

Werk

Titel: 5. Weitere Beispiele - Polarisierung

Jahr: 1975

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?301416052_0004|log39

Kontakt/Contact

[Digizeitschriften e.V.](#)
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

Folgendes Beispiel möge das illustrieren: Es sei C_0 die durch

$$F_0 = T_0^2 - T_1^2 - T_2^2 = 0,$$

$$G_0 = T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 = 0$$

definierte Kurve vom Geschlecht 4 in \mathbf{P}^3 . Genau nach der Methode von 4.3.C. berechnet man, daß C_t , definiert durch

$$F(t, T) = F_0(T) + t_1 T_3^2,$$

$$G(t, T) = G_0(T) + t_2 T_0^2 + t_3 T_0^2 T_1 + t_4 T_0^2 T_2 + t_5 T_0^2 T_3 \\ + t_6 T_0 T_1 T_2 + t_7 T_0 T_1 T_3 + t_8 T_0 T_2 T_3 + t_9 T_1 T_2 T_3,$$

semiuniversell in $t = 0$ ist.

4.6. Weitere Eigenschaften von Mannigfaltigkeiten vom allgemeinen Typ

Ist V N -kanonisch in \mathbf{P}^r eingebettet, so ist $\text{Aut}(V) \subseteq PGL(r+1)$. Ist h der zu $V \subset \mathbf{P}^r$ gehörige Parameter im Hilbertschema von \mathbf{P}^r , so ist also $\text{Aut}(V)$ der Stabilisator von h in $PGL(N+1)$, und daher ist $\text{Aut}(V)$ eine lineare algebraische Gruppe. Die dazugehörige Liesche Algebra ist

$$\text{Kern}(\text{Aut}_{I_1}(V \times I_1) \rightarrow \text{Aut}(V)) = H^0(V, \omega_V).$$

Für Kurven ist sofort klar, daß $H^0(V, \omega_V) = 0$ ist. Das gilt auch (zumindest im Fall der Charakteristik 0) für höherdimensionale Mannigfaltigkeiten.

4.6.1. Satz. Ist V vom allgemeinen Typ und $\text{char}(k) = 0$ oder $\dim V = 1$, so ist $\text{Aut}(V)$ endlich und diskret.

Nach KODAIRAS „Vanishing Theorem“ gilt nämlich: Ist V eine projektive algebraische Mannigfaltigkeit der Dimension n , singularitätenfrei und \mathfrak{B} eine ample umkehrbare Garbe, so ist $H^q(V, \Omega_V^p \otimes \mathfrak{B}) = 0$ für $p+q > n$ (KODAIRA-AKIZUKI-NAKANO). In unserem Fall ist also $H^n(V, \Omega_V^1 \otimes \omega) = 0$ und nach SERRES Dualitätssatz daher auch $H^0(V, \theta_V) = 0$, q. e. d.

Zum Beispiel ist für „allgemeine“ Kurven vom Geschlecht > 2 die Automorphismengruppe trivial, für allgemeine Kurven vom Geschlecht 2 ist die kanonische Involution der einzige nichttriviale Automorphismus.

Für höherdimensionale Mannigfaltigkeiten und positive Charakteristik scheint nichts derartiges bekannt zu sein. Aus dem Satz folgt insbesondere:

- (1) Für Mannigfaltigkeiten mit ample kanonischer Garbe ist die semiuniverselle Deformation universell (vgl. Kap. II).
- (2) Die Orbits von $PGL(N+1)$ in $H_{N,d}$ sind glatte Untermannigfaltigkeiten der Dimension $(N+1)^2 - 1$.

5. Weitere Beispiele — Polarisierung

Die bisher betrachteten Beispiele von Mannigfaltigkeiten waren alle mit einer projektiven Einbettung versehen. Wir betrachten jetzt zwei Beispiele, bei denen das nicht der Fall ist.

