Beiträge zur Algebra und Geometrie
5 (1976), 41–56

Über die Struktur orthogonal-entarteter elliptischer Orthoscheme

JOHANNES BÖHM

1. Einleitung

Ein r-dimensionales Orthoschem $S^{(n)}$ in einem r-dimensionalen elliptischen Raum ($r = n - 1 \geqq 0$) spielt als spezielles Simplex eine ausgezeichnete Rolle, da $S^{(n)}$ nicht nur schlechthin in einem elliptischen Raum, sondern auch in einem euklidischen und hyperbolischen Raum als Auffangorthoschem auftreten kann. Bei der Untersuchung beliebiger Orthoscheme in solchen Räumen konstanter Krümmung ist nämlich die Betrachtung deren Auffangorthoscheme, die stets auf der elliptischen Oberfläche von Auffangkugeln liegen, von Wichtigkeit. Wegen der Pol-Polare-Beziehung im elliptischen Raum hat das Auftreten einer Orthoschemkante der Länge $\pi/2$ hier weitere Kanten und Winkel des Orthoschems der Größe $\pi/2$ zur Folge. Vor allem solche „orthogonal-entarteten" elliptischen Orthoscheme sollen nun Gegenstand der Untersuchung hinsichtlich ihrer kombinatorisch-topologischen Eigenschaften sein. Insbesondere sollen spezielle Entartungstypen wie k-fach orthogonal-entartete und k-fach orthopyramidal-entartete elliptische Orthoscheme betrachtet und für deren Vorkommen notwendige und hinreichende Bedingungen angegeben werden (vgl. z. B. die Sätze 1 und 2). Um schließlich Anzahlfragen wie die Anzahl der Kanten der Länge $\pi/2$ (vgl. Satz 4), die Anzahl der Hauptecken (vgl. Satz 5) und die Anzahl der möglichen total-orthogonalen Kantenzüge (vgl. Satz 6) zu klären, werden zunächst Aussagen über die kombinatorisch-topologische Struktur eines elliptischen (orthogonal-entarteten) Orthoschems gemacht (vgl. Satz 3), denen zufolge ein solches Orthoschem in gewisse „Inseln" nicht-orthogonal-entarteter Orthoscheme und höchstens einem total orthogonal-entarteten Restorthoschem in eindeutiger Weise zerfällt. Dies kann als eine geometrische Interpretation der Resultate von L. SCHLÄFLI bei der Untersuchung des Inhalts spezieller Simplexe aufgefaßt werden (vgl. [4], S. 240). Die erhaltenen Ergebnisse sind sowohl innergeometrisch für die kombinatorisch-topologische Struktur eines allgemeinen Orthoschems von Interesse als auch von gewisser Bedeutung bei der Frage nach notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß ein Simplex mit mindestens einer Kante der Länge $\pi/2$ ein Orthoschem ist.

2. Zusammenstellung grundlegender Ergebnisse

Zunächst sollen einige grundlegende Tatsachen für Simplexe und Orthoscheme in Riemannschen Räumen konstanter Krümmung zusammengestellt werden. Die Beweise sind in [2] zu finden.
Vorgelegt sei ein Simplex $R^{(n)}$ ($n \geqq 1$) in einem ($n - 1$)-dimensionalen Raum konstanter Krümmung. Diese sei normiert auf $\varkappa = \pm 1$ oder 0. Die Eckpunkte von $R^{(n)}$ werden mit $1, 2, \ldots, n - 1$ und n, das Simplex selbst dann mit $R^{(n)} = 1, 2, \ldots, n$ bezeichnet.

Definition 1. Ein ($n - 1$)-dimensionales Simplex nennt man speziell ein *Orthoschem* $S^{(n)}$, wenn sich seine Eckpunkte derart von 1 bis n durchnumerieren lassen, daß für $k = 2, 3, \ldots, n - 1$

$$1, 2, \ldots, k \perp k, k + 1$$

gilt.

Definition 2. Steht in dem (orientierten) Kantenzug $K^{(n)} = (1, 2, \ldots, n)$ mit den geordneten Kanten $1, 2; 2, 3; \ldots; n - 1, n$ jede Kante desselben auf sämtlichen ihr in $K^{(n)}$ vorausgehenden Kanten senkrecht, dann heißt $K^{(n)}$ *total-orthogonal.*

Daraus läßt sich herleiten, daß ein Simplex genau dann ein Orthoschem $S^{(n)}$ ist, wenn es einen total-orthogonalen Kantenzug $K^{(n)}$ enthält.
Wird dieser total-orthogonale Kantenzug in entgegengesetzter Orientierung durchlaufen, so ergibt sich ebenfalls ein total-orthogonaler Kantenzug. Die Eckpunkte 1 und n, die Anfangs- bzw. Endpunkt des total-orthogonalen Kantenzugs sind, werden *Hauptecken* des Orthoschems genannt. Da ein total-orthogonaler Kantenzug ein Orthoschem eindeutig bestimmt, darf er auch zur Bezeichnung des Orthoschems herangezogen werden; es läßt sich also identifizieren

$$S^{(n)} = 1, 2, \ldots, n = K^{(n)} = (1, 2, \ldots, n).$$

Wegen der geforderten Orthogonalitäten sind in einem Orthoschem die Dreieckswinkel $\sphericalangle (h, k, l)$ mit $1 \leqq h < k < l \leqq n$ rechte Winkel. Im Elliptischen kann darüber hinaus der folgende Spezialfall auftreten:

Definition 3. Kommen in einem Orthoschem $S^{(n)} = (1, 2, \ldots, n)$ außer den rechten Dreieckswinkeln $\sphericalangle (h, k, l)$ $(1 \leqq h < k < l \leqq n)$ noch weitere rechte Dreieckswinkel vor, dann nennt man das Orthoschem *orthogonal-entartet.*

Infolge der Pol-Polare-Beziehung läßt sich im elliptischen Fall daraus herleiten:

Folgerung 1. *Ein elliptisches Orthoschem ist genau dann orthogonal-entartet, wenn es Kanten der Länge $\pi/2$ besitzt.*

Bei einem nicht-orthogonal-entarteten Orthoschem gibt es genau zwei Hauptecken und, abgesehen von der Orientierung, genau einen total-orthogonalen Kantenzug.

Definition 4. Gibt es für eine Hauptecke von $S^{(n)}$ keine rechten Dreieckswinkel des Orthoschems, die diese Hauptecke als Scheitel besitzen, dann wird diese Hauptecke *normal* genannt.

Die genau zwei Hauptecken eines nicht-orthogonal-entarteten Orthoschems sind normal (vgl. [2], S. 55).
Das Orthoschem $S^{(n)} = (1, 2, \ldots, n)$ wird von n Wänden $S_j^{(n-1)}$ begrenzt, die jeweils der Ecke j gegenüberliegen. Jeweils zwei solche Wände schließen einen *Keilwinkel*

$(n-2)$-ter Ordnung ein. Dieser ist ein rechter, wenn es sich um die Wände $S_{h'}^{(n-1)}$ und $S_{k'}^{(n-1)}$ mit $2 \leqq h+1 < k \leqq n$ handelt. Die übrigen Keilwinkel $v_h^{(2)}$ $(n-2)$-ter Ordnung zwischen den Wänden $S_{h'}^{(n-1)}$ und $S_{(h+1)'}^{(n-1)}$ $(h = 1, 2, \ldots, n-1)$ werden die *wesentlichen* Keilwinkel des Orthoschems genannt und brauchen keine rechten Winkel zu sein. Sie werden meistens als die Keilwinkel des Orthoschems bezeichnet.
Entsprechend der Anordnung der Eckpunkte eines Orthoschems $S^{(n)}$ durch den orientierten total-orthogonalen Kantenzug $K^{(n)} = (1, 2, \ldots, n)$ sollen auch die wesentlichen Keilwinkel gemäß der Reihenfolge der Wände $S_{1'}^{(n-1)}, S_{2'}^{(n-1)}, \ldots, S_{n'}^{(n-1)}$ und der in dieser Anordnung zwischen je zwei benachbarten Wänden sich ergebenden Keilwinkel geordnet werden, also $(v_1^{(2)}, v_2^{(2)}, \ldots, v_{n-1}^{(2)})$.
Man kann die Keilwinkel jeweils immer von einer Größe voraussetzen, die $\pi/2$ nicht übersteigt. Andernfalls läßt sich ein zugehöriges Nebenorthoschem finden, bei dem von den ursprünglichen Keilwinkeln genau diejenigen durch solche von supplementärer Größe (bezüglich π) ersetzt wurden, die größer als $\pi/2$ sind.
Es ist notwendig und hinreichend dafür, daß ein Simplex ein Orthoschem ist, daß die nichtwesentlichen Keilwinkel $(n-2)$-ter Ordnung rechte Winkel sind.
Ein beliebiges Untersimplex eines Orthoschems ist wiederum ein Orthoschem. Wird um eine Ecke k eines Orthoschems eine Kugel in dem betreffenden Raum mit geeignetem Radius geschlagen, dann ergibt sich als Durchschnitt zwischen der Kugeloberfläche und dem über die Wand $S_{k'}^{(n-1)}$ hinaus verlängerten Simplexkörper ein Auffangsimplex. Auch für jedes Auffangsimplex eines Orthoschems gilt, daß dieses ein Orthoschem ist. Infolge der Wahl einer geeigneten Größe des Radius der Auffangkugel läßt es sich immer erreichen, daß deren Oberfläche einen sphärisch-elliptischen Raum mit der konstanten Krümmung $\varkappa = +1$ darstellt.
Wird zu $S^{(n)} = (1, 2, \ldots, n)$ mit den Keilwinkeln $(v_1^{(2)}, v_2^{(2)}, \ldots, v_{n-1}^{(2)})$ das Auffangorthoschem bezüglich der Ecke k $(1 \leqq k \leqq n)$ konstruiert, so ergibt sich ein Orthoschem $S_{\bar{k}}^{(n-1)}$ mit den Keilwinkeln $(w_1, w_2, \ldots, w_{n-2})$, für die

