein ist ($k \gg 0$), dann existiert ein t mit $\varphi(t) = \psi$.

Beweis. Es ist $\bar{\partial}\psi - \frac{1}{2}[\psi, \psi] = 0$. Da $\square = \vartheta\bar{\partial} + \bar{\partial}\vartheta$ und $\vartheta\psi = 0$ ist, ist $\square\psi = \vartheta\bar{\partial}\psi$ und somit

$$\square\,\psi = \frac{1}{2}\vartheta[\psi, \psi].$$

Andererseits ist

$$\psi = H\psi + \square\, G\psi = H\psi + G\square\,\psi$$

und damit

$$\psi - H\psi = G\,\square\,\psi = \frac{1}{2} G\vartheta[\psi, \psi].$$

Ist $\eta := H\psi$, dann ist

$$\psi = \eta + \frac{1}{2}\vartheta G[\psi, \psi].$$

Wenn nun $\|\psi\|_k$ klein ist, ist $\|\eta\|_k$ klein (wegen $\|H\psi\|_k \leqq c_k \cdot \|\psi\|_k$), und damit ist $\eta = \eta(t)$ für ein t mit $|t| < \varepsilon$ (denn es ist $\eta(t) = \sum \eta^\nu t_\nu$, η^ν Basis von $H^1(M, \Theta)$).
Wir haben also außer $\varphi(t)$ noch eine Lösung unserer Ausgangsgleichung

$$\psi = \eta(t) + \frac{1}{2}\vartheta G[\psi, \psi].$$

Es sei nun $\tau = \varphi(t) - \psi$. Wir wollen zeigen, daß $\tau = 0$ ist. Zunächst ist klar, daß $\|\tau\|_k$ genügend klein ist ($\|\tau\|_k \leqq \|\psi\|_k + \|p(t)\|_k$, $\|\psi(t)\|_k$ ist in der Umgebung von 0 genügend klein). Nun ist

$$\tau = \frac{1}{2}\vartheta G[\varphi(t), \varphi(t)] - \frac{1}{2}\vartheta G[\psi, \psi],$$

also

$$\tau = \frac{1}{2}\vartheta G(2[\psi, \tau] + [\tau, \tau]).$$

Daraus folgt

$$\|\tau\|_k \leqq D(2\|\psi\|_k \cdot \|\tau\|_k + \|\tau\|_k^2).$$

Da $\|\psi\|_k$ genügend klein ist, läßt sich diese Ungleichung nur erfüllen, wenn $\|\tau\|_k = 0$ ist.

Nun wollen wir uns dem allgemeinen Fall zuwenden, d. h., $\psi \in \mathcal{L}^1$ ist gegeben mit $\|\psi\|_k < \varepsilon$ und $\bar\partial\psi - \frac{1}{2}[\psi, \psi] = 0$, aber $\vartheta\psi \neq 0$.

Wir wollen diesen Fall zurückführen auf den vorigen. Es sei $f\colon M \to M$ ein beliebiger Diffeomorphismus, dessen Werte dicht bei den Werten der identischen Abbildung liegen und dessen Werte der ersten Ableitung dicht bei den Werten der identischen Abbildung liegen. Wir wollen Bedingungen finden, für die ψ durch f aus $\varphi(t)$ für ein t induziert wird.

Es sei $\{U_j, \zeta_j^\alpha(z)\}$ eine holomorphe Karte für M_ψ, d. h.

$$\bar\partial\zeta^\alpha(z) = \sum_{\beta=1}^{n} \psi^\beta(z) \cdot \partial_\beta\zeta^\alpha(z). \tag{0}$$

Es sei $\{U_j'\}$ eine Überdeckung von M mit $f(u_j') \subseteqq U_j$. Wird ψ durch f aus φ induziert ($f\colon M_\varphi \to M_\psi$), d. h., sind $\zeta_j^\alpha(f(z))$ holomorphe Koordinaten auf U_j' bezüglich φ, so haben wir die Differentialgleichung

$$\bar\partial\zeta^\alpha(f(z)) = \sum_{\beta=1}^{n} \varphi^\beta(z)\, \partial_\beta\zeta^\alpha(f(z)). \tag{1}$$

Für die obige Gleichung (0) können wir lokal auch

$$\frac{\partial}{\partial\bar z^\lambda}\zeta^\alpha(z) = \sum_{\beta=1}^{n} \psi_{\bar\lambda}^{\beta}(z)\, \frac{\partial\zeta^\alpha(z)}{\partial z^\beta} \tag{2}$$

schreiben. Wenn wir (1) und (2) zusammensetzen, erhalten wir

$$\sum_\beta \frac{\partial\zeta^\alpha}{\partial f^\beta}\Big(\bar\partial f^\beta + \sum_\lambda \psi_{\bar\lambda}^{\beta}\,\bar\partial \bar f^\lambda\Big) = \sum_{\beta,\gamma} \varphi^\gamma(z)\, \frac{\partial\zeta^\alpha}{\partial f^\beta}\Big(\partial_\gamma f^\beta + \sum_\lambda \psi_{\bar\lambda}^{\beta}\,\partial_\gamma \bar f^\lambda\Big).$$