5.1. Abelsche Mannigfaltigkeiten und komplexe Tori

Es sei $k = \mathbf{C}^g$, $L \subset \mathbf{C}^g$ ein Gitter mit der Periodenmatrix $\Omega_0 = (I_g, Z)$, $I_g = (\delta_{ij})$, $Z = (z_{ij}) \in M_g(\mathbf{C})^1$ und $A_0 = \mathbf{C}^g/L$ eine abelsche Mannigfaltigkeit. Man erhält auf folgende Weise eine Deformation von A_0 in der Kategorie der komplexen Räume: Es sei $U \subset M_g(\mathbf{C})$ eine Umgebung der 0 derart, daß

$$\det \begin{pmatrix} I_g Z + X \\ I_g \bar{Z} + \bar{X} \end{pmatrix} \neq 0$$

auf U ist, und es sei $A = \mathbf{C} \times U/\mathbf{Z}^{2g}$ bezüglich der Operation

$$(z, X) + p = (z + \Omega(X)p, X)$$

($p \in \mathbf{Z}^{2g}$, $\Omega(X) = (E_g, Z + X)$, $z \in \mathbf{C}^g$), $f: A \rightarrow U$ Projektion. Dann ist $(A_X; X \in U)$ eine Deformation von A_0 ($A_X = f^{-1}(X)$). Die Deformationen sind zwar noch komplexe Tori, aber im allgemeinen keine algebraischen Mannigfaltigkeiten.

Damit ein komplexer Torus $A = \mathbf{C}^g/L$ algebraisch ist, ist es notwendig und hinreichend, daß auf \mathbf{C}^g eine positiv definite hermitesche Form $H(x, y)$ existiert, so daß

$$E(x, y) = \frac{1}{2i} (H(x, y) - H(y, x))$$

auf $L \times L$ nur rationale Werte annimmt (Riemannsche Periodenrelationen).

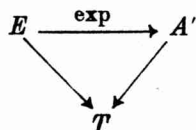
Um zu vermeiden, daß man nicht-algebraisierbare Deformationen erhält, muß man polarisierte abelsche Mannigfaltigkeiten (A_0, H_0) betrachten, d. h. A_0 plus eine „Riemannsche Form“ H_0 .

Es sei

$$S = \{X \in M_g(\mathbf{C}), E_0(\Omega(X)p, \Omega(X)q) = E_0(\Omega_0 p, \Omega_0 q), p, q \in \mathbf{Z}^{2g}\}.$$

Dann ist S eine nichtsinguläre analytische Mannigfaltigkeit der Dimension $g(g + 1)/2$ und die obige Deformation, eingeschränkt auf S , liefert eine Deformation $(A_X, H_X; X \in S)$ der polarisierten abelschen Mannigfaltigkeit (A_0, H_0) .

Die beiden betrachteten Deformationen sind semiuniversell in 0: Ist $(A'_t, t \in T)$ eine beliebige analytische Familie komplexer Tori, $\theta: A_0 \cong A'_t$ ($t_0 \in T$) ein Isomorphismus, so betrachten wir das Vektorbündel $V \rightarrow T$ (= Bündel längs der Fasern von $A' \rightarrow T$, eingeschränkt auf den Nullschnitt) sowie die Exponentialfunktion



Ist $L' \subset V$ der Kern von \exp , dann ist $A' = V/L'$, L' ist ein lokales System über T und erzeugt V über \mathbf{R} . Wegen $A'_t \cong A_0$ gibt es eine Umgebung U' von t_0 in T und

¹⁾ $M_g(\mathbf{C})$ bezeichnet die Algebra der komplexen $(g \times g)$ -Matrizen, mit \bar{X} bezeichnen wir die konjugiert komplexe Matrix.

Isomorphismen

$$\begin{array}{ccc} V/U' & \cong & \mathbf{C}^g \times U' \\ \uparrow & & \uparrow \Omega \\ L/U' & \rightarrow & \mathbf{Z}^{2g} \times U' \end{array}$$

so daß $\Omega(t'_0) = \Omega_0$, $\Omega(t) = \Omega_0 + (0, X(t))$ und somit $t \mapsto X(t)$ holomorph ist. Wenn wir vorübergehend als Familie polarisierter abelscher Mannigfaltigkeiten $(A'_t, H_t; t \in T)$ eine Familie komplexer Tori mit einer analytisch von t abhängigen Riemannschen Form $V_t \times V_t \xrightarrow{H_t} \mathbf{C}$ bezeichnen, so erhalten wir ferner:

Ist $(A_0, H_0) \xrightarrow{\sim} (A'_t, H_t)$, so hängt $E_t: L_t \times L_t \rightarrow \mathbf{C}$ nicht von t ab, also $E_t = E_0$ und

$$E_0(\Omega(t) p, \Omega(t) q) = E_0(\Omega_0 p, \Omega_0 q),$$

d. h., $t \rightarrow X(t)$ ist ein Morphismus (komplexer Räume!) $U \rightarrow S$, durch den (A'_t, H_t) induziert wird.