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= v_1^{(2)}, w_2 = v_2^{(2)}, \ldots, w_{k-2} = v_{k-2}^{(2)},\\ w_{k-1} &= \pi/2,\\ w_k &= v_{k+1}^{(2)}, w_{k+1} = v_{k+2}^{(2)}, \ldots, w_{n-2} = v_{n-1}^{(2)} \end{aligned}\right\} \tag{$*$}$$

gilt, wobei die Keilwinkel $v_i^{(2)}$ zwischen den Wänden von $S^{(n)}$ in $(*)$ auf die Auffangkugeloberfläche eingeschränkt zu verstehen sind. Dabei bleibt natürlich ihre Größe auf alle Fälle erhalten.
Insbesondere besitzt $S_{\bar{1}}^{(n-1)}$ die Keilwinkel $(v_2^{(2)}, v_3^{(2)}, \ldots, v_{n-1}^{(2)})$. Das entsprechende Auffangsorthoschem $S_{\bar{n}}^{(n-1)}$ besitzt die Keilwinkel $(v_1^{(2)}, v_2^{(2)}, \ldots, v_{n-2}^{(2)})$ (vgl. [2], S. 58).
Die Keilwinkel $v_j^{(2)}$ $(1 < j < n-1)$ des Orthoschems $S^{(n)}$ stimmen jeweils mit den mittleren Keilwinkeln der Unterorthoscheme $(j-1, j, j+1, j+2)$ hinsichtlich ihrer Größe also mit den Keilwinkeln zwischen den Wänden $(j-1, j+1, j+2)$ und $(j-1, j, j+2)$ überein. Die Keilwinkel $v_1^{(2)}$ bzw. $v_{n-1}^{(2)}$ stimmen hinsichtlich ihrer Größe, jeweils mit den Dreieckswinkeln $\sphericalangle\,(1, 3, 2)$ bzw. $\sphericalangle\,(n-1, n-2, n)$ überein. Dieses läßt sich durch Betrachten von geeigneten Auffangorthoschemen beweisen. Darum darf auch gesagt werden, daß der Keilwinkel $v_j^{(2)}$ und der entsprechende Keilwinkel in einem geeigneten Unter- bzw. Auffangorthoschem — eingeschränkt auf die betreffende Auffangkugel bzw. auf das entsprechende Unterorthoschem — zusammenfallen.
Schließlich ergibt sich

Folgerung 2. ***Ein elliptisches Orthoschem ist genau dann orthogonal-entartet, wenn mindestens ein Keilwinkel ein rechter ist.***

Es folgen hieraus und aus (*) drei wichtige einfache Aussagen über Auffangorthoscheme eines Orthoschems hinsichtlich ihrer orthogonalen Entartung (vgl. [2], S. 58):

(1) *Ein Auffangorthoschem bezüglich einer Ecke eines Orthoschems, die keine Hauptecke ist, ist orthogonal-entartet.*

(2) *Ein Auffangorthoschem bezüglich einer Hauptecke eines nicht orthogonal-entarteten Orthoschems ist nicht-orthogonal-entartet.*

(3) *Ein orthogonal-entartetes Orthoschem besitzt höchstens eine Ecke, für die das zugehörige Auffangorthoschem nicht-orthogonal-entartet ist.*

3. Einige Definitionen für orthogonal-entartete elliptische Orthoscheme

Definition 5. Ein elliptisches Orthoschem $S^{(n)}$ heißt *k-fach orthogonal-entartet* wenn genau k (wesentliche) Keilwinkel rechte Winkel sind. Es heißt *total orthogonal-entartet*, wenn alle (wesentlichen) Keilwinkel rechte Winkel sind.

Folgerung 3. *Bei einem total orthogonal-entarteten Orthoschem haben sämtliche Kanten die Länge $\pi/2$.*

Beweis. Für $n = 3$ liegt bei einem total orthogonal-entarteten Orthoschem ein dreifach rechtwinkliges elliptisches Dreieck vor. Nach den Ergebnissen der sphärischen Geometrie ist dieses selbstdual, seine Kanten haben die Länge $\pi/2$.
Im Sinne eines Beweises durch vollständige Induktion wird angenommen, daß alle total orthogonal-entarteten Orthoscheme $S^{(m)}$ für $m = 3, 4, \ldots, n-1$ nur Kanten der Länge $\pi/2$ besitzen. Untersucht wird jetzt das total orthogonal-entartete Orthoschem $S^{(n)}$. Seine Auffangorthoscheme $S_{\bar{1}}^{(n-1)}$ und $S_{\bar{n}}^{(n-1)}$ haben Keilwinkel, deren Größe infolge der im vorigen Abschnitt gemachten Bemerkung mit der eines jeweiligen Keilwinkels von $S^{(n)}$ übereinstimmt. Das heißt jedoch, die beiden Auffangorthoscheme sind total orthogonal-entartet. Auf Grund der Induktionsvoraussetzung haben darum alle Kanten der Auffangorthoscheme die Länge $\pi/2$. Da jedoch jede Kante eines Auffangorthoschems hinsichtlich ihrer Größe mit der eines geeigneten Dreieckswinkels des ursprünglich vorgelegten Orthoschems zusammenfällt und umgekehrt, folgt unmittelbar, daß sämtliche Dreieckswinkel von $S^{(n)}$ rechte Winkel sind und demnach alle Kanten von $S^{(n)}$ die Länge $\pi/2$ besitzen.

Definition 6. Zwei eckpunktfremde Unterorthoscheme $S^{(h)}$ und $S^{(k)}$ eines elliptischen Orthoschems $S^{(n)}$ mit $h + k \leqq n$ heißen *orthogonal-verbunden*, wenn in $S^{(n)}$ jede Ecke von $S^{(h)}$ mit jeder Ecke von $S^{(k)}$ durch eine Kante der Länge $\pi/2$ verbunden ist.

4. Orthopyramidale Orthoscheme

Definition 7. Ein elliptisches Orthoschem $S^{(n)}$ heißt *orthopyramidal entartet* (kurz: *orthopyramidal*), wenn es in $S^{(n)}$ einen Eckpunkt h gibt, der mit seiner gegenüberliegenden Wand $S_{\bar{h}}^{(n-1)}$ orthogonal verbunden ist.
Zur Erklärung wird angemerkt, daß hierbei die Ecke h als Spitze und die gegenüberliegende Wand als Basis einer Pyramide aufgefaßt werden. Da die Kanten dieser Pyramide, die von der Spitze ausgehen, sämtlich die Länge $\pi/2$ haben, entsteht eine sogenannte „Orthopyramide".

Definition 8. Ein elliptisches Orthoschem $S^{(n)}$ heißt genau *k-fach orthopyramidal*, wenn es genau k Eckpunkte gibt, die jeweils mit ihren gegenüberliegenden Wänden orthogonal-verbunden sind.

Um einfache Aussagen über ein genau einfach orthopyramidales Orthoschem formulieren zu können, ist es zweckmäßig, jedem elliptischen Orthoschem noch zwei weitere Hilfswinkel $v_0^{(2)}$ und $v_n^{(2)}$ der konstanten Größe $\pi/2$ zuzuordnen, die für die folgenden Betrachtungen nur eine gewisse formale Bedeutung haben. Eine geometrische Interpretation läßt sich jedoch erreichen, wenn das vorgelegte Orthoschem $S^{(n)} = (1, 2, \ldots, n)$ zu einem elliptischen $(n + 1)$-dimensionalen Orthoschem $S^{(n+2)}$ durch zwei weitere Eckpunkte 0 und $n + 1$ ergänzt wird, die mit allen anderen Eckpunkten und auch untereinander orthogonal verbunden sind. Das Unterorthoschem $S^{(2)} = (0, n + 1)$ ist dann total orthogonal-entartet und mit dem Orthoschem $S^{(n)} = (1, 2, \ldots, n)$ orthogonal-verbunden. Da ein total-orthogonaler Kantenzug $K^{(n+2)} = (0, 1, 2, \ldots, n - 1, n + 1)$ existiert, ist das erweiterte Simplex $0, 1, \ldots, n + 1$ wiederum ein Orthoschem. Darüber hinaus ist es mindestens zweifach orthopyramidal mit den Orthopyramidenspitzen 0 bzw. $n + 1$. Die rechten Hilfswinkel $v_0^{(2)}$, $v_n^{(2)}$ haben in dem erweiterten Orthoschem $S^{(n+2)} = (0, 1, \ldots, n, n + 1)$ die Bedeutung des ersten und letzten Keilwinkels, die gleichzeitig als Dreieckswinkel jeweils derselben Größe in den Dreiecksflächen $(0, 1, 2)$ bzw. $(n - 1, n, n + 1)$ auftreten. Die übrigen Keilwinkel in $S^{(n+2)}$ stimmen mit den Keilwinkeln von $S^{(n)}$ überein. Auf diese Weise wird der besondere Charakter des ersten und letzten Keilwinkels $v_1^{(2)}$ und $v_{n-1}^{(2)}$ von $S^{(n)}$ beseitigt und eine generelle Aussage für orthopyramidale Orthoscheme erreicht.

