

Werk

Titel: 5.2. Polarisierung

Jahr: 1975

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?301416052_0004|log41

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

Isomorphismen

$$\begin{array}{ccc} V/U' & \cong & \mathbf{C}^g \times U' \\ \uparrow & & \uparrow \varrho \\ L/U' & \rightarrow & \mathbf{Z}^{2g} \times U' \end{array}$$

so daß $\Omega(t'_0) = \Omega_0$, $\Omega(t) = \Omega_0 + (0, X(t))$ und somit $t \mapsto X(t)$ holomorph ist. Wenn wir vorübergehend als Familie polarisierter abelscher Mannigfaltigkeiten $(A'_t, H_t; t \in T)$ eine Familie komplexer Tori mit einer analytisch von t abhängigen Riemannschen Form $V_t \times V_t \xrightarrow{H_t} \mathbf{C}$ bezeichnen, so erhalten wir ferner:

Ist $(A_0, H_0) \simeq (A'_t, H_t)$, so hängt $E_t: L_t \times L_t \rightarrow \mathbf{Q}$ nicht von t ab, also $E_t = E_0$ und

$$E_0(\Omega(t)p, \Omega(t)q) = E_0(\Omega_0 p, \Omega_0 q),$$

d. h., $t \rightarrow X(t)$ ist ein Morphismus (komplexer Räume!) $U \rightarrow S$, durch den (A'_t, H_t) induziert wird.

Um von „Semiuniversalität“ in der Kategorie der algebraischen Schemata zu reden, muß noch geklärt werden, wie man erstens „Polarisierung“ algebraisch definieren kann und ob zweitens $U \rightarrow S$ algebraisch ist (vgl. dazu Kap. II). Nach dem Satz von APPEL-HUMPERT entsprechen sich die Riemannschen Formen und die amplen Linienbündel $L \rightarrow A_0$ umkehrbar eindeutig (E repräsentiert die erste Chernsche Klasse von L). Das ermöglicht, auf algebraischem Wege den Begriff „polarisierte algebraische Mannigfaltigkeit“ zu definieren (T. MATSUSAKA [1]).

5.2. Polarisation

Für eine Mannigfaltigkeit V sei $\text{Pic}^*(V)$ die Gruppe der Cartierdivisoren, für die ein ganzzahliges Vielfaches algebraisch äquivalent zu 0 ist.

Eine *inhomogen polarisierte algebraische Mannigfaltigkeit* ist ein Paar (V, h) , V eine algebraische Mannigfaltigkeit, $h \in \text{Pic}(V)/\text{Pic}^*(V)$ eine Klasse, die einen *ampelen* Divisor enthält (=def. „ h ist ample“). Eine *homogen polarisierte algebraische Mannigfaltigkeit* ist ein Paar (V, H) , $H \subset \text{Pic}(V)/\text{Pic}^*(V)$ ein Strahl durch eine ample Divisorenklasse h (d. h. $H = \{h'; \exists m, n > 0, mh' = nh\}$).

Der Begriff eines „Morphismus polarisierter Mannigfaltigkeiten“ und einer „Familie polarisierter Mannigfaltigkeiten“, Deformation usw. ist klar.

Für abelsche Mannigfaltigkeiten ist $\text{Pic}(V)/\text{Pic}^*(V)$ enthalten in $\text{Hom}_{\text{Ab}}(V, \hat{V})$ ($\hat{V}$ duale abelsche Mannigfaltigkeit) (induziert durch $L \in \text{Pic}(V) \mapsto (s - \text{pr}_1 - \text{pr}_2)^* L \in \text{Pic}^*(V) = \text{Hom}(V, \hat{V})$, vgl. D. MUMFORD [6], S. 74). Jede Polarisation h von V definiert also einen endlichen (vgl. D. MUMFORD [6], S. 84) Morphismus $Ah: V \rightarrow \hat{V}$ abelscher Mannigfaltigkeiten und ist durch diesen eindeutig bestimmt. Die Polarisation heißt *separabel*, wenn Ah eine separable Isogenie ist.

Ist $V = \mathbf{C}^g/L$ über $\mathbf{C}$ definiert und die Polarisation durch die Riemannsche Form $H(x, y)$ gegeben, so ist

$$\hat{V} = \text{Hom}_{\text{anti}}(\mathbf{C}^g, \mathbf{C})/H(-, L)$$

(„anti“ = antilinear, $H(-, L)$ bezeichnet die Menge aller Antilinearformen $z \mapsto (z, p)$ mit $p \in L$), und $Ah: V \rightarrow \hat{V}$ wird induziert durch $z \mapsto H(-, z)$.