Um von „Semiuniversalität“ in der Kategorie der algebraischen Schemata zu reden, muß noch geklärt werden, wie man erstens „Polarisierung“ algebraisch definieren kann und ob zweitens $U \rightarrow S$ algebraisch ist (vgl. dazu Kap. II). Nach dem Satz von APPEL-HUMPERT entsprechen sich die Riemannschen Formen und die amplen Linienbündel $L \rightarrow A_0$ umkehrbar eindeutig (E repräsentiert die erste Chernsche Klasse von L). Das ermöglicht, auf algebraischem Wege den Begriff „polarisierte algebraische Mannigfaltigkeit“ zu definieren (T. MATSUSAKA [1]).

5.2. Polarisierung

Für eine Mannigfaltigkeit V sei $\text{Pic}^*(V)$ die Gruppe der Cartierdivisoren, für die ein ganzzahliges Vielfaches algebraisch äquivalent zu 0 ist.

Eine *inhomogen polarisierte algebraische* Mannigfaltigkeit ist ein Paar (V, h) , V eine algebraische Mannigfaltigkeit, $h \in \text{Pic}(V)/\text{Pic}^*(V)$ eine Klasse, die einen *amplen* Divisor enthält (=def „ h ist ampel“). Eine *homogen polarisierte algebraische* Mannigfaltigkeit ist ein Paar (V, H) , $H \subset \text{Pic}(V)/\text{Pic}^*(V)$ ein Strahl durch eine ample Divisorenklasse h (d. h. $H = \{h'; \exists m, n > 0, mh' = nh\}$).

Der Begriff eines „Morphismus polarisierter Mannigfaltigkeiten“ und einer „Familie polarisierter Mannigfaltigkeiten“, Deformation usw. ist klar.

Für abelsche Mannigfaltigkeiten ist $\text{Pic}(V)/\text{Pic}^*(V)$ enthalten in $\text{Hom}_{\text{Ab}}(V, \hat{V})$ (\hat{V} duale abelsche Mannigfaltigkeit) (induziert durch $L \in \text{Pic}(V) \mapsto (s - \text{pr}_1 - \text{pr}_2)^*L \in \text{Pic}^*(V) = \text{Hom}(V, \hat{V})$, vgl. D. MUMFORD [6], S. 74). Jede Polarisierung h von V definiert also einen endlichen (vgl. D. MUMFORD [6], S. 84) Morphismus $Ah: V \rightarrow \hat{V}$ abelscher Mannigfaltigkeiten und ist durch diesen eindeutig bestimmt. Die Polarisierung heißt *separabel*, wenn Ah eine separable Isogenie ist.

Ist $V = \mathbf{C}^g/L$ über C definiert und die Polarisierung durch die Riemannsche Form $H(x, y)$ gegeben, so ist

$$\hat{V} = \text{Hom}_{\text{anti}}(\mathbf{C}^g, \mathbf{C})/H(-, L)$$

(„anti“ = antilinear, $H(-, L)$ bezeichnet die Menge aller Antilinearformen $z \mapsto (z, p)$ mit $p \in L$), und $Ah: V \rightarrow \hat{V}$ wird induziert durch $z \mapsto H(-, z)$.

5.3. Weiteres über Deformationen abelscher Mannigfaltigkeiten

Es sei V_0 eine abelsche Mannigfaltigkeit über einen Körper k . Um Deformationen von V_0 zu studieren, muß man erstens die Deformation der zugrunde liegenden Mannigfaltigkeit und zweitens die Deformation der Gruppenstruktur studieren. Letzteres ist jedoch nicht nötig nach einem Resultat von D. MUMFORD [4], S. 124, Prop. 6.15 und Thm. 6.14, auf jede Deformation der zugrunde liegenden Mannigfaltigkeit läßt sich die Gruppenstruktur von V_0 bis auf eine Translation eindeutig liften, da es genügt, den Nullschnitt zu liften, was nach dem Henselschen Lemma möglich ist.