Im übrigen entsteht $S^{(n)}$ aus $S^{(n+2)}$ als Auffangorthoschem, wenn zunächst bezüglich der Ecke 0 von $S^{(n+2)}$ das Auffangorthoschem konstruiert wird — dieses stimmt mit $(1, 2, \ldots, n, n + 1) = S^{(n+1)}$ überein — und darauf von $S^{(n+1)}$ bezüglich der Ecke $n + 1$ das Auffangorthoschem betrachtet wird. Dieses fällt mit $S^{(n)} = (1, 2, \ldots, n)$ zusammen (vgl. auch Hilfssatz 1, s. u.).

Nunmehr gilt

Satz 1. *Das elliptische Orthoschem $S^{(n)}$ ist genau dann einfach orthopyramidal, wenn es genau ein k $(1 \leqq k \leqq n)$ gibt mit $|v_{k-1}^{(2)}| = |v_k^{(2)}| = \pi/2$. Die Ecke k stellt dann die Spitze der Orthopyramide dar.*

Satz 2. *Es sei $S^{(n)}$ ein elliptisches mindestens einfach orthopyramidales Orthoschem. Jede Wand $S_i^{(n-1)}$ von $S^{(n)}$, die die Basis einer Orthopyramide darstellt, ist genau dann orthogonal-entartet, wenn es mindestens vier von den $v_i^{(2)}$ $(i = 0, 1, \ldots, n - 1, n)$ gibt, die die Größe $\pi/2$ haben.*

Darum ergibt sich sofort

Folgerung 4. *Das elliptische Orthoschem $S^{(n)}$ ist genau dann einfach orthopyramidal mit nicht-orthogonal-entarteter Orthopyramidenbasis, wenn von den Keilwinkeln entweder nur der Keilwinkel $v_1^{(2)}$ oder nur der Keilwinkel $v_{n-1}^{(2)}$ ein rechter Winkel ist.*

In diesem Fall haben genau drei der $v_i^{(2)}$ die Größe $\pi/2$, nämlich $v_0^{(2)}$, $v_n^{(2)}$ und entweder $v_1^{(2)}$ oder $v_{n-1}^{(2)}$. Ein solches elliptisches Orthoschem soll *orthopyramidal im engeren Sinne* genannt werden.

Zum Beweis der beiden Sätze werden zunächst drei Hilfssätze bewiesen.

Hilfssatz 1. *Hat das elliptische orthopyramidale Orthoschem $S^{(n)}$ die Ecke k als eine Orthopyramidenspitze und die Wand $S_k^{(n-1)}$ als die zugehörige Orthopyramidenbasis, genau dann fällt die Wand $S_k^{(n-1)}$ mit dem Auffangorthoschem $S_k^{(n-1)}$ zusammen.*

Beweis. Die Ecke k ist mit der Wand $S_{k'}^{(n-1)}$ bei vorausgesetzter Orthopyramide $S^{(n)}$ orthogonal-verbunden. Der Durchschnitt zwischen der Oberfläche der Auffangkugel mit dem Radius $\pi/2$ um die Ecke k und dem Orthoschem $S^{(n)}$ ergibt folglich genau als Auffangorthoschem $S_{\bar{k}}^{(n-1)}$ die Wand $S_{k'}^{(n-1)}$. Fallen andererseits $S_{k'}^{(n-1)}$ und $S_{\bar{k}}^{(n-1)}$ zusammen, so muß die Ecke k mit der Wand $S_{k'}^{(n-1)}$ orthogonal-verbunden sein.

Hilfssatz 2. *Ist im Orthoschem $S^{(n)}$ der Keilwinkel $v_1^{(2)}$ ein rechter, genau dann fällt die Wand $S_{1'}^{(n-1)}$ mit dem Auffangorthoschem $S_{\bar{1}}^{(n-1)}$ zusammen.*

Beweis. Wenn der Keilwinkel $v_1^{(2)}$ ein rechter ist, so ist auch gemäß einer früheren Bemerkung der Dreieckswinkel $\sphericalangle(1,3,2)$ ein rechter. Dann gilt aber, daß alle Kanten $1, s$ ($s = 2, 3, \ldots, n$) die Länge $\pi/2$ besitzen. Denn das Dreieck $1, 2, 3$ ist doppelt-rechtwinklig. Die Kanten $1, 2$ und $1, 3$ haben darum die Länge $\pi/2$. Da darüber hinaus die Kante $1, 2$ auf der Wand $S_{1'}^{(n-1)}$ senkrecht steht, ist 1 Pol zur Wand $S_{1'}^{(n-1)}$, und folglich besitzen alle Kanten $1, s$ die Länge $\pi/2$. Die Ecke 1 ist daher mit der Wand $S_{1'}^{(n-1)}$ orthogonal-verbunden. Nach Hilfssatz 1 ergibt sich nun für $k = 1$ der erste Teil von Hilfssatz 2.

Fällt andererseits das Auffangorthoschem $S_{\bar{1}}^{(n-1)}$ mit der entsprechenden Wand $S_{1'}^{(n-1)}$ zusammen, dann ist die Ecke 1 mit der Wand $S_{1'}^{(n-1)}$ orthogonal-verbunden. Insbesonders ist das Dreieck $1, 2, 3$ doppelt-rechtwinklig, wobei speziell der Dreieckswinkel $\sphericalangle(1,3,2)$ ein rechter ist. Das hat aber zur Folge, daß auch $v_1^{(2)}$ ein rechter Winkel ist.
Für den Keilwinkel $v_{n-1}^{(2)}$ kann ein analoges Ergebnis hinsichtlich der Wand $S_{n'}^{(n-1)}$ und dem Auffangorthoschem $S_{\bar{n}}^{(n-1)}$ wegen der Möglichkeit der entgegengesetzten Orientierung des total-orthogonalen Kantenzugs angegeben werden.

Hilfssatz 3. *Ist $S^{(n)}$ orthopyramidal, wobei die Ecke k $(1 \leqq k \leqq n)$ und die Wand $S_{k'}^{(n-1)}$ Spitze bzw. Basis einer Orthopyramide sind, genau dann sind die Keilwinkel $v_{k-1}^{(2)}$ und $v_k^{(2)}$ rechte Winkel.*

Beweis. Für $k = 1$ folgt Hilfssatz 3 unmittelbar aus den Hilfssätzen 1 und 2. Denn nach Hilfssatz 1 fällt genau dann, wenn das Orthoschem orthopyramidal mit der Spitze 1 ist, die Wand $S_{1'}^{(n-1)}$ mit dem Auffangorthoschem $S_{\bar{1}}^{(n-1)}$ zusammen. Nach Hilfssatz 2 ergibt sich, daß genau dann $v_1^{(2)}$ ein rechter Winkel sein muß. $v_0^{(2)}$ ist definitionsgemäß von der Größe $\pi/2$. Analog sind die Überlegungen für $k = n$.
Ist $S^{(n)}$ orthopyramidal mit der Orthopyramidenspitze k $(1 < k < n)$, dann fällt nach Hilfssatz 1 das Auffangorthoschem $S_{\bar{k}}^{(n-1)}$ mit der Wand $S_{k'}^{(n-1)}$ zusammen. Da die Auffangkugel, auf der dieses Auffangorthoschem liegt, zu allen Wänden $S_{j'}^{(n-1)}$ $(j = 1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n)$ senkrecht steht, sind auch insbesondere die Keilwinkel zwischen den Wänden $S_{k'}^{(n-1)}$ und $S_{(k-1)'}^{(n-1)}$ sowie $S_{k'}^{(n-1)}$ und $S_{(k+1)'}^{(n-1)}$ rechte, also $|v_{k-1}^{(2)}| = |v_k^{(2)}| = \pi/2$.
Sind umgekehrt die Keilwinkel $v_{k-1}^{(2)}$ und $v_k^{(2)}$ rechte, dann stehen auf $S_{k'}^{(n-1)}$ alle Wände $S_{j'}^{(n-1)}$ $(j = 1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n)$ von $S^{(n)}$ senkrecht. Die Ecke k als Durchschnitt dieser Wände $S_{j'}^{(n-1)}$ $(j = 1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n)$ ist demnach Pol bezüglich $S_{k'}^{(n-1)}$. Alle Kanten, die k mit $S_{k'}^{(n-1)}$ verbinden, haben demzufolge die Länge $\pi/2$. Die Ecke k ist also mit $S_{k'}^{(n-1)}$ orthogonal-verbunden, und k ist folglich Spitze einer Orthopyramide mit $S_{k'}^{(n-1)}$ als ihre Basis.