Nun ist nach Voraussetzung $\|\psi\|_k$ klein genug: Dann ist aber $\left(\frac{\partial\zeta^\alpha}{\partial f^\beta}\right)$ umkehrbar. Damit erhalten wir

$$\bar\partial f^\beta + \sum_\lambda \psi_{\bar\lambda}^{\beta}\,\bar\partial \bar f^\lambda = \sum_\gamma \varphi^\gamma\Big(\partial_\gamma f^\beta + \sum_\lambda \psi_{\bar\lambda}^{\beta}\,\partial_\gamma \bar f^\lambda\Big). \tag{3}$$

Da $\|\psi\|_k$ klein genug ist, ist auch $(\partial_\gamma f^\beta + \sum_\lambda \psi_{\bar\lambda}^{\beta}\,\partial_\gamma \bar f^\lambda)$ umkehrbar. Daraus erkennen wir, daß φ eindeutig durch (3) gegeben ist. Wir schreiben dafür auch $\psi \circ f = \varphi$.

Die Reduktion des allgemeinen Falls auf den Fall $\vartheta\psi = 0$ führen wir nun so durch, daß wir für gegebenes ψ ein f konstruieren mit $\vartheta(\psi \circ f) = 0$.

Diese Konstruktion führen wir in zwei Schritten.

(1) Wir geben eine kanonische Konstruktion an, die jedem Vektorfeld ξ auf M einen Diffeomorphismus $f_\xi\colon M \to M$ zuordnet.

(2) Für gegebenes ψ existiert ein Vektorfeld ξ mit $\vartheta(\psi \circ f_\xi) = 0$.

Zu (1). Wir fixieren eine hermitesche Metrik $(g_{\alpha\bar\beta})$ auf M. Mit Hilfe der Christoffelsymbole

$$\Gamma_{\lambda\beta}^{\alpha} = \sum_\mu g^{\bar\mu\alpha}\left(\frac{\partial g_{\beta\bar\mu}}{\partial z^\lambda}\right)$$

definieren wir für ein Vektorfeld $u(z) = \sum_\alpha u^\alpha(z)\,\frac{\partial}{\partial z^\alpha}$ die kovarianten Ableitungen

$$\nabla_\lambda u^\alpha = \frac{\partial u^\alpha}{\partial z^\lambda} + \sum_\beta \Gamma_{\lambda\beta}^{\alpha} u^\beta, \qquad \overline{\nabla}_\lambda u^\alpha = \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar z^\lambda}.$$

Ist $z(t)$ eine Kurve längs der $u(z)$ definiert ist, dann definieren wir

$$\nabla_t u^\alpha(z(t)) = \sum_\lambda \nabla_\lambda u^\alpha \frac{dz^\lambda(t)}{dt} + \sum_\lambda \overline{\nabla}_\lambda u^\alpha \overline{\frac{dz^\lambda(t)}{dt}}$$
$$= \frac{d}{dt} u^\alpha(z(t)) + \sum_{\lambda,\beta} \Gamma^\alpha_{\lambda\beta}(z(t)) \frac{dz^\lambda(t)}{dt} u^\beta(z(t)).$$

Die Geodätischen von M sind dann durch die Gleichung

$$\nabla_t \left(\frac{dz^\alpha(t)}{dt}\right) = 0,$$

d. h.

$$\frac{d^2 z^\alpha(t)}{dt^2} + \sum_{\lambda,\beta} \Gamma^\alpha_{\lambda\beta}(z(t)) \cdot \frac{dz^\lambda}{dt}(t) \cdot \frac{dz^\beta}{dt}(t) = 0 \tag{4}$$

gegeben. Es sei $z^\alpha(t) = z^\alpha(t, z_0, \zeta)$ die Lösung von (4) mit

$$z^\alpha(0) = z_0^\alpha, \qquad \frac{dz^\alpha}{dt}(0) = \zeta^\alpha.$$

Aus dem Existenz- und Eindeutigkeitssätzen für gewöhnliche Differentialgleichungen erhält man

(1) $\quad z^\alpha(t, z_0, \zeta) \in C^\infty \quad \text{in} \quad (t, z_0, \zeta)$,

(2) $\quad z^\alpha(kt, z_0, \zeta) = z^\alpha(t, z_0, k\zeta)$.

