

Werk

Titel: 5.1. Abelsche Mannigfaltigkeiten und komplexe Tori.

Jahr: 1975

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?301416052_0004|log40

Kontakt/Contact

[Digizeitschriften e.V.](#)
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

5.1. Abelsche Mannigfaltigkeiten und komplexe Tori

Es sei $k = \mathbf{C}^g$, $L \subset \mathbf{C}^g$ ein Gitter mit der Periodenmatrix $\Omega_0 = (I_g, Z)$, $I_g = (\delta_{ij})$, $Z = (z_{ij}) \in M_g(\mathbf{C})^1$ und $A_0 = \mathbf{C}^g/L$ eine abelsche Mannigfaltigkeit. Man erhält auf folgende Weise eine Deformation von A_0 in der Kategorie der komplexen Räume: Es sei $U \subset M_g(\mathbf{C})$ eine Umgebung der 0 derart, daß

$$\det \begin{pmatrix} I_g Z + X \\ I_g \bar{Z} + \bar{X} \end{pmatrix} \neq 0$$

auf U ist, und es sei $A = \mathbf{C} \times U/\mathbf{Z}^{2g}$ bezüglich der Operation

$$(z, X) + p = (z + \Omega(X)p, X)$$

($p \in \mathbf{Z}^{2g}$, $\Omega(X) = (E_g, Z + X)$, $z \in \mathbf{C}^g$), $f: A \rightarrow U$ Projektion. Dann ist $(A_X; X \in U)$ eine Deformation von A_0 ($A_X = f^{-1}(X)$). Die Deformationen sind zwar noch komplexe Tori, aber im allgemeinen keine algebraischen Mannigfaltigkeiten.

Damit ein komplexer Torus $A = \mathbf{C}^g/L$ algebraisch ist, ist es notwendig und hinreichend, daß auf \mathbf{C}^g eine positiv definite hermitesche Form $H(x, y)$ existiert, so daß

$$E(x, y) = \frac{1}{2i} (H(x, y) - H(y, x))$$

auf $L \times L$ nur rationale Werte annimmt (Riemannsche Periodenrelationen).

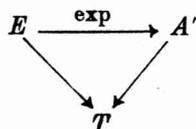
Um zu vermeiden, daß man nicht-algebraisierbare Deformationen erhält, muß man *polarisierte* abelsche Mannigfaltigkeiten (A_0, H_0) betrachten, d. h. A_0 plus eine „Riemannsche Form“ H_0 .

Es sei

$$S = \{X \in M_g(\mathbf{C}), E_0(\Omega(X)p, \Omega(X)q) = E_0(\Omega_0 p, \Omega_0 q), p, q \in \mathbf{Z}^{2g}\}.$$

Dann ist S eine nichtsinguläre analytische Mannigfaltigkeit der Dimension $g(g + 1)/2$ und die obige Deformation, eingeschränkt auf S , liefert eine Deformation $(A_X, H_X; X \in S)$ der *polarisierten* abelschen Mannigfaltigkeit (A_0, H_0) .

Die beiden betrachteten Deformationen sind semiuniversell in 0: Ist $(A'_t, t \in T)$ eine beliebige analytische Familie komplexer Tori, $\theta: A_0 \cong A'_t$ ($t_0 \in T$) ein Isomorphismus, so betrachten wir das Vektorbündel $V \rightarrow T$ (= Bündel längs der Fasern von $A' \rightarrow T$, eingeschränkt auf den Nullschnitt) sowie die Exponentialfunktion



Ist $L' \subset V$ der Kern von exp , dann ist $A' = V/L'$, L' ist ein lokales System über T und erzeugt V über \mathbf{R} . Wegen $A'_t \cong A_0$ gibt es eine Umgebung U' von t_0 in T und

¹⁾ $M_g(\mathbf{C})$ bezeichnet die Algebra der komplexen $(g \times g)$ -Matrizen, mit \bar{X} bezeichnen wir die konjugiert komplexe Matrix.