Es ist

$$\begin{aligned} H^1(V_0, \Theta_{V_0}) &= H^1(V_0, \mathcal{O}_{V_0}) \otimes H^0(V_0, \Theta_{V_0}), \\ H^2(V_0, \Theta_{V_0}) &= H^2(V_0, \mathcal{O}_{V_0}) \otimes H^0(V_0, \Theta_{V_0}), \end{aligned}$$

also $\dim H^1(V_0, \Theta_{V_0}) = g^2$ ($g = \dim V_0$). Die kanonische Involution $z \mapsto -z$ auf V_0 induziert in $H^0(V_0, \Theta_{V_0})$ die Multiplikation mit -1 , und weil das Hindernis für die Liftung infinitesimaler Deformationen in $H^2(V_0, \Theta_{V_0})$ liegt und invariant bezüglich universeller Automorphismen ist (also bezüglich der Involution), muß es (falls $\text{char}(k) \neq 2$ ist) verschwinden, das gilt auch noch im Fall $\text{char}(k) = 2$ (F. OORT [1]). Man kann ohne großen Aufwand verifizieren, daß sich jeder Automorphismus von Deformationen infinitesimal liften läßt. Wir erhalten daher aus dem Satz von SCHLESSINGER (vgl. Kap. II) in Übereinstimmung mit 5.1.:

Ist A ein kompletter diskreter Bewertungsring mit dem Restklassenkörper k , $A = A[[x_{11}, \dots, x_{1g}, \dots, x_{g1}, \dots, x_{gg}]]$, so gibt es eine mit der Reduktion mod m^n verträgliche Folge $V_n \rightarrow \text{Spec}(A/m^{n+1})$ abelscher Schemata über $\text{Spec}(A/m^{n+1})$, $n = 0, 1, \dots$ (und wobei V_0 die gegebene abelsche Mannigfaltigkeit ist), die eine *Prodarstellung* des Funktors der lokalen Deformationen von V_0 liefert. (Dies geht im wesentlichen auf A. GROTHENDIECK [3] sowie A. GROTHENDIECK und M. DEMAZURE [1] zurück.) Das Beispiel 5.1. zeigt jedoch, daß diese Folge keine Chance hat, durch ein abelsches Schema über $\text{Spec}(A)$ induziert zu werden.

5.4. Beziehung zwischen den Deformationen polarisierter und nicht polarisierter Mannigfaltigkeiten

Es sei V_0 glatt und irreduzibel, $V \rightarrow S$ eine Deformation von V_0 . Da $\text{Pic}_{V|S}^r \subset \text{Pic}_{V|S}$ offen ist, läßt sich eine Polarisation von V_0 auf höchstens eine Weise zu einer Polarisierung von liften¹⁾, d. h., bezeichnet D_p den Funktor der Deformationen polarisierter Mannigfaltigkeit (V_0, h_0) , so ist D_p ein Subfunktor von D (Funktor der Deformationen von V_0).

5.4.1. Satz. D_p ist ein abgeschlossener Subfunktor von D , und es gibt ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & D_p(I_1) & \rightarrow & D(I_1) & \rightarrow & H^2(V_0, \Theta_{V_0}) \\ & & & & \wr \parallel & & \parallel \\ & & & & H^1(V_0, \Theta_{V_0}) & \rightarrow & H^2(V_0, \Theta_{V_0}) \end{array}$$

¹⁾ Sind $\xi_1, \xi_2 \in \text{Pic}_{V|S}(S)$ und $\xi_1 \otimes k(0) \equiv \xi_2 \otimes k(0) \pmod{\text{Pic}_{V|S}(S)}$, so ist $(\xi_1 - \xi_2)^{-1} (\text{Pic}_{V|S}^r)$ eine Umgebung von 0 in S , über der ξ_1 und ξ_2 dieselbe Polarisation definieren.