Nun läßt sich sofort Satz 1 beweisen. Ein orthopyramidales Orthoschem ist orthogonal-entartet. Darum muß es rechte (wesentliche) Keilwinkel besitzen. Damit es genau eine Ecke gibt, die Orthopyramidenspitze ist, folgt aus Hilfssatz 3 der Satz 1.

Für den Beweis von Satz 2 verwendet man zunächst Hilfssatz 1, nach dem jede Wand $S_{j'}^{(n-1)}$ eines orthopyramidalen Orthoschems $S^{(n)}$, die Basis einer Orthopyramide ist, mit dem Auffangorthoschem $S_{\bar{j}}^{(n-1)}$ bezüglich der zugehörigen Orthopyramidenspitze j zusammenfällt. Jetzt sind für den Beweis zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem, ob eine Orthopyramidenspitze mit dem Anfangs- bzw. Endpunkt des totalorthogonalen Kantenzuges $(1, 2, \ldots, n)$ oder mit einem inneren Punkt desselben zusammenfällt. Gibt es in $S^{(n)}$ eine Orthopyramidenspitze j mit $1 < j < n$, genau dann haben nach Satz 1 mindestens die vier Winkel $v_0^{(2)}$, $v_{j-1}^{(2)}$, $v_j^{(2)}$ und $v_n^{(2)}$ die Größe $\pi/2$. Die Wand $S_{j'}^{(n-1)} = S_{\bar{j}}^{(n-1)}$ als Orthopyramidenbasis ist aber orthogonal-entartet, weil bei der Ecke j rechte Dreieckswinkel liegen, z. B. der Winkel $\sphericalangle\,(1, j, n)$, die Anlaß zu Kanten der Länge $\pi/2$ in $S_{\bar{j}}^{(n-1)}$ geben. Das gilt für jede Wand, die als Basis einer Orthopyramide auftritt, deren Spitze verschieden von den Eckpunkten 1 und n ist.
Ist die Ecke 1 Orthopyramidenspitze, dann gilt für die Orthopyramidenbasis $S_{1'}^{(n-1)} = S_{\bar{1}}^{(n-1}$ nach Hilfssatz 1. Wegen Hilfssatz 3 ist dann außer den Winkeln $v_0^{(2)}$ und $v_n^{(2)}$ der Keilwinkel $v_1^{(2)}$ ein rechter. Die Orthopyramidenbasis $S_{\bar{1}}^{(n-1)}$ besitzt ihrerseits die Keilwinkel $v_2^{(2)}, \ldots, v_{n-1}^{(2)}$. Sie ist genau dann orthogonal-entartet, wenn mindestens einer dieser Keilwinkel, etwa $v_h^{(2)}$ $(2 \leqq h \leqq n - 1)$, ein rechter ist. Folglich gibt es auch hier mindestens vier Winkel, nämlich $v_0^{(2)}$, v_1^{2} , $v_h^{(2)}$ und $v_n^{(2)}$, die rechte Winkel sind, genau dann, wenn die Orthopyramidenbasis $S_{\bar{1}}^{(n-1)}$ orthogonal-entartet sein soll. Entsprechende Überlegungen lassen sich für die Ecke n als Orthopyramidenspitze anstellen. Damit ist der Satz 2 bewiesen.

5. Anzahlfragen

Aus den bisherigen Ergebnissen für orthogonal-entartete Orthoscheme läßt sich ableiten der für weitere Untersuchungen nötige

Hilfssatz 4. *Ist genau der Keilwinkel $v_k^{(2)}$ des elliptischen Orthoschems $S^{(n)}$ ein rechter, dann haben genau die Kanten h, l für $1 \leqq h \leqq k < l \leqq n$ die Länge $\pi/2$.*

Daraus ergeben sich unmittelbar zwei Folgerungen.

Folgerung 5. *Das genau einfach orthogonal-entartete elliptische Orthoschem $S^{(n)}$ mit $|v_k^{(2)}| = \pi/2$ besitzt genau $k(n - k)$ Kanten der Länge $\pi/2$.*

Folgerung 6. *Das genau einfach orthogonal-entartete elliptische Orthoschem $S^{(n)}$ mit $|v_k^{(2)}| = \pi/2$ zerfällt für $1 < k < n - 1$ in zwei nicht-orthogonal-entartete Orthoscheme $S^{(k)} = (1, 2, \ldots, k)$ und $S^{(n-k)} = (k + 1, \ldots, n)$, die miteinander orthogonal-verbunden sind. Für $k = 1$ oder $k = n - 1$ liegt ein orthopyramidales Orthoschem vor. Bei diesem ist ein einziger Eckpunkt (1 bzw. n) mit seiner gegenüberliegenden Wand orthogonal-verbunden.*

Beweis des Hilfssatzes. Zunächst soll als Vorüberlegung das Auffangorthoschem $S_{\bar{j}}^{(n-1)}$ eines nicht-orthogonal-entarteten Orthoschems betrachtet werden, für das Aussagen über seine Keilwinkel sowie über seine orthogonale Entartung in Abschnitt 2 unter (*) bzw. (1) angegeben wurden. Dieses Auffangorthoschem ist für $1 < j < n$ genau einfach orthogonal-entartet. Die Lage der entsprechenden Kanten der Länge $\pi/2$ läßt sich dann unmittelbar beschreiben durch die Kenntnis der

Konfiguration der rechten Dreieckswinkel im Ausgangsorthoschem $\mathring{S}^{(n)}$ bei der Ecke j, da diese rechten Winkel zu Kanten der Länge $\pi/2$ im Auffangorthoschem Anlaß geben.

Wie in Abschnitt 2 dargetan, sind für das nicht-orthogonal-entartete Orthoschem $\mathring{S}^{(n)}$ bei der Ecke j genau die Dreieckswinkel $\sphericalangle(h, j, l)$ mit $1 \leqq h < j < l \leqq n$ rechte Winkel. Im orthogonal-entarteten Auffangorthoschem $S_j^{(n-1)} = (1, \bar{2}, \ldots, \overline{j-1}, \overline{j+1}, \ldots, \bar{n})$, dessen Eckpunkte $\bar{q}$ die Durchstoßpunkte der Kanten j, 1 von $S^{(n)}$ durch die Auffangkugel-Oberfläche für $q = 1, 2, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n$ sind, haben demzufolge genau die Kanten $\bar{h}, \bar{l}$ mit der oben angegebenen Bedingung für h und l die Länge $\pi/2$. Werden die Eckpunkte von $S_j^{(n-1)}$ derart umnumeriert, daß

$$\bar{t} \text{ ersetzt wird durch } \begin{cases} t & \text{für } 1 \leqq t < j, \\ t-1 & \text{für } j < t \leqq n, \end{cases}$$

dann haben in diesem Orthoschem $(1, 2, \ldots, n-1)$ mit den Keilwinkeln $v_1^{(2)}$, $v_2^{(2)}, \ldots, v_{n-2}^{(2)}$ $(v_p^{(2)} := w_p$ für $p = 1, 2, \ldots, n-2)$, wobei genau der Keilwinkel $v_{j-1}^{(2)}$ die Größe $\pi/2$ besitzt, genau die Kanten h, l mit $1 \leqq h < j \leqq l \leqq n-1$ die Größe $\pi/2$. Auf diese Weise bekommt man schnell aus der Kenntnis der Winkelverhältnisse an einer Ecke des Orthoschems $\mathring{S}^{(n)}$ einen Überblick über die Lage der Kanten von der Länge $\pi/2$ bei einem einfach orthogonal-entarteten $(n-2)$-dimensionalen Orthoschem, indem dieses als Auffangorthoschem $S_j^{(n-1)}$ von $\mathring{S}^{(n)}$ gedeutet wird.

Um jetzt diese Ergebnisse für den Beweis von Hilfssatz 4 nutzbar machen zu können, ist nur n durch $n+1$ und j durch $k+1$ zu ersetzen. Das Ausgangsorthoschem wird dann durch ein Orthoschem $\mathring{S}^{(n+1)}$ dargestellt. Das vorgelegte einfach orthogonal-entartete Orthoschem $S^{(n)} = (1, 2, \ldots, n)$ mit genau dem Keilwinkel $v_k^{(2)}$ $(1 \leqq k \leqq n-1)$ als rechtem Winkel ergibt sich als das von $\mathring{S}^{(n+1)}$ bezüglich der Ecke $k+1$ konstruierte Auffangorthoschem $S_{\overline{k+1}}^{(n)}$. Die obige Aussage hinsichtlich der Länge $\pi/2$ für genau die Kanten h, l ergibt dann hier die Bedingung $1 \leqq h < k+1 \leqq l \leqq n$. Das ist aber nur eine andere Schreibweise der Bedingung für h und l in Hilfssatz 4. Damit ist dieser Hilfssatz bewiesen. Folgerung 5 ergibt sich durch Abzählen der betreffenden Kanten h, l der Länge $\pi/2$, indem beachtet wird, daß h genau k verschiedene Werte und l genau $n-k$ verschiedene Werte unabhängig voneinander annehmen können. Folgerung 6 ist lediglich eine andere Interpretation des Hilfssatzes 4. Jetzt schließt sich unmittelbar an