Wir setzen nun

$$f^\alpha(z_0, \zeta) =: z^\alpha(1, z_0, \zeta).$$

Dann ist $f \in C^\infty$ in z_0, ζ; und es ist

$$f^\alpha(z_0, t\zeta) = z^\alpha(t, z_0, \zeta).$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{d}{dt} z^\alpha(t, z_0, \zeta) = \sum_\beta \left(\zeta^\beta \frac{\partial f^\alpha}{\partial \zeta^\beta}(z_0, t\zeta) + \bar{\zeta}^\beta \frac{\partial f^\alpha}{\partial \bar{\zeta}^\beta}(z_0, t\zeta)\right)$$

und damit für $t = 0$

$$\zeta^\alpha = \frac{dz^\alpha}{dt}(0, z_0, \zeta) = \sum_\beta \left[\zeta^\beta \frac{\partial f^\alpha}{\partial \zeta^\beta}(z_0, 0) + \bar{\zeta}^\beta \frac{\partial f^\alpha}{\partial \bar{\zeta}^\beta}(z_0, 0)\right].$$

Daraus folgt

$$f^\alpha(z_0, 0) = z_0^\alpha, \qquad \frac{\partial f^\alpha}{\partial \zeta^\beta}(z_0, 0) = \delta^\alpha_\beta, \qquad \frac{\partial f^\alpha}{\partial \bar{\zeta}^\beta}(z_0, 0) = 0.$$

Jetzt können wir die Taylorsche Formel von f angeben:

$$f^\alpha(z_0, \zeta) = z_0^\alpha + \zeta^\alpha + o(|\zeta|^2) \tag{5}$$

(dabei ist $o(|\zeta|^2)$ durch $M|\zeta|^2$ beschränkt für $M > 0$, $|\zeta|$ genügend klein).

Nun sei $\zeta = \sum_\alpha \zeta^\alpha(z) \frac{\partial}{\partial z^\alpha}$ ein Vektorfeld auf M. Wir definieren den Diffeomorphismus $f_\zeta \colon M \to M$ durch $z^\alpha \mapsto f^\alpha(z, \zeta(z))$. Aus der Gleichung (5) erhalten wir

$$f^\alpha_\zeta(z) = z^\alpha + \zeta^\alpha(z) + o(|\zeta(z)|^2). \tag{6}$$

Nun wollen wir $\varphi = \psi \circ f_\zeta$ berechnen. Dazu benutzen wir die Gleichung (3). Zur Abkürzung von (6) schreiben wir

$$f_\zeta^\alpha = z^\alpha + \zeta^\alpha + \nu^\alpha.$$

Damit erhalten wir

$$\bar\partial\zeta^\beta + \bar\partial\nu^\beta + \sum_\lambda \psi_{\bar\lambda}^\beta(f_\zeta)\,(d\bar z^\lambda + \bar\partial\bar\zeta^\lambda + \bar\partial\bar\nu^\lambda)$$

$$= \sum_{\gamma=1}^n [\delta_\nu^\beta + \partial_\gamma\zeta^\beta + \partial_\gamma\nu^\beta + \sum_\lambda \psi_{\bar\lambda}^\beta(f_\zeta)\,(\partial_\gamma\bar\zeta^\lambda + \partial_\gamma\bar\nu^\lambda]\,\varphi^\gamma.$$

Nach der letzten Bemerkung ist die Matrix [...] umkehrbar. Wenn wir mit der Inversen multiplizieren, erhalten wir

$$\varphi^\gamma = \bar\partial\zeta^\gamma + \sum_\lambda \psi_{\bar\lambda}^\gamma(f_\zeta)\,d\bar z^\lambda + \cdots = \bar\partial\zeta^\gamma + \sum_\lambda \psi_{\bar\lambda}^\gamma(f_\zeta)\,dz^\lambda + R^\gamma(\psi, \zeta),$$

also

$$\psi \circ f = \varphi = \bar\partial\zeta + \psi + R(\psi, \zeta) \tag{7}$$

mit $R(t\psi, t\zeta) = t^2R^1(\psi, \zeta, t)$ für $t \in R$; $R, R^1 \in C^\infty$ in $\psi_\beta^\alpha(z), \zeta^\alpha(z), \ldots$
Nun sei $H^0 \subseteqq A^0$ der Raum der holomorphen Vektorfelder auf M, F^0 sei das orthogonale Komplement bezüglich $(\ ,\ )$ von H^0. Wir geben jetzt A^0 und A^1 die $\|\ \|_k$-Topologie und beweisen:

Es existieren Umgebungen U und V in A^1 (bzw. A^0), so daß für beliebiges $\psi \in U$ genau ein $\zeta = \zeta(\psi)$ in V existiert mit

$$\vartheta(\psi \circ f_\zeta) = 0 \tag{8}$$

Beweis. Nach (7) gilt

$$\psi \circ f_\zeta = \partial\zeta + \psi + R(\psi, \zeta).$$

Damit ist (8) erfüllt für ein ζ genau dann, wenn

$$0 = \vartheta\,\bar\partial\zeta + \vartheta\psi + \vartheta R(\psi, \zeta) \quad \text{ist.}$$

Für $\zeta \in F^0$ ist nun

$$\zeta = H\zeta + \Box \circ G\zeta = H\zeta + G \circ \Box\zeta = H\zeta + G\vartheta\,\bar\partial\zeta$$