Beweis. Ist $V \xrightarrow{p} S$ eine analytische Familie, so kann man wie folgt argumentieren: Es sei I kohärente Idealgarbe auf S , die 0 definiert, dann ist

$$0 \rightarrow I\mathcal{O}_V \xrightarrow{\text{exp}} \mathcal{O}_V^* \rightarrow \mathcal{O}_{V_0}^* \rightarrow 1$$

exakt, und hieraus resultiert eine exakte Folge

$$\text{Pic}_{V|S} \rightarrow \text{Pic}_{V_0} \rightarrow R^2p_*(I\mathcal{O}_V).$$

Dem Element $\xi \in \text{Pic}_{V_0}(\mathbf{C})$, das der Polarisierung entspricht, entspricht ein Schnitt von $R^2p_*(I\mathcal{O}_V)$, d. h. ein $s: \mathcal{O}_S \rightarrow R^2p_*(I\mathcal{O}_V)$; es sei $J \subseteq \mathcal{O}_S$ der Kern. Durch die Idealgarbe J wird ein abgeschlossener Unterraum S' von S definiert. Ist $V' = V \times_S S'$, dann ist $V' \rightarrow S'$ der größte Unterraum, auf den sich die Polarisierung liften läßt.

Im allgemeinen Fall argumentiert man analog, wobei man, um die Exponentialfunktion zu haben, infinitesimale Liftings betrachtet. Man prüft z. B. die Bedingungen des Schlessinger-Kriteriums nach; dazu genügt folgende

Bemerkung. Es sei

$$\begin{array}{ccc} A'' & \longrightarrow & A''/tA'' \\ \downarrow & & \downarrow \\ A' & \longrightarrow & A'/tA' \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm lokaler Artinringe, $tA'' \cong tA' \cong k$, $V'' \rightarrow \text{Spec}(A'')$ eine Deformation, $V' = V'' \otimes_{A''} A'$, $\bar{V}'' = V'' \otimes_{A''} A''/tA''$. Dann wird durch die exakten Folgen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{V_0} & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathcal{O}_{V''}^* & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\bar{V}''}^* \longrightarrow 1 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{V_0} & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathcal{O}_{V'}^* & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\bar{V}'}^* \longrightarrow 1 \end{array} \quad (\varepsilon(f) = 1 + tf)$$

ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen induziert:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & H^1(V_0, \mathcal{O}_{V_0}) & \rightarrow & \text{Pic}(V'') & \rightarrow & \text{Pic}(\bar{V}'') \rightarrow H^2(V_0, \mathcal{O}_{V_0}) \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & H^1(V_0, \mathcal{O}_{V_0}) & \rightarrow & \text{Pic}(V') & \rightarrow & \text{Pic}(\bar{V}') \rightarrow H^2(V_0, \mathcal{O}_{V_0}) \end{array}$$

Zu jeder Deformation $V_1 \rightarrow I_1$ betrachte man die analoge Folge. Damit die Polarisierung auf V_1 fortgesetzt werden kann, ist notwendig und hinreichend, daß das Bild von h_0 bezüglich des Verbindungshomomorphismus δ_{V_1} in $H^2(V_0, \mathcal{O}_{V_0})$ verschwindet. Also ist die Folge

$$0 \rightarrow D_p(I_1) \rightarrow D(I_1) \rightarrow H^2(V_0, \mathcal{O}_{V_0}); V_1 | I_1 \twoheadrightarrow \delta_{V_1}(h_0)$$

exakt.

Wir wollen die Komposition dieser Abbildung mit der durch die Kodaira-Spencer-Abbildung induzierten $H^1(V_0, \mathcal{O}_{V_0}) \xrightarrow{\sim} D(I_1)$ berechnen. Dazu sei $(g_{\alpha\beta})$ ein 1-Ko-

zyklus von $\mathcal{O}_{V_0}^*$, der ein zu h_0 gehöriges Linienbündel L repräsentiert bezüglich einer hinreichend feinen Überdeckung (U_α) von V_0 , so daß

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{V_1} | U_\alpha &\cong (\mathcal{O}_{V_0} \oplus \tau \mathcal{O}_{V_0}) | U_\alpha \quad (I_1 = \text{Spec}(k[\tau])), \\ f &\mapsto (f | V_0, \tau \delta_\alpha(f)) \end{aligned}$$

ist. Dann ist $\varrho_{\alpha\beta} = \delta_\beta - \delta_\alpha \in \Theta_{V_0}(U_{\alpha\beta})$ ein 1-Kozyklus, der die Kodaira-Spencer-Klasse repräsentiert.