Folgerung 7. *Für ein genau einfach orthogonal-entartetes elliptisches Orthoschem mit* $|v_k^{(2)}| = \pi/2$ *gibt es im Fall* $1 < k < n-1$ $(n \geqq 4)$ *genau acht und im Fall* $k = 1$ *oder* $k = n-1$ $(n \geqq 3)$ *genau vier verschiedene total-orthogonale Kantenzüge.*

Beweis. Gilt $1 < k < n-1$, dann werden die total-orthogonalen Kantenzüge durch

$$\begin{aligned}
&(1, 2, \ldots, k, k+1, \ldots, n),\\
&(k, k-1, \ldots, 1, k+1, \ldots, n),\\
&(1, 2, \ldots, k, n, n-1, \ldots, k+1),\\
&(k, k-1, \ldots, 1, n, \ldots, k+1)
\end{aligned}$$

und die jeweils entgegengesetzten Durchlaufungen der Ecken dargestellt. Denn auf Grund von Folgerung 6 gibt es zwei nicht-orthogonal-entartete Unterorthoscheme mit den total-orthogonalen Kantenzügen $(1, 2, \ldots, k)$ und $(k+1, \ldots, n)$, die ihrerseits miteinander orthogonal-verbunden sind. Eine jede solche Kante der Länge $\pi/2$, die einen Eckpunkt des einen mit einem Eckpunkt des anderen nicht-orthogonal-entarteten Unterorthoschems verbindet, steht auf beiden Unterorthoschemen senkrecht. Denn für beliebige Eckpunkte p und r mit $p \in S^{(k)} = (1, \ldots, k)$ und $r \in S^{(n-k)} = (k+1, \ldots, n)$ sind bei $q_1 \in S^{(k)}$ die Dreieckswinkel $\sphericalangle (r, p, q_1)$ und $\sphericalangle (r, q_1, p)$ und bei $q_2 \in S^{(n-k)}$ die Dreieckswinkel $\sphericalangle (p, r, q_2)$ und $\sphericalangle (p, q_2, r)$ rechte Winkel (vgl. Abb. 1)[1]. Folglich steht die Kante p, r auf den beiden Unterorthoschemen $S^{(k)}$ und $S^{(n-k)}$ senkrecht. Insbesondere gilt dieses für die Kanten $k, k+1$; k, n; $1, k+1$ und $1, n$. Weiterhin steht jede Kante p, q_1 auf $S^{(n-k)}$ und jede Kante r, q_2 auf $S^{(k)}$ senkrecht. Auch dieses erkennt man sofort an den rechten Dreieckswinkeln $\sphericalangle (r,p,q_1)$ für beliebiges $r \in S^{(n-k)}$ bzw. $\sphericalangle (p, r, q_2)$ für beliebiges $p \in S^{(k)}$ (vgl. Abb. 1). Der

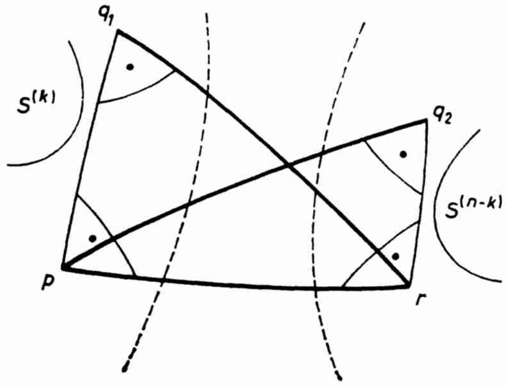

Abb. 1

generelle Grund für diese Orthogonalitäten ist im Auftreten von Pol und Polare zu sehen, was dadurch herbeigeführt wird, daß die beiden Unterorthoscheme orthogonal-verbunden sind. Im übrigen stehen die beiden Unterorthoscheme $S^{(k)}$ und $S^{(n-k)}$ folglich nach den bisherigen Ausführungen selbst aufeinander senkrecht.

Wenn schließlich noch beachtet wird, daß in $S^{(k)}$ und in $S^{(n-k)}$ genau zwei mögliche total-orthogonale Kantenzüge existieren (vgl. Abschnitt 2, S. 42), so erhält man die angegebenen total-orthogonalen Kantenzüge von $S^{(n)}$. Andere Möglichkeiten gibt es nicht. Denn wäre $(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ ein weiterer total-orthogonaler Kantenzug, dann gäbe es zwei Indizes p und q, $p < q - 1$, mit $h_p, h_q \in \{1, \ldots, k\}$ und $h_{p+1} \in \{k+1, \ldots, n\}$ oder mit $h_p, h_q \in \{k+1, \ldots, n\}$ und $h_{p+1} \in \{1, \ldots, k\}$. Die Kanten h_p, h_{p+1} und h_{p+1}, h_q haben die Länge $\pi/2$. Der Winkel $\sphericalangle (h_p, h_{p+1}, h_q)$ muß ein rechter sein, und demzufolge hat auch die Kante h_p, h_q die Länge $\pi/2$, was aber auf Grund von Folgerung 6 nicht sein kann (vgl. Abb. 2 für die erste der beiden Möglichkeiten).

Gilt $k = 1$, dann entartet das Unterorthoschem $S^{(k)}$ zu einem Punkt, und es gibt genau die total-orthogonalen Kantenzüge

$$(1, 2, \ldots, n),$$
$$(1, n, n-1, \ldots, 2)$$

und die jeweiligen entgegengesetzten Durchlaufungen. Entsprechendes ergibt sich für $k = n - 1$, wo $S^{(n-k)}$ zu einem Punkt entartet.

Demzufolge gibt es für orthogonal-entartete Orthoscheme mehr als zwei Hauptecken, die Anfangs- bzw. Endpunkt eines total-orthogonalen Kantenzuges sein können. Für

[1]) In den Abbildungen verstärkte elliptische Kanten haben die Länge $\pi/2$. Winkel, die im Winkelbogen einen Punkt tragen, sind rechte Winkel.

ein einfach orthogonal-entartetes Orthoschem lassen sie sich leicht auf Grund der Kenntnis aller möglichen total-orthogonalen Kantenzüge (vgl. Folgerung 7) abzählen. Sie sind gleichzeitig Hauptecken von nicht-orthogonal-entarteten Unterorthoschemen. Im einzelnen gilt somit

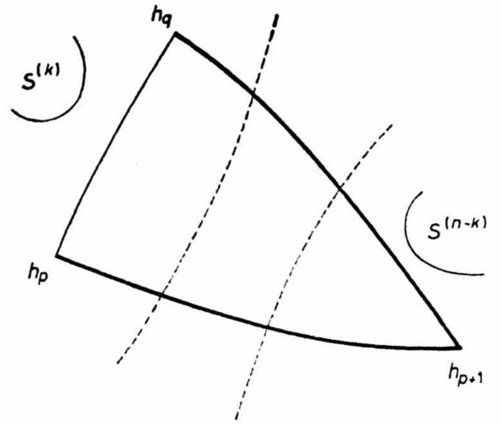

Abb. 2

Folgerung 8. *Ein genau einfach orthogonal-entartetes elliptisches Orthoschem mit* $|v_k^2| = \pi/2$ *besitzt im Fall* $1 < k < n-1$ *genau vier und im Fall* $k = 1$ *sowie im Fall* $k = n-1$ *genau drei Hauptecken.*

Um im allgemeinen orthogonal-entarteten Fall die Anzahl der verschiedenen möglichen Hauptecken und total-orthogonalen Kantenzüge abzuzählen, soll der Begriff des sogenannten „maximalen" Unterorthoschems eingeführt werden. Dieses Attribut „maximal" bezieht sich auf die Dimension eines nicht-orthogonal-entarteten Orthoschems und läßt sich auf folgende Art beschreiben:

Definition 9. Ein Unterorthoschem $S^{(k)}$ eines elliptischen Orthoschems $S^{(n)}$ $(k \leqq n)$ heißt *maximal* genau dann, wenn $S^{(k)}$ nicht orthogonal-entartet ist und im Fall $k < n$ die Hinzunahme einer jeden weiteren Ecke von $S^{(n)}$, die nicht zu $S^{(k)}$ gehört, ein orthogonal-entartetes Orthoschem $S^{(k+1)}$ erzeugt.

Daraus ergeben sich zwei Folgerungen.

Folgerung 9. *Zwei nicht identische maximale Unterorthoscheme* $S^{(m_1)}$ *und* $S^{(m_2)}$ $(2 \leqq m_1, m_2 \leqq n-2)$ *eines elliptischen Orthoschems* $S^{(n)}$ *sind disjunkt.*

Folgerung 10. *Zwei verschiedene maximale Unterorthoscheme* $S^{(m_1)}$ *und* $S^{(m_2)}$ $(2 \leqq m_1, m_2 \leqq n-2)$ *eines elliptischen Orthoschems* $S^{(n)}$ *sind orthogonal-verbunden.*

Beweis. Enthielten entgegen Folgerung 9 $S^{(m_1)}$ und $S^{(m_2)}$ einen gemeinsamen Punkt p, dann gäbe es in jedem dieser beiden Unterorthoscheme mindestens jeweils einen Punkt $q_1 \in S^{(m_1)}$ und $q_2 \in S^{(m_2)}$, der nicht in dem anderen Unterorthoschem enthalten ist, da die beiden Unterorthoscheme maximal und nicht identisch sein sollen. Dann muß aber die Länge der Kante q_1, q_2 verschieden von $\pi/2$ sein, da das rechtwinklige elliptische Dreieck q_1, p, q_2 nicht nur eine einzige Kante der Länge $\pi/2$ besitzen kann. Dann haben aus demselben Grund aber sämtliche Kanten, die einen beliebigen Eckpunkt von $S^{(m_2)}$ mit q_1 sowie sämtliche Kanten, die einen beliebigen Eckpunkt von $S^{(m_1)}$ mit q_2 verbinden, eine Länge, die verschieden von $\pi/2$ ist. Das heißt, q_1 und q_2 gehören zum Durchschnitt von $S^{(m_1)}$ und $S^{(m_2)}$. Diese Aussage läßt sich für jede

Ecke von $S^{(m_1)}$ sowie für jede Ecke von $S^{(m_2)}$ machen, so daß sich ergibt, daß $S^{(m_1)}$ mit $S^{(m_2)}$ zusammenfällt, was ausgeschlossen war.

