5.3. Weiteres über Deformationen abelscher Mannigfaltigkeiten

Es sei V_0 eine abelsche Mannigfaltigkeit über einen Körper k. Um Deformationen von V_0 zu studieren, muß man erstens die Deformation der zugrunde liegenden Mannigfaltigkeit und zweitens die Deformation der Gruppenstruktur studieren. Letzteres ist jedoch nicht nötig nach einem Resultat von D. MUMFORD [4], S. 124, Prop. 6.15 und Thm. 6.14, auf jede Deformation der zugrunde liegenden Mannigfaltigkeit läßt sich die Gruppenstruktur von V_0 bis auf eine Translation eindeutig liften, da es genügt, den Nullschnitt zu liften, was nach dem Henselschen Lemma möglich ist. Es ist

$$H^1(V_0, \Theta_{V_0}) = H^1(V_0, \mathcal{O}_{V_0}) \otimes H^0(V_0, \Theta_{V_0}),$$
$$H^2(V_0, \Theta_{V_0}) = H^2(V_0, \mathcal{O}_{V_0}) \otimes H^0(V_0, \Theta_{V_0}),$$

also $\dim H^1(V_0, \Theta_{V_0}) = g^2$ ($g = \dim V_0$). Die kanonische Involution $z \mapsto -z$ auf V_0 induziert in $H^0(V_0, \Theta_{V_0})$ die Multiplikation mit -1, und weil das Hindernis für die Liftung infinitesimaler Deformationen in $H^2(V_0, \Theta_{V_0})$ liegt und invariant bezüglich universeller Automorphismen ist (also bezüglich der Involution), muß es (falls $\operatorname{char}(k) \neq 2$ ist) verschwinden, das gilt auch noch im Fall $\operatorname{char}(k) = 2$ (F. OORT [1]). Man kann ohne großen Aufwand verifizieren, daß sich jeder Automorphismus von Deformationen infinitesimal liften läßt. Wir erhalten daher aus dem Satz von SCHLESSINGER (vgl. Kap. II) in Übereinstimmung mit 5.1.:

Ist A ein kompletter diskreter Bewertungsring mit dem Restklassenkörper k, $A = \Lambda[[x_{11}, \ldots, x_{1g}, \ldots, x_{g1}, \ldots, x_{gg}]]$, so gibt es eine mit der Reduktion mod m^n verträgliche Folge $V_n \to \operatorname{Spec}(A/m^{n+1})$ abelscher Schemata über $\operatorname{Spec}(A/m^{n+1})$, $n = 0, 1, \ldots$ (und wobei V_0 die gegebene abelsche Mannigfaltigkeit ist), *die eine Prodarstellung* des Funktors der lokalen Deformationen von V_0 liefert. (Dies geht im wesentlichen auf A. GROTHENDIECK [3] sowie A. GROTHENDIECK und M. DEMAZURE [1] zurück.) Das Beispiel 5.1. zeigt jedoch, daß diese Folge keine Chance hat, durch ein abelsches Schema über $\operatorname{Spec}(A)$ induziert zu werden.

5.4. Beziehung zwischen den Deformationen polarisierter und nicht polarisierter Mannigfaltigkeiten

Es sei V_0 glatt und irreduzibel, $V \to S$ eine Deformation von V_0. Da $\operatorname{Pic}^{\tau}_{V|S} \subset \operatorname{Pic}_{V|S}$ offen ist, läßt sich eine Polarisierung von V_0 auf höchstens eine Weise zu einer Polarisierung von liften[1]), d. h., bezeichnet D_p den Funktor der Deformationen polarisierter Mannigfaltigkeit (V_0, h_0), so ist D_p ein Subfunktor von D (Funktor der Deformationen von V_0).

5.4.1. Satz. *D_p ist ein abgeschlossener Subfunktor von D, und es gibt ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & D_p(I_1) \arrow[r] & D(I_1) \arrow[r] \arrow[d, equal, "\wr"'] & H^2(V_0, \mathcal{O}_{V_0}) \arrow[d, equal] \\ & & H^1(V_0, \Theta_{V_0}) \arrow[r] & H^2(V_0, \mathcal{O}_{V_0}) \end{tikzcd}$$

---

[1]) Sind $\xi_1, \xi_2 \in \operatorname{Pic}_{V|S}(S)$ und $\xi_1 \otimes k(0) \equiv \xi_2 \otimes k(0) \bmod \operatorname{Pic}^{\tau}_{V|S}(S)$, so ist $(\xi_1 - \xi_2)^{-1}\left(\operatorname{Pic}^{\tau}_{V|S}\right)$ eine Umgebung von 0 in S, über der ξ_1 und ξ_2 dieselbe Polarisierung definieren.