(denn $\vartheta\zeta = 0$!).
Nun ist für $\zeta \in F^0$ nach Definition $\zeta \perp H^0$ und damit $H\zeta = 0$ und somit $\zeta = G\vartheta\,\bar\partial\zeta$. Die Gleichung (8) ist also genau dann erfüllt, wenn

$$\zeta + G\vartheta\psi + G\vartheta R(\psi, \zeta) = 0,$$

d. h.

$$\zeta = -G\vartheta\psi - G\vartheta R(\psi, \zeta)$$

ist. Wir haben also gesehen:
Ein $\zeta \in F^0$ zu finden mit $\vartheta(\psi \circ f_\zeta) = 0$ ist gleichbedeutend damit, ein ζ zu finden mit

$$\zeta = G\vartheta\psi + G\vartheta R(\psi, \zeta) = 0. \tag{9}$$

Nun wählen wir Umgebungen U_1, V_1 so daß R auf $U_1 \times V_1$ definiert ist. Damit haben wir eine Abbildung $h\colon U_1 \times V_1 \to F_0$,

$$h(\psi, \zeta) = \zeta + G\vartheta\psi + G\vartheta R(\psi, \zeta).$$

Man überlegt sich sofort, daß h bezüglich der $\| \|_k$-Topologie gleichmäßig stetig ist. Damit können wir h zu einer Abbildung h (eindeutig) auf die Abschließung $\widehat{F^0}$ von F^0 ausdehnen. Nun ist $\left.\frac{\partial h}{\partial \zeta}\right|_{(0,0)} : \widehat{F^0} \to \widehat{F^0}$ die Identität. Wir können also den Satz über implizite Funktionen anwenden und erhalten in einer kleinen Umgebung des Ursprungs von $\widehat{A}^1$ (Abschließung von A^1) eine C^∞-Funktion g, so daß

$$\zeta + G\vartheta\psi + G\vartheta R(\psi, \zeta) = 0$$

erfüllt ist, genau dann, wenn $\zeta = g(\psi)$ ist.

Man überlegt sich durch die Untersuchung der Differentialgleichung zweiter Ordnung vom elliptischen Typ $\square + \vartheta + \vartheta R(\psi, \quad) = 0$, daß $\zeta \in F^0$ ist. Damit haben wir unser Problem gelöst und folgenden Satz bewiesen:

1.4.2. Theorem (Kuranishi). a) *Es sei M eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit, $\{\eta^\nu\}$ eine Basis von $H^1(M, \Theta)$, $\varphi(t)$ eine Lösung von*

$$\varphi(t) = \sum_{\nu=1} \varphi_\nu t_\nu + \frac{1}{2}[\varphi(t), \varphi(t)]$$

und $B = \{t \mid H[\varphi(t), \varphi(t)] = 0\} = \{t \in \mathbf{C} \mid |t| < \varepsilon$ *und* $b_\lambda(t) = 0$ *für* $\lambda = 1, \ldots, r\}$. *Dann induziert $\varphi(t)$ für jedes t aus der analytischen Menge B eine komplexe Struktur M_t auf M.*

b) *Es sei ψ eine beliebige Vektorform aus $\mathcal{L}^1$ mit*

$$\bar{\partial}\psi - \frac{1}{2}[\psi, \psi] = 0.$$

Dann definiert ψ eine komplexe Struktur M_ψ auf M. Wenn $\|\psi\|_k$ genügend klein ist, dann existiert genau ein $\zeta \in F^0$ mit

$$\psi \circ f_\zeta = \varphi(t) \quad \text{für ein } t \in B,$$

womit M_ψ zu M_t biholomorph äquivalent ist.

Von Grauert wurde eine andere Methode entwickelt, um die Existenz semiuniverseller Deformationen nachzuweisen. Diese besteht darin, geeignete Überdeckungen zu betrachten und die Verheftungsbedingungen zu deformieren sowie die eventuell vorhandenen Singularitäten. Damit kann folgendes Theorem gezeigt werden (Grauert, Douady).

1.4.3. Theorem. *Jede kompakte komplexe Mannigfaltigkeit besitzt eine semiuniverselle Deformation, die in allen Punkten des Parameterraumes noch vollständig ist.*

1.5. Existenz von lokalen Modulräumen kompakter komplex-analytischer Mannigfaltigkeiten

Problemstellung: Wir betrachten „Keime" von Familien kompakter komplex-analytischer Mannigfaltigkeiten (siehe 1.1.), d. h., wir identifizieren zwei Familien $M \xrightarrow{\pi} B$ und $M' \xrightarrow{\omega} B$ mit demselben Parameterraum, wenn ihre Einschränkungen auf irgendeine Umgebung des Basispunktes $o \in B$ isomorph sind.