Wäre nun entgegen Folgerung 10 $S^{(m_1)}$ mit $S^{(m_2)}$ nicht orthogonal-verbunden, dann gäbe es eine Kante p_1, p_2 mit $p_1 \in S^{(m_1)}$, $p_2 \in S^{(m_2)}$, die nicht die Länge $\pi/2$ besitzt. Dann dürften aber wiederum sämtliche Kanten, die p_1 mit einer beliebigen Ecke von $S^{(m_2)}$ verbinden, nicht die Länge $\pi/2$ besitzen, weil die dabei entstehenden rechtwinkligen Dreiecke nicht lediglich eine einzige Kante der Länge $\pi/2$ enthalten können. Demzufolge wäre $S^{(m_2)}$ nicht maximal. Die Ecke p_1 ließe sich hinzunehmen, ohne daß ein orthogonal-entartetes Orthoschem $S^{(m_2+1)}$ entsteht. Das widerspricht aber der Voraussetzung.

Im allgemeinen gibt es in einem orthogonal-entarteten Orthoschem $S^{(n)}$ weitere Eckpunkte, die zu keinem maximalen Orthoschem gehören. Die Menge aller dieser Eckpunkte von $S^{(n)}$ erzeugt ein total orthogonal-entartetes Unterorthoschem $S^{(n_0)}$ von $S^{(n)}$, das entsprechend der folgenden Definition „maximal-entartet" genannt wird.

Definition 10. Ein Unterorthoschem $S^{(n_0)}$ eines elliptischen Orthoschems $S^{(n)}$ ($n \geqq 3$, $n_0 \geqq 1$) wird *maximal-entartet* genannt, wenn für $S^{(n_0)}$ folgendes gilt:

1. $S^{(n_0)}$ ist total orthogonal-entartet,
2. $S^{(n_0)}$ ist mit allen übrigen Eckpunkten von $S^{(n)}$ orthogonal-verbunden und
3. die Hinzunahme eines jeden beliebigen weiteren Eckpunktes von $S^{(n)}$ zu $S^{(n_0)}$ bewirkt, daß das so erweiterte Unterorthoschem $S^{(n_0+1)}$ nicht mehr mit allen restlichen Eckpunkten von $S^{(n)}$ orthogonal-verbunden ist.

Die Bezeichnung „maximal" bezieht sich also demnach wiederum auf die Dimension des total orthogonal-entarteten Unterorthoschems. Gegenüber dem maximalen Unterorthoschem ist das maximal-entartete Unterorthoschem wohl zu unterscheiden. Während das maximal-entartete Orthoschem total orthogonal-entartet ist, ist das maximale Orthoschem nicht orthogonal-entartet. Ohne die dritte Forderung in Definition 10 wäre das total orthogonal-entartete Orthoschem, das mit allen weiteren Eckpunkten orthogonal-verbunden ist, nicht notwendig von maximaler Dimension $n_0 - 1$.

Darüber hinaus bewirkt die zweite Forderung in Definition 10 in Verbindung mit der dritten, daß total orthogonal-entartete Orthoscheme, die zwar von größerer Dimension als $S^{(n_0)}$, aber nicht mit allen weiteren Eckpunkten orthogonal-verbunden sind, ausgeschlossen werden. Es gibt nämlich im Fall, daß genau h (> 0) verschiedene maximale Unterorthoscheme $S^{(n_i)}$ ($i = 1, 2, \ldots, h$) in $S^{(n)}$ vorkommen, total orthogonal-entartete Unterorthoscheme bis zur Dimension $n_0 + h - 1$, also mit $n_0 + h$ Eckpunkten. Die Eckpunkte eines total orthogonal-entarteten Unterorthoschems größter Dimension werden von den Eckpunkten von $S^{(n_0)}$ dargestellt, zu denen zusätzlich aus jedem weiteren maximalen Unterorthoschem $S^{(n_1)}, \ldots, S^{(n_h)}$ jeweils genau ein beliebiger Eckpunkt hinzugefügt wird. Ein solches Orthoschem ist nicht maximal-entartet, da Forderung 2 offensichtlich nicht erfüllt wird. Daher gilt

Folgerung 11. *Das maximal-entartete Unterorthoschem $S^{(n_0)}$ eines elliptischen Orthoschems $S^{(n)}$ ist der Durchschnitt von allen total orthogonal-entarteten Unterorthoschemen möglichst großer Dimension von $S^{(n)}$. Es ist somit eindeutig bestimmt.*

Beweis. Ein beliebiges, mindestens eindimensionales total orthogonal-entartetes Unterorthoschem von $S^{(n)}$ läßt sich stets, falls es nicht bereits selbst ein total ortho-

gonal-entartetes Unterorthoschem möglichst großer Dimension ist, zu einem solchen durch Hinzunahme weiterer geeigneter Eckpunkte von $S^{(n)}$ ergänzen. Ist der Durchschnitt D dieser total orthogonal-entarteten Unterorthoscheme möglichst großer Dimension nicht leer, dann muß jeder Eckpunkt von D bei Richtigkeit von Folgerung 11 gemäß Definition 10, zweite Eigenschaft, mit allen übrigen Eckpunkten von $S^{(n)}$ orthogonal-verbunden sein. Gäbe es nun einen Eckpunkt $p_0 \in D$, der mit einem anderen Eckpunkt q durch eine Kante von einer Länge verschieden von $\pi/2$ verbunden ist, dann gehört q zu keinem der total orthogonal-entarteten Unterorthoscheme möglichst großer Dimension. Das heißt aber, daß es keine von q ausgehende Kante der Länge $\pi/2$ gibt. Dann kann aber das Orthoschem $S^{(n)}$ niemals orthogonal-entartet sein, weil es sonst Dreiecke geben würde, von denen nur genau eine Kante die Länge $\pi/2$ besitzt. Demzufolge muß der Durchschnitt leer sein entgegen der Voraussetzung. Ist der Durchschnitt D leer, dann ist nur noch die dritte Eigenschaft aus Definition 10 nachzuweisen, die jetzt auch gleichzeitig für einen nichtleeren Durchschnitt überprüft werden soll.
Es wird ein Eckpunkt p betrachtet, der nicht zu D gehört. p müßte mindestens mit einem weiteren Eckpunkt des Orthoschems $S^{(n)}$ durch eine Kante von einer Größe verschieden von $\pi/2$ verbunden sein, wenn Folgerung 11 richtig ist. Dieses gilt für alle Punkte $p \notin D$. Zwei Fälle sind zu unterscheiden.

Ist erstens p ein Eckpunkt eines total orthogonal-entarteten Unterorthoschems, was zu einem solchen möglichst großer Dimension ergänzt werden kann, dann gibt es wegen $p \notin D$ ein anderes total orthogonal-entartetes Unterorthoschem möglichst großer Dimension, zu dem p nicht gehört. In diesem gibt es mindestens einen Eckpunkt, mit dem p nicht orthogonal-verbunden ist, weil dieses sonst nicht von möglichst großer Dimension wäre.

Ist zweitens p ein Eckpunkt, der zu keinem total orthogonal-entarteten Unterorthoschem möglichst großer Dimension gehört, dann gibt es keine von p ausgehende Kante der Länge $\pi/2$.
Im übrigen ist D stets total orthogonal-entartet auf Grund seiner Konstruktion aus total orthogonal-entarteten Unterorthoschemen, so daß auch die erste Eigenschaft in Definition 10 erfüllt wird. Damit ist Folgerung 11 völlig bewiesen.

Hat beispielsweise das Orthoschem $S^{(6)}$ als einzige Kanten mit einer Länge verschieden von $\pi/2$ die Kanten 1, 2 und 5, 6, dann sind die Unterorthoscheme (1, 3, 4, 5), (1, 3, 4, 6), (2, 3, 4, 5) und (2, 3, 4, 6) die total orthogonal-entarteten Unterorthoscheme möglichst großer Dimension, sie sind aber nicht maximal-entartet. Das maximal-entartete Unterorthoschem wäre hier (3, 4) (vgl. Abb. 3).