Beweis. Ist $V \xrightarrow{p} S$ eine analytische Familie, so kann man wie folgt argumentieren: Es sei I kohärente Idealgarbe auf S, die 0 definiert, dann ist

$$0 \to I\mathcal{O}_V \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_V^* \to \mathcal{O}_{V_0}^* \to 1$$

exakt, und hieraus resultiert eine exakte Folge

$$\mathrm{Pic}_{V|S} \to \mathrm{Pic}_{V_0} \to R^2p_*(I\mathcal{O}_V).$$

Dem Element $\xi \in \mathrm{Pic}_{V_0}(\mathbf{C})$, das der Polarisierung entspricht, entspricht ein Schnitt von $R^2p_*(I\mathcal{O}_V)$, d. h. ein $s\colon \mathcal{O}_S \to R^2p_*(I\mathcal{O}_V)$; es sei $J \subseteq \mathcal{O}_S$ der Kern. Durch die Idealgarbe J wird ein abgeschlossener Unterraum S' von S definiert. Ist $V' = V \times_S S'$, dann ist $V' \to S'$ der größte Unterraum, auf den sich die Polarisierung liften läßt.
Im allgemeinen Fall argumentiert man analog, wobei man, um die Exponentialfunktion zu haben, infinitesimale Liftungen betrachtet. Man prüft z. B. die Bedingungen des Schlessinger-Kriteriums nach; dazu genügt folgende

Bemerkung. Es sei

$$\begin{tikzcd} A'' \arrow[r] \arrow[d] & A''/tA'' \arrow[d] \\ A' \arrow[r] & A'/tA' \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm lokaler Artinringe, $tA'' \cong tA' \cong k$, $V'' \to \mathrm{Spec}\,(A'')$ eine Deformation, $V' = V'' \otimes_{A''} A'$, $\bar{V}'' = V'' \otimes_{A''} A''/tA''$. Dann wird durch die exakten Folgen

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{O}_{V_0} \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, equal] & \mathcal{O}_{V''}^* \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_{\bar{V}''}^* \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{O}_{V_0} \arrow[r, "\varepsilon"] & \mathcal{O}_{V'}^* \arrow[r] & \mathcal{O}_{\bar{V}'}^* \arrow[r] & 1 \end{tikzcd} \qquad (\varepsilon(f) = 1 + tf)$$

ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen induziert:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H^1(V_0, \mathcal{O}_{V_0}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Pic}(V'') \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Pic}(\bar{V}'') \arrow[r] \arrow[d] & H^2(V_0, \mathcal{O}_{V_0}) \arrow[d, equal] \\ 0 \arrow[r] & H^1(V_0, \mathcal{O}_{V_0}) \arrow[r] & \mathrm{Pic}(V') \arrow[r] & \mathrm{Pic}(\bar{V}') \arrow[r] & H^2(V_0, \mathcal{O}_{V_0}) \end{tikzcd}$$

Zu jeder Deformation $V_1 \to I_1$ betrachte man die analoge Folge. Damit die Polarisierung auf V_1 fortgesetzt werden kann, ist notwendig und hinreichend, daß das Bild von h_0 bezüglich des Verbindungshomomorphismus δ_{V_1} in $H^2(V_0, \mathcal{O}_{V_0})$ verschwindet. Also ist die Folge

$$0 \to D_p(I_1) \to D(I_1) \to H^2(V_0, \mathcal{O}_{V_0}); \quad V_1 \mid I_1 \mapsto \delta_{V_1}(h_0)$$

exakt.
Wir wollen die Komposition dieser Abbildung mit der durch die Kodaira-Spencer-Abbildung induzierten $H^1(V_0, \mathcal{O}_{V_0}) \xrightarrow{\sim} D(I_1)$ berechnen. Dazu sei $(g_{\alpha\beta})$ ein 1-Ko-

zyklus von $\mathcal{O}^*_{V_0}$, der ein zu h_0 gehöriges Linienbündel L repräsentiert bezüglich einer hinreichend feinen Überdeckung (U_α) von V_0, so daß

$$\mathcal{O}_{V_1} \mid U_\alpha \cong (\mathcal{O}_{V_0} \oplus \tau\, \mathcal{O}_{V_0}) \mid U_\alpha \quad (I_1 = \operatorname{Spec}(k[\tau])),$$
$$f \mapsto (f \mid V_0, \tau\delta_\alpha(f))$$