Es sei M eine feste kompakte komplexe Mannigfaltigkeit und $M \xrightarrow{\pi} B$ eine in $o \in B$ universelle Familie mit $M_0 = M$, so daß für jede Familie $N \to B'$ mit $N_0 = M$ der wegen der Universalität von $M \xrightarrow{\pi} B$ existierende Morphismus $f: (B', o) \to (B, o)$

eindeutig bestimmt ist. Dann heißt $M \xrightarrow{\pi} B$ eine *modulare Familie* und (B, o) ein *lokaler Modulraum* für M.

Die Probleme sind nun die folgenden:

1. Welche Räume (B, o) kommen als lokale Modulräume in Frage?
2. Man gebe ein Kriterium für die Eixistenz eines Modulraumes an!

Das erste Problem wird durch folgenden einfachen Satz gelöst:

1.5.1. Theorem. *Ist $M \to B$ eine analytische Familie komplexer Räume, die in $o \in B$ semiuniversell ist, $M' \to B'$ eine solche, die in $o' \in B'$ versell ist, und $M_0' \overset{i'}{\simeq} M \overset{i}{\simeq} M_0$, so gibt es Morphismen von Raumkeimen*

$$(B', o) \xrightarrow{\pi} (B' o) \xrightarrow{\sigma} (B', o')$$

und mit i und i' verträgliche Isomorphismen $\pi^*M = M \times_B B' \simeq M'$ (über einer Umgebung von o'), $\sigma^*M' = M' \times_{B'} B \simeq M$ (über einer Umgebung von o), so daß $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}$ ist, und wenn $M \to B$ universell ist, ist $(B', o') \simeq (B, o) \times (C^r, o)$ über (B, o) ((C^r, o) bezeichnet den Raumkeim von C^r im Nullpunkt).

Insbesondere ist also die Kuranishi-Familie $M \to B$ einer kompakten komplexen Mannigfaltigkeit universell, falls es überhaupt eine universelle Deformation von M gibt.

Beweis. Wegen der Semiuniversalität bzw. Versalität gibt es Abbildungen $(B', o) \xrightarrow{\alpha} (B, o) \xrightarrow{\beta} (B', o')$, so daß $\alpha^*M \simeq M'$, $\beta^*M' \simeq M$ (verträglich mit i und i') ist, also ist $\gamma = \alpha \circ \beta : (B, o) \to (B, o)$ eine Abbildung mit $\gamma^*M \simeq M$ (verträglich mit i) und daher die Tangentialabbildung $T_0(\gamma): T(B)_0 \to T(B_0)$ gleich der identischen Abbildung.

Also ist $\mathcal{O}_{B,o}/\mathfrak{m}^2 \xrightarrow{\gamma^*} \mathcal{O}_{B,o}/\mathfrak{m}^2$ die identische Abbildung, $\gamma^*(\mathfrak{m})\mathcal{O}_{B,o} + \mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$, also $\gamma^*(\mathfrak{m})\mathcal{O}_{B,o} = \mathfrak{m}$. Daher ist γ^* ein quasiendlicher und damit endlicher Morphismus analytischer Algebren (vgl. z. B. KURKE, PFISTER und ROCZEN [20]), also γ^* surjektiv (nach dem Lemma von NAKAYAMA). Ein surjektiver Ringendomorphismus Noetherscher Ringe ist aber stets bijektiv. Somit ist γ ein Automorphismus, und wir wählen $\pi = \alpha$, $\sigma = \beta \circ \gamma^{-1}$, so daß also σ und π die geforderten Eigenschaften haben.

Um die letzte Behauptung zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß $(B', o') \to (B, o)$ glatt ist, d. h., ist (I, o'') ein infinitesimaler Raumkeim, $(I_0, o'') \subset (I, o'')$ abgeschlossener Unterraum, so läßt sich jeder Morphismus ϱ in dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
(I_0, o'') \arrow[r, "\varrho_0'"] \arrow[d, hook] & (B', o') \arrow[d, "\pi"] \\
(I, o'') \arrow[r, "\varrho"] \arrow[ur, dashed, "\varrho'"] & (B, o)
\end{tikzcd}$$

so liften, daß $\varrho' \mid I_0 = \varrho_0'$ ist. Das folgt aus der Definition der Versalität (die Deformation ϱ^*M wird auf I_0 durch ϱ_0' induziert).

Es gibt kompakte, komplexe Mannigfaltigkeiten M, die keinen Modulraum besitzen (z. B. Regelflächen; vgl. Teil I, 4.2.6.).

Das zweite Problem wurde von M. SCHLESSINGER und J. WAVRIK behandelt. Es zeigt, daß die Existenz eines Modulraumes zur Lösbarkeit eines gewissen Erweiterungsproblems für vertikale Vektorfelder auf der Kuranishi-Familie äquivalent ist. Seine Darstellung soll hier etwas näher erläutert werden.