Ist $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ diejenige Liftung zu einem Schnitt von $\mathcal{O}_{V_1}^*(U_{\alpha\beta})$ mit $\delta_\alpha(\tilde{g}_{\alpha\beta}) = 0$, so wird $\delta_{V_1}(h_0)$ repräsentiert durch den Kozyklus $\delta_\alpha(\tilde{g}_{\alpha\beta}\tilde{g}_{\beta\gamma}\tilde{g}_{\alpha\gamma}^{-1})$, also durch

$$f_{\alpha\beta\gamma} = - \frac{\varrho_{\alpha\beta}(g_{\beta\gamma})}{g_{\beta\gamma}}$$

(da δ_α eine Derivation ist und $\delta_\alpha = \delta_\beta - \varrho_{\alpha\beta}$, also $\delta_\alpha(\tilde{g}_{\beta\gamma}) = -\varrho_{\alpha\beta}(g_{\beta\gamma})$). Dieser Morphismus $H^1(V_0, \Theta_{V_0}) \rightarrow H^2(V_0, \mathcal{O}_{V_0})$ ergibt sich auch aus einer von ATIYAH entdeckten exakten Folge, die in unserem Fall wie folgt definiert ist:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{V_0} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \theta_{V_0} \rightarrow 0,$$

wobei \mathcal{E} die Garbe der \mathbf{G}_m -invarianten Vektorfelder in $p_*\Theta_P$, P das zu $(g_{\alpha\beta})$ gehörige \mathbf{G}_m -Prinzipalbündel und \mathcal{O}_{V_0} isomorph der Untergarbe der Vektorfelder längs der Fasern von $P \rightarrow V_0$ ist (die durch den folgenden globalen Schnitt erzeugt wird:

Auf U_α sei $P | U_\alpha \cong U_\alpha \times \mathbf{G}_m$, $p \mapsto (\bar{p}, t_\alpha(p))$; dann ist das auf U_α durch $t_\alpha \frac{\partial}{\partial t_\alpha}$ repräsentierte Vektorfeld \mathbf{G}_m -invariant und erzeugend). Es gilt dann

5.4.2. Satz.

$$\begin{aligned} \delta : \text{cls}(\varrho_{\alpha\beta}) &\mapsto \text{cls}\left(-\frac{\varrho_{\alpha\beta}(g_{\beta\gamma})}{g_{\beta\gamma}}\right), \\ H^1(V_0, \Theta_{V_0}) &\rightarrow H^2(V_0, \mathcal{O}_{V_0}) \end{aligned}$$

ist der Verbindungsmorphismus der Atiyah-Folge.

Man überprüft das durch direkte Rechnung.

Wir wollen schließlich noch eine Abschätzung für die Anzahl der Gleichungen geben, durch die der Parameterraum der semiuniversellen Familie definiert wird.

5.4.3. Satz. *Es sei V_0 eine glatte Mannigfaltigkeit über einem beliebigen Körper k , $m = \dim H^1(V_0, \Theta_{V_0})$, $r = \dim H^2(V_0, \Theta_{V_0})$ und $s = \dim H^2(V_0, \mathcal{O}_{V_0})$. Es sei A ein lokaler Henselscher Ring mit dem Restklassenkörper k und A eine A -Algebra, über der eine semiuniverselle (oder formal semiuniverselle) Deformation V von V_0 definiert sei. Dann ist $\text{emdim}_A A = m$, und ist B eine glatte bzw. formal glatte lokale A -Algebra der relativen Dimension m über A , so daß A Quotient von B ist, so wird $\text{Kern}(B \twoheadrightarrow A)$ durch r Gleichungen $f_1, \dots, f_r \in B$ erzeugt. Ist h_0 eine Polarisierung von V_0 , so gibt es weitere s Gleichungen $g_1, \dots, g_s \in B$, so daß h_0 auf $\bar{V} = V \otimes_A (A/g_1A + \dots + g_sA)$ geliftet werden kann zu einer Polarisierung \bar{h} und (\bar{V}, \bar{h}) eine semiuniverselle Deformation von (V_0, h_0) ist.*