ist. Dann ist $\varrho_{\alpha\beta} = \delta_\beta - \delta_\alpha \in \Theta_{V_0}(U_{\alpha\beta})$ ein 1-Kozyklus, der die Kodaira-Spencer-Klasse repräsentiert.
Ist $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ diejenige Liftung zu einem Schnitt von $\mathcal{O}^*_{V_1}(U_{\alpha\beta})$ mit $\delta_\alpha(\tilde{g}_{\alpha\beta}) = 0$, so wird $\delta_{V_1}(h_0)$ repräsentiert durch den Kozyklus $\delta_\alpha/\tilde{g}_{\alpha\beta}\tilde{g}_{\beta\gamma}\tilde{g}^{-1}_{\alpha\gamma})$, also durch

$$f_{\alpha\beta\gamma} = -\frac{\varrho_{\alpha\beta}(g_{\beta\gamma})}{g_{\beta\gamma}}$$

(da δ_α eine Derivation ist und $\delta_\alpha = \delta_\beta - \varrho_{\alpha\beta}$, also $\delta_\alpha(\tilde{g}_{\beta\gamma}) = -\varrho_{\alpha\beta}(g_{\beta\gamma})$).
Dieser Morphismus $H^1(V_0, \Theta_{V_0}) \to H^2(V_0, \mathcal{O}_{V_0})$ ergibt sich auch aus einer von Atiyah entdeckten exakten Folge, die in unserem Fall wie folgt definiert ist:

$$0 \to \mathcal{O}_{V_0} \to \mathscr{E} \to \theta_{V_0} \to 0,$$

wobei $\mathscr{E}$ die Garbe der $\mathbf{G}_m$-invarianten Vektorfelder in $p_*\Theta_{\mathbf{P}}$, P das zu $(g_{\alpha\beta})$ gehörige $\mathbf{G}_m$-Prinzipalbündel und $\mathcal{O}_{V_0}$ isomorph der Untergarbe der Vektorfelder längs der Fasern von $P \to V_0$ ist (die durch den folgenden globalen Schnitt erzeugt wird: Auf U_α sei $P \mid U_\alpha \cong U_\alpha \times \mathbf{G}_n$, $p \mapsto (\bar{p}, t_\alpha(p))$; dann ist das auf U_α durch $t_\alpha \dfrac{\partial}{\partial t_\alpha}$ repräsentierte Vektorfeld $\mathbf{G}_m$-invariant und erzeugend). Es gilt dann

5.4.2. Satz.

$$\delta : \operatorname{cls}(\varrho_{\alpha\beta}) \mapsto \operatorname{cls}\left(-\frac{\varrho_{\alpha\beta}(g_{\beta\gamma})}{g_{\beta\gamma}}\right),$$
$$H^1(V_0, \Theta_{V_0}) \to H^2(V_0, \mathcal{O}_{V_0})$$

ist der Verbindungsmorphismus der Atiyah-Folge.

Man überprüft das durch direkte Rechnung.

Wir wollen schließlich noch eine Abschätzung für die Anzahl der Gleichungen geben, durch die der Parameterraum der semiuniversellen Familie definiert wird.

5.4.3. Satz. *Es sei V_0 eine glatte Mannigfaltigkeit über einem beliebigen Körper k, $m = \dim H^1(V_0, \Theta_{V_0})$, $r = \dim H^2(V_0, \Theta_{V_0})$ und $s = \dim H^2(V_0, \mathcal{O}_{V_0})$. Es sei Λ ein lokaler Henselscher Ring mit dem Restklassenkörper k und A eine Λ-Algebra, über der eine semiuniverselle (oder formal semiuniverselle) Deformation V von V_0 definiert sei. Dann ist* $\operatorname{emdim}_\Lambda A = m$, *und ist B eine glatte bzw. formal glatte lokale Λ-Algebra der relativen Dimension m über Λ, so daß A Quotient von B ist, so wird* $\operatorname{Kern}(B \twoheadrightarrow A)$ *durch r Gleichungen $f_1, \ldots, f_r \in B$ erzeugt. Ist h_0 eine Polarisierung von V_0, so gibt es weitere s Gleichungen $g_1, \ldots, g_s \in B$, so daß h_0 auf $\bar{V} = V \otimes_A (A/g_1A + \cdots + g_sA)$ geliftet werden kann zu einer Polarisierung $\bar{h}$ und $(\bar{V}, \bar{h})$ eine semiuniverselle Deformation von (V_0, h_0) ist.*

Beweis. Es sei $I = \operatorname{Kern}(B \to A)$ und n so groß, daß $I \cap m_B^{n+1} \subseteq m_B I$ ist. Ist $A_n = A/m_B^{n+1}$, $B_n = B/m_B I + m_B^{n+1}$ (m_B Maximalideal von B), dann ist

$$0 \to I/m_B I \to B_n \to A_n \to 0$$