Es sei (S, o) ein analytischer Raum, $\mathfrak{M}_S$ die Garbe der holomorphen Funktionen auf S, die in o verschwinden, und $S^{(n)}$ die n-te infinitesimale Umgebung von o in S (d. h. der durch die Idealgarbe $\mathfrak{M}_S^{(n+1)}$ definierte Unterraum $S^{(n)} \subset S$). Ist $M \xrightarrow{\pi} S$ eine Familie von Deformationen von M (d. h. $M_0 = M$), so bezeichne $M^{(n)}$ die Einschränkung von $M \to S$ auf $S^{(n)}$. Der Zusammenhang mit dem Problem der Existenz eines lokalen Modulraumes wird durch folgendes Theorem gegeben:

1.5.2. Theorem. *Es sei M ein kompakter komplexer Raum und $(\mathcal{M} \to B, i: M \to \mathcal{M})$ eine semiuniverselle Deformation von M. Dann ist diese Deformation dann und nur dann universell, wenn für $n = 1, 2, \ldots$ folgendes gilt:*
Jeder Automorphismus von $(\mathcal{M}^{(n)}, i)$ wird durch einen Automorphismus von $(\mathcal{M}^{(n+1)}, i)$ induziert.

Bemerkung. Wenn der Kofunktor auf der Kategorie der komplexen Raumkeine über (B, o)

$$S \mapsto \mathrm{Aut}_S(\mathcal{M} \times_B S, i_S) = \{f: \mathcal{M} \times_B S \xrightarrow{\sim} \mathcal{M} \times_B S;\, f \circ i_S = i_S\}$$

(wobei i_S die durch i induzierte Abbildung $M \to \mathcal{M} \times_B S$ über dem Basispunkt von S ist) darstellbar ist durch einen komplexen Raumkeim $(A, e) \to (B, o)$, so bedeutet das Kriterium, daß (A, e) glatt über (B, o) ist.

Auf alle Fälle ist der obige Kofunktor F_A prodarstellbar durch eine formale Gruppe über $\hat{\mathcal{O}}_{B,o}$ mit einer zugrunde liegenden Algebra der Form

$$P = \hat{\mathcal{O}}_{B,o}[[t_1, \ldots, t_a]]/(f_1, \ldots, f_b)$$

mit $a = \dim H^0(M, \Theta_M)$, f_i Potenzreihen der Ordnung $g \geqq 2$, und das Kriterium von 1.5.2. ist äquivalent zu $f_1 = \cdots = f_b = 0$.

Beweis von 1.5.2.

Schritt 1 (Prodarstellbarkeit von F): Wir betrachten also die Kategorie der lokalen $\mathcal{O}_{B,o}$-Algebren, endlich über C, und schreiben $F(R)$ anstelle von $F(\mathrm{Spec}(R))$ (mit $\mathrm{Spec}(R)$ wird der entsprechende nulldimensionale Raumkeim bezeichnet). Wir schreiben $\mathcal{M}_R$ anstelle von $\mathcal{M} \times_B \mathrm{Spec}(R)$; sind $\mathcal{O}_{B,o}$-Morphismen $R' \xrightarrow{\alpha} R \xleftarrow{\beta} R''$ gegeben, $R^* = R' \times_R R''$, und Automorphismen $\mathcal{M}_{R'} \underset{\varphi'}{\xrightarrow{\sim}} \mathcal{M}_{R'}$, $\mathcal{M}_{R''} \underset{\varphi''}{\xrightarrow{\sim}} \mathcal{M}_{R''}$, die auf $\mathcal{M}_R$ denselben Automorphismus induzieren, so induzieren φ', φ'' einen Automorphismus $(\varphi', \varphi''): \mathcal{M}_{R^*} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{R^*}$ (die zugrunde liegenden Räume sind alle gleich, die zugrunde liegenden Abbildungen sind die identischen Abbildungen, ferner ist

$$\mathcal{O}_{\mathcal{M}_{R^*}} \simeq (\mathcal{O}_{\mathcal{M}}/\mathcal{M}_0) \otimes_{\mathcal{O}_{B,o}} R^*$$

und das Tensorprodukt auf Grund der Flachheit mit dem Faserprodukt vertauschbar). Offensichtlich gilt

$$\begin{aligned} F(C[T]/(t^2)) &\simeq \mathrm{Kern}(\mathrm{Aut}(M \times \mathrm{Spec}(C[t]/(t^2)) \to \mathrm{Aut}(M))) \\ &\simeq \mathrm{Der}_C(\mathcal{O}_M, \mathcal{O}_M) = H^0(M, \Theta_M). \end{aligned}$$

Deshalb ist F prodarstellbar über einem geeigneten Quotienten P von $\hat{\mathcal{O}}_{B,o}[[t_1, \ldots, t_a]]$ mit $a = \dim H^0(M, \Theta_M)$ und

$$P/\mathfrak{m}_{B,o}P + (t_1, \ldots, t_a)^2 P \simeq C[[t_1, \ldots, t_a]]/(t_1, \ldots, t_a)^2$$

(vgl. [17]). Das Kriterium von Theorem 1.5.2. besagt nun: Jeder $\mathcal{O}_{B,o}$-Homomorphismus $P \xrightarrow{\varphi_n} \mathcal{O}_{B,o}/\mathfrak{m}^{n+1} = \mathcal{O}_{B^{(n)},o}$ läßt sich zu einem Homomorphismus $P \xrightarrow{\varphi_{n+1}} \mathcal{O}_{B^{(n+1)},o}$ liften, was offensichtlich nur möglich ist, wenn $P = \hat{\mathcal{O}}_{\hat{B},o}[[t_1, \ldots, t_a]]$ ist.

