

Werk

Titel: Homotope lineare Räume auf algebraischen Hyperflächen

Autor: Schiemann, G.

Jahr: 1976

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?301416052_0005|log11

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

Homotope lineare Räume auf algebraischen Hyperflächen

GÜNTHER SCHIEMANN

Es sei R_{n+1} ein projektiver Raum der Dimension $n+1 \geq 2$ über dem Körper der komplexen Zahlen, $W_n^r \subset R_{n+1}$ eine singularitätenfreie projektive algebraische Hyperfläche der Ordnung $r \geq 2$.

Enthält W_n^r zwei lineare Räume R_d und R'_d der Dimension d , $0 \leq d < \frac{n}{2}$, so sind R_d und R'_d in W_n^r homotop.

Beweis. 1. Wir betrachten zunächst eine spezielle Hyperfläche U_n^r mit der Gleichung

$$0 = x_0^r + \cdots + x_{n+1}^r. \quad (1)$$

Auf U liegen u. a. die linearen Räume $R_d^{(j)}$, $j \in \{0, \dots, d+1\}$, mit

$$R_d^{(j)}: \begin{cases} 0 = x_{2\nu} - \varrho x_{2\nu+1} & \text{für } 0 \leq \nu \leq d-j, \\ 0 = \sigma x_{2\nu} - \varrho x_{2\nu+1} & \text{für } d-j+1 \leq \nu \leq d, \\ 0 = x_\nu & \text{für } 2d+2 \leq \nu \leq n+1. \end{cases} \quad (2)$$

Hierin sind $\varrho = e^{i\pi/4}$ und $\sigma = e^{2i\pi/4}$.

Man sieht, daß $\dim (R_d^{(j)} \cap R_d^{(k)}) = d - |j - k|$ ist.

2. $R_d^{(j)}$ und $R_d^{(j+1)}$ sind in U homotop.

Um dies zu zeigen, benutzen wir eine der durch

$$f(\varphi, y) = -1 + (1 + y \cos \varphi)^r + y^r e^{i\pi/4} \sin^r \varphi = 0 \quad (3)$$

definierten Funktionen $y_m(\varphi)$ der reellen Variablen φ , $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, $m \in \{1, \dots, r\}$.

Die $y_m(\varphi)$ haben an der Stelle $\varphi = \pi/2$ einen (den einzigen) Verzweigungspunkt t : Es ist $y_m(\pi/2) = 0$ für alle m .

In $[0, \pi/2)$ ist $f_y(\varphi, y_m(\varphi)) \neq 0$. Daher sind in $[0, \pi/2)$ die $y_m(\varphi)$ paarweise verschieden und stetig differenzierbar.

Wegen $\lim_{\varphi \rightarrow \pi/2} y_m(\varphi) = 0$ für alle m ist jedes $y_m(\varphi)$ in $[0, \pi/2]$ stetig. Es sei o. B. d. A.

$y_1(\varphi)$ diejenige Funktion, für die $y_1(0) = \sigma - 1$ ist.

Es sei nunmehr S_d ein d -dimensionaler projektiver Raum über dem komplexen Zahlkörper und $S_0 = (s_0, \dots, s_d)$ sein allgemeiner Punkt. Wir konstruieren eine

Homotopie

$$h: S_d \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow U$$

wie folgt:

$$h_\varphi(S_0) = h(S_0, \varphi) = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{2(d-j)} \\ x_{2(d-j)+1} \\ x_{2(d-j+1)} \\ x_{2(d-j)+3} \\ \vdots \\ x_{2d} \\ x_{2d+1} \\ x_{2(d+1)} \\ x_{2d+3} \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{bmatrix}_{S_0, \varphi} = \begin{bmatrix} \varrho s_0 \\ s_0 \\ \vdots \\ \varrho s_{d-j} \\ (1 + y_1(\varphi) \cos \varphi) s_{d-j} \\ \varrho s_{d-j+1} \\ \sigma s_{d-j+1} \\ \vdots \\ \varrho s_d \\ \sigma s_d \\ y_1(\varphi) e^{i\pi/4r} \sin \varphi s_{d-j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Wir stellen fest:

- h ist stetig in φ und (sogar linear) in den $s_0, \dots, s_d$.
- h ist eine Abbildung in U , denn (1) wird durch die Koordinaten von $h(S_0, \varphi)$ erfüllt. Man beachte (3).
- Es sind $h_0(S_d) = R_d^{(j+1)}$ und $h_{\pi/2}(S_d) = R_d^{(j)}$.

Damit ist die behauptete Homotopie von $R_d^{(j)}$ und $R_d^{(j+1)}$ gezeigt.

3. Wegen der Transitivität der Homotopie-Relation sind alle $R_d^{(j)}$ homotop in U .

4. Wir setzen (1) nicht mehr voraus. Es sei W_n^r eine singularitätenfreie, aber sonst beliebige projektive algebraische Hyperfläche der Ordnung r in R_{n+1} , die zwei lineare Räume R_d und R'_d enthält, $0 \leq d < n/2$. Weiter sei $\dim(R_d \cap R'_d) = d - j$, $1 \leq j \leq d + 1$.

Wir bilden W durch eine reguläre projektive Transformation p auf eine Hyperfläche $V := p(W)$ ab, und zwar so, daß

$$p(R_d) = R_d^{(0)} \quad \text{und} \quad p(R'_d) = R_d^{(j)}$$

ist. Nun bilden wir V homöomorph so auf U ab, daß dabei $R_d^{(0)}$ und $R_d^{(j)}$ fest bleiben.

Eine solche Abbildung gibt es. Man denke sich für den Augenblick das Koordinatensimplex so gewählt, daß $R_d^{(0)}$ und $R_d^{(j)}$ zu seinen Seiten gehören. Dann verschwinden in den Gleichungen von U und V gewisse Koeffizienten. Im projektiven Raum A der Koeffizienten der homogenen Polynome r -ten Grades in $x_0, \dots, x_{n+1}$ wird dadurch ein gewisser linearer Unterraum A' ausgezeichnet, in dem U und V durch Punkte u und v repräsentiert werden. Eine topologische Abbildung von V auf U bei festgehaltenen $R_d^{(0)}$ und $R_d^{(j)}$ erhält man durch einen (nicht jeden) stetigen Weg in A' von v nach u ; vgl. [1].

In U sind $R_d^{(0)}$ und $R_d^{(j)}$ homotop, siehe Abschnitt 3. Also sind auch homotop $R_d^{(0)}$ und $R_d^{(j)}$ in V und R_d und R'_d in W . Das war zu zeigen.

LITERATUR

- [1] SCHIEMANN, G.: Zur Homöomorphie algebraischer Hyperflächen. Beiträge zur Algebra und Geometrie 4 (1975), 65–70.

Manuskripteingang: 30. 10. 1974

VERFASSER:

GÜNTHER SCHIEMANN, Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle—Wittenberg

