5.1. Abelsche Mannigfaltigkeiten und komplexe Tori

Es sei $k = \mathbf{C}^g$, $L \subset \mathbf{C}^g$ ein Gitter mit der Periodenmatrix $\Omega_0 = (I_g, Z)$, $I_g = (\delta_{ij})$, $Z = (z_{ij}) \in M_g(\mathbf{C})$[1] und $A_0 = \mathbf{C}^g/L$ eine abelsche Mannigfaltigkeit. Man erhält auf folgende Weise eine Deformation von A_0 in der Kategorie der komplexen Räume: Es sei $U \subset M_g(\mathbf{C})$ eine Umgebung der 0 derart, daß

$$\det \begin{pmatrix} I_g Z + X \\ I_g \bar{Z} + \bar{X} \end{pmatrix} \neq 0$$

auf U ist, und es sei $A = \mathbf{C} \times U/\mathbf{Z}^{2g}$ bezüglich der Operation

$$(z, X) + p = (z + \Omega(X)\, p, X)$$

($p \in \mathbf{Z}^{2g}$, $\Omega(X) = (E_g, Z + X)$, $z \in \mathbf{C}^g$), $f\colon A \to U$ Projektion. Dann ist $(A_X;\, X \in U)$ eine Deformation von A_0 ($A_X = f^{-1}(X)$). Die Deformationen sind zwar noch komplexe Tori, aber im allgemeinen keine algebraischen Mannigfaltigkeiten.
Damit ein komplexer Torus $A = \mathbf{C}^g/L$ algebraisch ist, ist es notwendig und hinreichend, daß auf $\mathbf{C}^g$ eine positiv definite hermitesche Form $H(x, y)$ existiert, so daß

$$E(x, y) = \frac{1}{2i}\,(H(x, y) - H(y, x))$$

auf $L \times L$ nur rationale Werte annimmt (Riemannsche Periodenrelationen).
Um zu vermeiden, daß man nicht-algebraisierbare Deformationen erhält, muß man *polarisierte* abelsche Mannigfaltigkeiten (A_0, H_0) betrachten, d. h. A_0 plus eine „Riemannsche Form" H_0.
Es sei

$$S = \{X \in M_g(\mathbf{C}),\ E_0(\Omega(X)\, p, \Omega(X)\, q) = E_0(\Omega_0 p, \Omega_0 q),\ p, q \in \mathbf{Z}^{2g}\}.$$

Dann ist S eine nichtsinguläre analytische Mannigfaltigkeit der Dimension $g(g + 1)/2$ und die obige Deformation, eingeschränkt auf S, liefert eine Deformation $(A_X, H_X;$ $X \in S)$ der *polarisierten* abelschen Mannigfaltigkeit (A_0, H_0).
Die beiden betrachteten Deformationen sind semiuniversell in 0: Ist $(A'_t, t \in T)$ eine beliebige analytische Familie komplexer Tori, $\theta\colon A_0 \cong A'_{t_0}$ $(t_0 \in T)$ ein Isomorphismus, so betrachten wir das Vektorbündel $V \to T$ (= Bündel längs der Fasern von $A' \to T$, eingeschränkt auf den Nullschnitt) sowie die Exponentialfunktion

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\exp"] \arrow[dr] & & A' \arrow[dl] \\ & T & \end{tikzcd}$$

Ist $L' \subset V$ der Kern von exp, dann ist $A' = V/L'$, L' ist ein lokales System über T und erzeugt V über $\mathbf{R}$. Wegen $A'_{t_0} \cong A_0$ gibt es eine Umgebung U' von t_0 in T und

[1]) $M_g(\mathbf{C})$ bezeichnet die Algebra der komplexen $(g \times g)$-Matrizen, mit $\bar{X}$ bezeichnen wir die konjugiert komplexe Matrix.