Schritt 2 (($\mathcal{M}, i$) universell $\Rightarrow$ jeder Automorphismus läßt sich liften): Es sei $\varphi\colon (\mathcal{M}^{(n)}, i) \simeq (\mathcal{M}^{(n)}, i)$ ein Automorphismus und $j\colon \mathcal{M}^{(n)} \to \mathcal{M}^{(n+1)}$ die kanonische Einbettung. Ferner sei

$$S = B^{(n+1)} \amalg_{B^{(n)}} B^{(n+1)} (= \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{B^{(n+1)},o} \times_{\mathcal{O}_{B^{(n)},o}} \mathcal{O}_{B^{(n+1)},o})),$$

und die Diagramme

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{M}' & \\ \mathcal{M}^{(n+1)} \arrow[ur] & & \mathcal{M}^{(n+1)} \arrow[ul] \\ & \mathcal{M}^{(n)} \arrow[ul, "j"] \arrow[ur, "j'"'] & \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} & \mathcal{M}'' & \\ \mathcal{M}^{(n+1)} \arrow[ur] & & \mathcal{M}^{(n+1)} \arrow[ul] \\ & \mathcal{M}^{(n)} \arrow[ul, "j\circ\varphi"] \arrow[ur, "j"'] & \end{tikzcd}$$

seien kouniversell. Dann definieren $\mathcal{M}', \mathcal{M}''$ Deformationen von M über S, die auf jedem der beiden Summanden von S die Deformationen $(\mathcal{M}^{(n+1)}, i)$ induzieren, so daß also die beiden zugehörigen Abbildungen $f'\colon S \to B$, $f''\colon S \to B$, durch die $\mathcal{M}'$ bzw. $\mathcal{M}''$ induziert werden, auf beiden Summanden die kanonische Einbettung $B^{(n+1)} \to B$ induzieren. Also ist $f' = f''$, und somit gibt es einen Automorphismus von Deformationen $\psi\colon \mathcal{M}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}''$. Über jedem der beiden Summanden von S induziert ψ ebenfalls Automorphismen von Deformationen

$$\psi_1\colon \mathcal{M}^{(n+1)} \to \mathcal{M}^{(n+1)},$$
$$\psi_2\colon \mathcal{M}^{(n+1)} \to \mathcal{M}^{(n+1)}$$

mit $\psi_1 \circ j \circ \varphi = j \circ \varphi$, $\psi_2 \circ j = j \circ \varphi$, also wird φ durch den Automorphismus $\psi_1^{-1} \circ \psi_2$ von $\mathcal{M}^{(n+1)}$ induziert.

Schritt 3 (Jeder Automorphismus läßt sich liften $\Rightarrow$ ($\mathcal{M}, i$) ist universell): Wenn eine Deformation von M durch zwei verschiedene Morphismen induziert wird, sind diese Morphismen schon auf einer infinitesimalen Umgebung des Basispunktes verschieden voneinander. Es genügt daher zu zeigen: Ist $(Y, \eta\colon M \to Y)$ eine Deformation von M über dem nulldimensionalen Raumkeim $S = \mathrm{Spec}(R/I)$ (mit $\mathfrak{m}_R I = 0$), induziert durch $f\colon S \to B$, so wird jede Deformation von M über $T = \mathrm{Spec}(R)$, die auf $S \subset T$ zu (Y, η) isomorph ist, durch genau eine Fortsetzung $T \to B$ von f induziert. Die Menge aller Fortsetzungen $g\colon T \to B$ von f entspricht umkehrbar eindeutig der Menge aller Isomorphieklassen von Paaren (X, u), X ein komplexer Raum über T und u eine abgeschlossene Einbettung $Y \to X$ über T, so daß $(X, u \circ \eta)$ eine Deformation von M über T ist. (Man ordnet jeder Fortsetzung g die induzierte Deformation $X = \mathcal{M} \times_B T$ und die durch $S \hookrightarrow T$ induzierte Einbettung $Y \simeq \mathcal{M} \times_B S \subset \mathcal{M} \times_B T$ zu.) Sind g, g' Fortsetzungen, so daß es einen Isomorphismus der entsprechenden Deformationen $(X, u \circ \eta) \xrightarrow{\sigma} (X', u' \circ \eta)$ gibt, so induziert σ einen Automorphismus $\bar{\tau}\colon (Y, \eta) \simeq (Y, \eta)$, der sich, da $\mathrm{Aut}_B(\mathcal{M})$ durch eine formale Potenzreihenalgebra über $\mathcal{O}_{\hat{B},o}$ prodarstellbar ist und S, T nulldimensional sind, zu einem Automorphismus $\tau\colon (X, u \circ \eta) \simeq (X, u \circ \eta)$ liften läßt. Daher induziert

$\sigma \circ \tau^{-1}$ auf Y die identische Abbildung

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow[\tau^{-1}]{\sim} & X & \xrightarrow[\sigma]{\sim} & X' \\ {\scriptstyle u}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle u} & & \uparrow{\scriptstyle u'} \\ Y & \xrightarrow[\tau^{-1}]{\sim} & Y & \xrightarrow[\tau]{\sim} & Y \end{array}$$

und $(X, u) \simeq (X', u')$, also ist $g' = g$, q. e. d.

1.5.3. Interpretation mittels Vektorfeldern. Es sei $X \xrightarrow{\pi} (S, o)$ eine Deformation von M, $\Theta^{(n)}$ die Garbe der Vektorfelder längs der Fasern von $X^{(n)} \to S^{(n)}$,

$$\Theta^{(n)} = \Theta_{X^{(n)}/S^{(n)}} \simeq \Theta_{X/S} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S^{(n)}}$$

und $\mathcal{V}^{(n)} \subset \Theta^{(n)}$ die Untergarbe der auf $X^{(0)} \times M$ verschwindenden Vektorfelder:

$$\mathcal{V}^{(n)} = \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{n+1} \otimes \Theta^{(n)}$$

($\mathfrak{m}$ Ideal in $\mathcal{O}_S$, das zum Basispunkt o gehört). Bezeichnen wir mit $\mathcal{G}^{(n)}$ die Garbe der Keime von Automorphismen (von Deformationen) von $X^{(n)}$ über $S^{(n)}$, so gibt es einen kanonischen Garbenmorphismus

$$\alpha_n : \mathcal{V}^{(n)} \to \mathcal{G}^{(n)},$$

der Automorphismus $\alpha_n(\vartheta)$ ist wie folgt definiert: Auf dem zugrunde liegenden Raum ist $\alpha_n(\vartheta)$ die Identität, und für Funktionen f auf $X^{(n)}$ ist

$$\alpha_n(\vartheta)^* (f) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \vartheta^k(f)$$

($\vartheta \in \mathcal{V}_x^{(n)} = \mathrm{Der}_{\mathcal{O}_{S^{(n)},o}}(\mathcal{O}_{X^{(n)},x}, \mathfrak{m}\mathcal{O}_{X^{(n)},x})$, daher ist $\vartheta^k(f) = 0$ für $k > n$).

(Bemerkung. Ist u eine komplexe Variable, so ist $u \mapsto \alpha(u\vartheta)(x)$ die zu dem Vektorfeld ϑ gehörige Integralkurve durch x.)
Nach J. Wavrik [23]) ist α_n ein Isomorphismus von Garben. Nach 1.5.2. besitzt M genau dann eine universelle Deformation, wenn für jede Deformation von M (bzw. für eine semiuniverselle Deformation von M) der kanonische Morphismus $H^0(M_0, \mathcal{G}^{(n)}) \to H^0(M_0, \mathcal{G}^{(n-1)})$ surjektiv ist; da die α_n Isomorphismen sind, ist die Surjektivität der Einschränkungsmorphismen

$$H^0(M, \mathcal{V}^{(n)}) \to H^0(M, \mathcal{V}^{(n-1)}), \qquad n \geqq 1,$$

dazu äquivalent. Ein weiteres Kriterium für die Existenz eines Modulraumes ist die Lösbarkeit eines anderen Erweiterungsproblems.

1.5.4. Theorem (J. Wavrik, [23]). *M besitzt genau dann einen lokalen Modulraum, wenn für eine semiuniverselle Familie $\mathcal{M} \xrightarrow{\pi} B$ der kanonische Homomorphismus*

$$H^0(M, \Theta^{(n)}) \to H^0(M, \Theta)$$

surjektiv ist für alle n.

Beweisidee. Durch vollständige Induktion nach n zeigt man, daß für eine Deformation von M, für die die kanonischen Homomorphismen $H^0(M, \Theta^{(n)}) \to H^0(M, \Theta)$ surjektiv sind, die Einschränkungen $H^0(M, \Theta^{(n)}) \to H^0(M, \Theta^{(n-1)})$ surjektiv sind. Damit sind auch die kanonischen Morphismen $H^0(M, \mathcal{V}^{(n)}) \to H^0(M, \mathcal{V}^{(n-1)})$ für eine solche Familie surjektiv, d. h., M besitzt einen Modulraum. Ist andererseits