Beweis. Es sei $I = \text{Kern}(B \rightarrow A)$ und n so groß, daß $I \cap m_B^{n+1} \subseteq m_B I$ ist. Ist $A_n = A/m_B^{n+1}$, $B_n = B/m_B I + m_B^{n+1}$ (m_B Maximalideal von B), dann ist

$$0 \rightarrow I/m_B I \rightarrow B_n \rightarrow A_n \rightarrow 0$$

exakt (wegen $A_n = B/I + m_B^{n+1}$, $I + m_B^{n+1}/m_B I + n^{n+1} \cong I/m_B I$) und das Hindernis, um $V_n = V \otimes_A A_n$ auf B_n zu liften, liegt in $H^2(V_0, \mathcal{O}_{V_0}) \otimes I/m_B I$ (vgl. Kap. II), ist also von der Form $\bar{f}_1 e_1 + \dots + \bar{f}_r e_r$ mit $f_i \in I$, e_1, \dots, e_r Basis von $H^2(V_0, \mathcal{O}_{V_0})$.

Da das Hindernis sich funktoriell verhält, läßt sich V_n auf $B_n/f_1 B_n + \dots + f_r B_n$ fortsetzen, und wegen der Semiuniversalität von V erhalten wir daher ein kommutatives Diagramm von surjektiven Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ \swarrow & & \searrow \\ \bar{B}_n = B_n/f_1 B_n + \dots + f_r B_n & \xrightarrow{\sigma} & A_n \end{array}$$

so daß $m_B^{n+1} \bar{B}_n = 0$, also σ ein Isomorphismus ist. Daher ist

$$f_1 B + \dots + f_r B + m_B I + m_B^{n+1} = I + m_B^{n+1},$$

und hieraus folgt leicht $I = f_1 B + \dots + f_r B$.

Der Beweis im polarisierten Fall ist analog (indem man von A und dem Ideal $J \subseteq A$ ausgeht, so daß die semiuniverselle polarisierte Deformation über A/J definiert ist).

In dem in 5.1. betrachteten Beispiel abelscher Mannigfaltigkeiten über \mathbf{C} sind die Gleichungen g durch

$$E_0(\Omega(X) p, \Omega(X) q) = E_0(\Omega_0 p, \Omega_0 q)$$

(in Koordinaten aufgeschrieben) gegeben.

Für abelsche Mannigfaltigkeiten über Körpern endlicher Charakteristik (und \mathcal{A} z. B. Ring der Wittvektoren, also von der Charakteristik 0) liegen die Verhältnisse nicht so einfach. Insbesondere bedeutet das Liftungsproblem für abelsche Mannigfaltigkeiten zur Charakteristik 0, ob die Restklassencharakteristik $p \in \sqrt{(g_1, \dots, g_r)}$ (wenn nicht, kann man liften, z. B. durch eine geeignet allgemeine Faser der universellen Deformation der polarisierten Mannigfaltigkeit).

5.5. Weiteres Beispiel: K3-Flächen

Der Grundkörper sei \mathbf{C} , unter einer K3-Fläche versteht man eine kompakte komplexe zweidimensionale Mannigfaltigkeit V mit

$$\omega_V \cong \mathcal{O}_V \quad \text{und} \quad H^1(V, \mathcal{O}_V) = 0.$$

Wegen $\dim H^1(V, \mathbf{C}) \leq 2 \dim H^1(V, \mathcal{O}_V)$ ist dann auch

$$H^1(V, \mathbf{C}) = 0, \quad H^0(V, \Omega^1) = 0.$$

Aus der Noetherschen Formel

$$\chi(\mathcal{O}_V) = p_g - q + 1 = \frac{(\omega \cdot \omega) + \chi(V)}{12}$$

folgt wegen $p_g = \dim H^0(V, \omega_V) = 1$, $q = \dim H^1(V, \mathcal{O}_V) = 0$ und $(\omega \cdot \omega) = 0$, daß

$$\chi(V) = 24, \quad \text{also} \quad \dim H^2(V, \mathbf{C}) = 22 = h^{0,2} + h^{1,1} + h^{2,0}$$