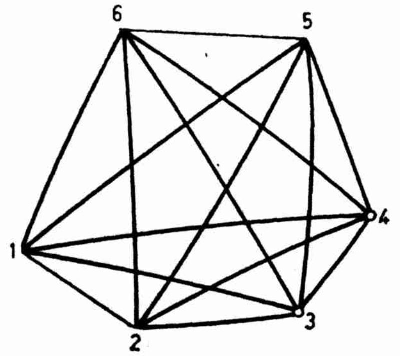

Abb. 3

Die bisherigen Ergebnisse lassen sich zusammenfassen zum

Satz 3. *Ein elliptisches Orthoschem $S^{(n)}$ zerfällt in disjunkte, maximale Orthoscheme $S^{(n_1)}, S^{(n_2)}, \ldots, S^{(n_h)}$, die paarweise untereinander orthogonal verbunden sind. Die restlichen Eckpunkte von $S^{(n)}$, die zu keinem dieser maximalen Orthoscheme gehören, bilden das maximal-entartete Orthoschem $S^{(n_0)}$ mit $n_0 = n - \sum_{i=1}^{h} n_i$.*

Beweis. Gibt es eine Kante, deren Länge verschieden von $\pi/2$ ist, so kann sie durch Hinzunahme weiterer Eckpunkte schließlich zu einem maximalen Orthoschem $S^{(n_1)}$ ergänzt werden. Falls es in dem Orthoschem $S^{(n-n_1)}$, was aus den verbleibenden Eckpunkten von $S^{(n)}$ erzeugt wird, weitere Kanten gibt, deren Länge verschieden von $\pi/2$ ist, wird dieses Verfahren fortgesetzt und so der Reihe nach $S^{(n_2)}$, $S^{(n_3)}$ usw. gewonnen, bis schließlich dieses Verfahren nach $S^{(n_h)}$ abbricht, weil dann keine Kanten mehr von einer Länge, die verschieden von $\pi/2$ ist, vorhanden sind. Das Rest-Orthoschem sei $S^{(n_0)}$. Dieses muß demzufolge maximal-entartet sein. Dieses Zerfallen eines elliptischen Orthoschems in maximale Unterorthoscheme und dem maximal-entarteten Unterorthoschem ist bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt. Das wird insbesondere durch Folgerung 9 gewährleistet.
Ist $n_0 = 1$, so handelt es sich um ein genau einfach orthopyramidales Orthoschem $S^{(n)}$ mit dem Punkt $S^{(n_0)}$ als Orthopyramidenspitze. Dieser einzige Punkt $S^{(n_0)}$ soll in diesem Zusammenhang formal als ein total orthogonal-entartetes Orthoschem aufgefaßt werden. Einen total-orthogonalen Kantenzug gibt es hier zwar nicht. Um in den allgemeinen Formulierungen diesen Fall aber mit zu erfassen, soll dieser Punkt formal ebenfalls als total-orthogonaler Kantenzug per Definition angesehen werden. Für $n_0 = 0$ kommt $S^{(n_0)}$ überhaupt nicht vor. Die entsprechenden Aussagen bezüglich $S^{(n_0)}$ sind dann in diesem Fall leer.

Aus Definition 10 ergibt sich noch

Folgerung 12. *Das maximal-entartete Unterorthoschem $S^{(n_0)}$ eines elliptischen Orthoschems $S^{(n)}$ ist mit jedem anderen maximalen Unterorthoschem von $S^{(n)}$ orthogonal-verbunden. In $S^{(n_0)}$ ist jede Ecke Hauptecke. Jeder Kantenzug zwischen zwei beliebigen Hauptecken von $S^{(n_0)}$, der genau alle Eckpunkte von $S^{(n_0)}$ erfaßt, ist total-orthogonal. $S^{(n)}$ ist daher genau n_0-fach orthopyramidal.*

Demzufolge zerfallen die Eckpunkte von $S^{(n)}$ in zwei Klassen. Für diese gilt

Folgerung 13. *Gehen von einem Eckpunkt p des elliptischen Orthoschems $S^{(n)}$ nur Kanten der Länge $\pi/2$ aus, genau dann gehört dieser Eckpunkt zum maximal-entarteten Unterorthoschem $S^{(n_0)}$. Alle anderen Eckpunkte gehören jeweils zu genau einem maximalen Unterorthoschem $S^{(n_i)}$ $(1 \leqq i \leqq h)$.*

In Verallgemeinerung von Hilfssatz 4 bzw. Folgerung 5 folgt nun aus Satz 3 für ein genau q-fach orthogonal-entartetes Orthoschem

Satz 4. *Das genau q-fach orthogonal-entartete elliptische Orthoschem $S^{(n)}$ mit den rechten Keilwinkeln $v_{k_1}^{(2)}, v_{k_2}^{2}, \ldots, v_{k_q}^{(2)}$ $(1 \leqq k_1 < k_2 < \cdots < k_q \leqq n-1;\ k_{q+1} = n)$ besitzt genau*

$$\sum_{i=1}^{q} k_i(k_{i+1} - k_i)$$

Kanten der Länge $\pi/2$.

Als Spezialfall ergibt sich ferner

Folgerung 14. *Das genau einfach orthopyramidale elliptische Orthoschem $S^{(n)}$ mit der Orthopyramidenspitze k und der jeweiligen minimalen Anzahl von rechten Keilwinkeln besitzt genau $k(n-k+1)-1$ Kanten der Länge $\pi/2$.*

Beweis. Kommt in $S^{(n)}$ nur $v_{k_q}^{(2)}$ als einziger rechter wesentlicher Keilwinkel vor, dann gibt es nach Folgerung 5 genau $k_q(n-k_q)$ Kanten der Länge $\pi/2$. Dadurch sind die im Beweis von Folgerung 7 für $1 < k_q < n-1$ erwähnten maximalen Unterorthoscheme $(1, 2, \ldots, k_q)$ und $(k_q+1, k_q+2, \ldots, n)$ orthogonal-verbunden. Übrigens besitzen diese beiden Unterorthoscheme die Keilwinkel $v_1^{(2)}, \ldots, v_{k_q-1}^{(2)}$ bzw. $v_{k_q+1}^{(2)}, \ldots, v_{n-1}^{(2)}$, eingeschränkt auf die entsprechenden Unterorthoscheme. Das läßt sich unmittelbar aus den bisherigen Ergebnissen und der Erklärung der wesentlichen Keilwinkel (vgl. Abschnitt 2, S. 43) ablesen.
Ist nun ferner auch noch $v_{k_q-1}^{(2)}$ ein rechter Winkel, dann zerfällt das Unterorthoschem $(1, 2, \ldots, k_q)$ in weitere zwei maximale Unterorthoscheme $(1, 2, \ldots, k_{q-1})$ und $(k_{q-1}+1, k_{q-1}+2, \ldots, k_q)$. Sie sind ebenfalls miteinander orthogonal-verbunden. So kommen demzufolge noch $k_{q-1}(k_q-k_{q-1})$ Kanten der Länge $\pi/2$ hinzu. Entsprechende Schlüsse lassen sich für die weiteren Keilwinkel $v_{k_{q-2}}^{(2)}, \ldots, v_{k_1}^{2}$ ziehen, so daß sich die in Satz 4 angegebene Anzahl ergibt. Folgerung 14 erhält man für $q=2$, $k_1 = k-1$ und $k_2 = k$. Sie gilt zunächst für $1 < k < n$, bleibt aber auch für $k=1$ bzw. $k=n$ richtig, wie sich schnell nachprüfen läßt.

Die im Beweis von Satz 4 gemachte Bemerkung über die vorkommenden Keilwinkel in den beiden maximalen Unterorthoschemen bei rechtem Keilwinkel $v_{k_q}^{2)}$ ergibt bei Erweiterung auf ein genau q-fach orthogonal-entartetes Orthoschem

Folgerung 15. *Das genau q-fach orthogonal-entartete elliptische Orthoschem $S^{(n)}$ mit den rechten Keilwinkeln $v_{k_1}^{2)}, v_{k_2}^{2}, \ldots, v_{k_q}^{(2)}$ $(1 \leqq k_1 < k_2 < \ldots < k_q \leqq n-1)$ zerfällt für $q < n-1$ in maximale Unterorthoscheme. Zwei solche rechte Keilwinkel $v_{k_t}^{(2)}$ und $v_{k_{t+1}}^{(2)}$ mit $k_t < k_{t+1}-1$ geben zu einem wohlbestimmten maximalen Unterorthoschem $S^{(k_{t+1}-k_t)}$ mit den Keilwinkeln $v_{k_t+1}^{(2)}, v_{k_t+2}^{2)}, \ldots, v_{k_{t+1}-1}^{2}$ Anlaß. Werden noch die formalen rechten Keilwinkel $v_{k_0}^{2)}$ und $v_{k_{q+1}}^{(2)}$ mit $k_0 = 0$ und $k_{q+1} = n$ hinzugefügt* (vgl. Abschnitt 4, S. 45), *dann gilt die letzte Aussage sogar für $t = 0, 1, \ldots, q$ sowie für $q = 0$ (nicht-orthogonal-entartet).*

Jetzt läßt sich auch die Anzahl der Hauptecken angeben gemäß

Satz 5. *Ein elliptisches Orthoschem $S^{(n)}$, das in die maximalen Unterorthoscheme $S^{(n_i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, h)$ und das maximal-entartete Unterorthoschem $S^{(n_0)}$ mit $\sum_{j=0}^{h} n_j = n$ zerfällt, besitzt $n_0 + 2h$ Hauptecken.*

Beweis. $S^{(n_i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, h)$ hat genau zwei Hauptecken, $S^{(n_0)}$ hat genau n_0 Hauptecken.

Auf Grund der Kenntnis der Anzahl der Hauptecken läßt sich eine Aussage über die Anzahl der möglichen total-orthogonalen Kantenzüge machen.

Satz 6. *Das elliptische Orthoschem $S^{(n)}$ mit den maximalen Unterorthoschemen $S^{(n_i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, h)$ und dem maximal-entarteten Unterorthoschem $S^{(n_0)}$ mit $\sum_{j=0}^{h} n_j = n$ besitzt genau $(n_0 + h)!\, 2^h$ verschiedene total-orthogonale Kantenzüge.*

Beweis. Für jedes maximale Unterorthoschem $S^{(n_i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, h)$ gibt es genau zwei total-orthogonale Kantenzüge, die sich nur durch ihre Orientierung unterscheiden. Jeweils einer dieser beiden Kantenzüge wird jetzt einem jeden dieser Orthoscheme $S^{(n_i)}$ zugeordnet. Dadurch ist eindeutig ein Anfangspunkt und ein Endpunkt dieses Kantenzugs erklärt. $S^{(n_0)}$ setzt sich aus n_0 Punkten zusammen. Diese sollen für die vorliegenden Betrachtungen jeweils einzeln als nulldimensionale Unterorthoscheme aufgefaßt werden. Für ein solches punktförmiges Orthoschem ist sein einziger Punkt zugleich Anfangs- und Endpunkt des hier formalen total-orthogonalen Kantenzugs. $S^{(n)}$ kann dann in $n_0 + h$ Unterorthoscheme zerlegt werden, nämlich in $S^{(n_i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, h)$ sowie in die n_0 Punkte von $S^{(n_0)}$. Diese Unterorthoscheme sind alle jeweils paarweise orthogonal-verbunden. Darum ergibt sich, wenn die total-orthogonalen Kantenzüge jeweils zweier dieser Unterorthoscheme derart aneinandergehängt werden, so daß der Endpunkt des vorangehenden mit dem Anfangspunkt des nachfolgenden Kantenzugs verbunden wird, insgesamt wiederum ein total-orthogonaler Kantenzug. Die ausgezeichneten total-orthogonalen Kantenzüge lassen sich auf $(n_0 + h)!$ verschiedene Weise aneinanderhängen, interpretiert als Permutationen von $n_0 + h$ Elementen. Denn symbolisch läßt sich ein solcher total-orthogonaler Kantenzug von $S^{(n)}$ durch eine Permutation der Elemente $1, 2, \ldots, n_0, n_1{}^{1)}, n_2{}^{1}, \ldots, n_h^{(1)}$ darstellen. Wird noch berücksichtigt, daß der total-orthogonale Kantenzug des maximalen Unterorthoschems $S^{(n_i)}$ $(1 \leqq i \leqq h)$, in entgegengesetzter Richtung durchlaufen, ebenfalls total-orthogonal ist, dann wird klar, daß jeweils zwei Möglichkeiten für einen solchen total-orthogonalen Kantenzug bestehen. Da es h derartige maximale Unterorthoscheme gibt, ist folglich insgesamt der Faktor 2^h hinzuzufügen. In der oben angegebenen symbolischen Darstellung ist für $1 \leqq i \leqq h$ jeweils $n_i^{(1)}$ durch $n_i^{(-1)}$ zu ersetzen, falls der für $S^{(n_i)}$ ausgezeichnete total-orthogonale Kantenzug in entgegengesetzter Richtung durchlaufen wird. Daher läßt sich ein jeder möglicher total-orthogonaler Kantenzug von $S^{(n)}$ durch eine Permutation der Elemente $1, 2, \ldots, n_0, n_1^{(\varepsilon)}, n_2^{(\varepsilon)}, \ldots, n_h^{(\varepsilon)}$ mit jeweils $\varepsilon := +1$ bzw. $\varepsilon := -1$ in $n_i^{(\varepsilon)}$ je nach der Durchlaufungsrichtung des total-orthogonalen Kantenzugs in $S^{(n_i)}$ charakterisieren. Die betreffende Permutation gibt dann an, in welcher Reihenfolge und Richtung die total-orthogonalen Kantenzüge zu durchlaufen sind.

Die Sätze 5 und 6 gelten auch für den nicht-orthogonal-entarteten elliptischen Fall. Hier gibt es genau ein maximales Unterorthoschem $(h = 1)$, nämlich $S^{(n)}$ selbst, und kein maximal-entartetes Unterorthoschem $S^{(n_0)}$ wegen $n_0 = 0$. Demzufolge gibt es hier zwei Hauptecken und zwei total-orthogonale Kantenzüge. Auch die Ergebnisse von Folgerung 7 erhält man als Spezialfälle aus diesen beiden Sätzen. Für ein genau einfach orthogonal-entartetes Orthoschem $S^{(n)}$ $(n \geqq 4)$ mit $|v_k^{(2)}| = \pi/2$ $(1 < k < n - 1)$ ist nämlich gemäß Folgerung 6 dann $n_0 = 0$, $n_1 = k$ und $n_2 = n - k$. Für $k = 1$ bzw. $k = n - 1$ ist $n_0 = 1$ und $n_1 = n - 1$ $(n \geqq 3)$.

Für ein genau einfach orthopyramidales und gleichzeitig genau zweifach orthogonal-entartetes Orthoschem $S^{(n)}$ $(n \geqq 5)$ mit $|v_{k-1}^{(2)}| = |v_k^{2)}| = \pi/2$ $(3 \leqq k \leqq n - 2)$ (vgl. Satz 1) gilt entsprechend Satz 3 sowie den Ausführungen im Beweis zu Satz 4 stets $n_0 = 1$ mit $S^{(n_0)} = (k)$, $n_1 = k - 1$ mit $S^{(n_1)} = (1, 2, \ldots, k - 1)$ und $n_2 = n - k$ mit $S^{(n_2)} = (k + 1, \ldots, n)$. Ein einfacher Repräsentant dieses Typs (genau einfach orthopyramidal und genau zweifach orthogonal-entartet mit der angegebenen Einschränkung für k) ist das Orthoschem $S^{(5)} = (1, 2, 3, 4, 5)$, bei dem unter den Kanten und Keilwinkeln nur die beiden Kanten $1, 2$ und $4, 5$ sowie die beiden Keilwinkel $v_1^{(2)}$ und $v_4^{(2)}$ Größen verschieden von $\pi/2$ haben. Für diese gilt darüber hinaus $|1, 2| = |v_1^{(2)}|$ und $|4, 5| = |v_4^{(2)}|$ (vgl. Abb. 4). Ein einfacher Repräsentant möglichst niedriger Ordnung eines Typs mit den Parametern $(n_0, n_1, \ldots, n_h)$ $(n_j > 0$ für $j = 0, 1, \ldots, h)$ ist das Orthoschem $S^{(2h+1)}$ mit $n_i = 2$ für $i = 1, 2, \ldots, h$ und $n_0 = 1$,

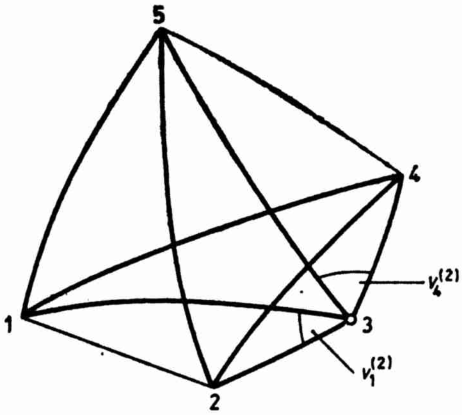

Abb. 4

bei dem genau die Kanten $1, 2; 3, 4; \ldots; 2h - 1, 2h$ von $\pi/2$ verschiedene Größen haben. Hier sind von den Keilwinkeln nur die Winkel $v_{2k-1}^{(2)}$ $(k = 1, 2, \ldots, h)$ keine rechten Winkel. Für ihre Größe gilt $|v_{2k-1}^{(2)}| = |2k - 1, 2k|$. Dieses Orthoschem ist genau $(h + 1)$-fach orthogonal-entartet und genau einfach orthopyramidal mit der Orthopyramidenspitze $2h + 1$.

LITERATUR

[1] BÖHM, J.: Simplexinhalte in Räumen konstanter Krümmung beliebiger Dimension. J. reine angew. Math. *202* (1959), 16–51.

[2] BÖHM, J.: Einige kombinatorisch-topologische Eigenschaften von allgemeinen r-dimensionalen Orthoschemen. Math. Nachr. *61* (1974), 51–67.

[3] COXETER, H. S. M.: On Schläfli's generalisation of Napier's Pentagramma mirificum. Bull. Calcutta Math. Soc. *28* (1936), 125–144.

[4] SCHLÄFLI, L.: Gesammelte math. Abh. *1*. Theorie der vielfachen Kontinuität (aus dem Jahre 1852). Birkhäuser Verlag, Basel—Stuttgart 1950, S. 227 ff.

Manuskripteingang: 22. 10. 1974

VERFASSER:

JOHANNES BÖHM, Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena