Beweis von Satz 4.4.5. Zunächst gelte für $V \to S$ die Bedingung (i) und (ii). Aus (i) folgt sofort, daß $V \to S$ versell ist. Es bleibt daher zu zeigen, daß für zwei Tangentialvektoren $\alpha\colon I_1 \to S$, $\beta\colon I_1 - S$ ($I_1 = \operatorname{Spec}(k[t]/(t^2))$, k der Definitionskörper von W_0) folgendes gilt: Sind $\alpha^*(V)$ und $\beta^*(V)$ (als Deformationen von W_0) isomorph, so ist $\alpha = \beta$. Da V durch W induziert wird und da für zwei N-kanonische Einbettungen $V', V'' \subset \mathbf{P}^r \times I_1$ mit $V_0' = V_0'' = W_0$ jeder I_1-Isomorphismus $V' \xrightarrow{\sim} V''$, der auf W_0 die Identität induziert, durch einen projektiven Automorphismus $\mathrm{id} + tX \in PGL(r+1)'(I_1)$ induziert wird ($X \in \mathfrak{sl}(r+1, k)$), ist

$$i_*(\alpha) = i_*(\beta) + \nu(X)$$

($i\colon S \to H'$ Einbettung), also ist $\alpha = \pi_* i_*(\alpha) = \beta = \pi_* i_*(\beta)$.

Es sei umgekehrt $V \to S$ semiuniversell. Dann gibt es eine Abbildung $\pi\colon H' \to S$, so daß $W \mid H' \cong V \times_S H'$ (als Deformation von W_0) ist, deren Tangentialabbildung π^* eindeutig bestimmt ist. Da $W \to H$ versell ist, gibt es andererseits einen Morphismus $j\colon S \to H'$, durch den V aus W induziert wird, und $\pi \circ j$ ist dann ein Morphismus $S \to S$, durch den V aus V induziert wird und dessen Tangentialabbildung demzufolge die Identität ist. Daher ist $\pi \circ j$ ein Automorphismus von S, und $i =\colon j \circ (\pi \circ j)^{-1}\colon S \to H'$ ist ein Schnitt von π, also gilt (i).

Ist $\mathscr{D}$ der Funktor der infinitesimalen Deformationen von W_0, so ist

$$H_0^\wedge \times_{S^\wedge} H_0^\wedge \subseteq H_0^\wedge \times_{\mathscr{D}} H_0^\wedge ,$$

und wegen $(H_0^\wedge \times_S H_0^\wedge)(I_1) = (H_0^\wedge \times_{\mathscr{D}} H_0^\wedge)(I_1)$ ist

$$H_0^\wedge \times_{S^\wedge} H_0^\wedge = H_0^\wedge \times_{\mathscr{D}} H_0^\wedge .$$

Andererseits ist $H_0^\wedge \times_{\mathscr{D}} H_0^\wedge$ das Bild von $H_0^\wedge \times PGL(r+1)^\wedge$ in $H_0^\wedge \times H_0^\wedge$, und somit erfüllt $H_0^\wedge \to S_0^\wedge$ die Bedingung (ii). Das gilt dann auch bereits für $H' \to S$ (im Henselschen Fall), also gilt (ii).

Daß $H' \to S$ (formal) glatt ist, folgt aus der Tatsache, daß $W \mid H' \to H'$ versell ist. Um zu zeigen, daß ν surjektiv ist, genügt es nach dem Lemma von Nakayama zu zeigen, daß

$$\mathfrak{sl}(r+1) \to (T_{H'|S})_0$$

surjektiv ist. Das bedeutet: Wenn $V_1 \subseteq \mathbf{P}^N \times I_1$ ($I_1 = \operatorname{Spec} k[t]/(t^2)$), I_1-glatt mit der speziellen Faser $V_0 \subset V_1$ gegeben ist und als Deformation isomorph zu $V_0 \times I_1$ ist, so gibt es ein $g = 1 + tX$ ($X \in \mathfrak{sl}(r+1)$), d. h. aus $PGL(r+1)(I_1)$ über 1, das über dem $V_1 \subseteq \mathbf{P}^N \times I_1$ entsprechenden Punkt von $(T_{H'|S})_0$ liegt.

Die Isomorphie von V_1 mit $V_0 \times I_1$ induziert auf V_0 die identische Abbildung, und da beide Schemata V_1 und $V_0 \times I_1$ N-kanonisch in $\mathbf{P}^r \times I_1$ eingebettet sind, ist jeder Isomorphismus durch einen I_1-Isomorphismus $\mathbf{P}^r \times I_1 \xrightarrow{g} \mathbf{P}^r \times I_1$ induziert, g ist daher von der Form $1 + tX$. Damit ist Satz 4.4.5. bewiesen.

4.5. Kurven vom Geschlecht 4 und 5

Wir illustrieren Satz 4.4.5. an Kurven vom Geschlecht 4 und 5. Ein Beispiel dazu hatten wir schon in 4.3.C. betrachtet. Wir betrachten Kurven vom Geschlecht 4 und 5, die kanonisch in den projektiven Raum eingebettet sind.

Der Grad einer kanonisch eingebetteten Kurve ist $2p - 2$, ferner ist $\dim H^0(\omega^{\otimes n}) = (2n-1)(p-1)$ für $n > 1$ und $\binom{n+p-1}{p-1}$ die Dimension von $H^0(\mathbf{P}^{p-1}, \mathcal{O}\mathbf{P}^{p-1}(n))$.

Hieraus folgt unmittelbar:

(1) Eine kanonisch eingebettete Kurve $C \subset \mathbf{P}^3$ vom Geschlecht 4 ist durch eine quadratische und eine kubische Form definiert (da der Grad des durch eine quadratische und kubische Form definierten Unterschemas gleich 6 ist).

(2) Eine kanonisch eingebettete Kurve $C \subset \mathbf{P}^4$ vom Geschlecht 5 ist durch drei quadratische Formen definiert oder trigonal. Denn $H^0(\mathbf{P}^4, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^4}(2)) \to H^0(C, \mathcal{O}_C(2))$ ist surjektiv ($\mathcal{O}_C(2) = \omega_C^{\otimes 2}$), und es ist

$$\dim H^0(\mathbf{P}^4, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^4}(2)) = 15, \quad \dim H^0(C, \mathcal{O}_C(2)) = 12.$$

Also gibt es drei linear unabhängige quadratische Formen, die auf C verschwinden. Die Formen müssen irreduzibel sein, da C irreduzibel ist und keine Linearform auf C verschwindet. Falls drei derartige linear unabhängige Formen eine Kurve (vom Grad 8) definieren, folgt die erste Behauptung.

Hieraus folgt: Wenn wir $\mathbf{P}^9$ bzw. $\mathbf{P}^{19}$ mit dem Raum der quadratischen bzw. kubischen Formen in vier Unbestimmten T_0, T_1, T_2, T_3 identifizieren und wenn $M_0, \ldots, M_{19}$ die Monome vom Grad 3 in irgendeiner Reihenfolge bezeichnet, so ist das Hilbertschema der kanonischen Kurven $\subseteq \mathbf{P}^3$ gleich

$$\begin{aligned} H &= \bigcup_{0 \leqq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leqq 19} H_{i_1 i_2 i_3 i_4} \subseteq \mathbf{P}^9 \times \mathbf{P}^{19}, \\ H_{i_1 i_2 i_3 i_4} &= \{(F, G) \text{ mit } F \in \mathbf{P}^9, G \in \mathbf{P}^{19}, \operatorname{rg}(dF, dG) = 2, \\ &\qquad \operatorname{rg}(T_0F, T_1F, T_2F, T_3F, M_j; j \neq i_\nu) = 20, \\ &\qquad G \text{ Linearkombination der } M_j, j \neq i_\nu\} \\ &\subseteq \mathbf{P}^9 \times \mathbf{P}^{15} \text{ (offener Unterraum)} \end{aligned}$$

(wobei $\mathbf{P}^{15}$ hier der von den M_j, $j \neq i_\nu$, aufgespannte Unterraum ist).

Analog erhalten wir, wenn wir mit $\mathbf{P}^{14}$ den Raum der quadratischen Formen in $T_0, \ldots, T_4$ bezeichnen, für das Hilbertschema der nichttrigonalen kanonischen Kurven $\subseteq \mathbf{P}^4$:

$$H = \bigcup H_{I_1 I_2 I_3} \subset \mathbf{P}^{14} \times \mathbf{P}^{14} \times \mathbf{P}^{14},$$

wobei wieder die quadratischen Monome in irgendeiner Reihenfolge $M_0, M_1, \ldots, M_{14}$ angeordnet seien, I_1, I_2, I_3 jeweils Zweiermengen $\{0, \ldots, 14\}$ sind, die disjunkt sind, und H_{I_1, I_2, I_3} wie folgt definiert ist: Es sei L_I der von den M_j, $j \notin I$, aufgespannte Unterraum von $\mathbf{P}^{14}$ ($\dim L_I = 12$). Dann ist

$$\begin{aligned} H_{I_1 I_2 I_3} &= \{(F_1, F_2, F_3) \in L_{I_1} \times L_{I_2} \times L_{I_3}; \operatorname{rg}(dF_1, dF_2, dF_3) = 3, \\ &\qquad F_1, F_2 \text{ und } L_{I_3} \text{ usw. (zyklische Vertauschung) spannen } \mathbf{P}^{19} \text{ auf}\} \\ &\subseteq L_{I_1} \times L_{I_2} \times L_{I_3} \text{ (offener Unterraum).} \end{aligned}$$

Hat man jetzt eine Kurve C_0 vom Geschlecht 4 oder 5 gegeben, die sich kanonisch einbetten läßt (also nicht hyperelliptisch ist), so kann man eine Familie von solchen Kurven $(C_s)_{s \in S}$ bestimmen, die die Kurve C_0 (zu dem „Parameterwert“ 0) enthält und in einer Umgebung von 0 in jedem Punkt semiuniversell ist.

Man bestimme wie in 4.3.C. den Tangentialraum an das Orbit des C_0 entsprechenden Punktes $h \in H$ (nach Wahl einer kanonischen Einbettung) bezüglich der kanonischen Operation $H \times PGL(N + 1) \to H$ ($N = 3$ oder 4) und einen dazu transversalen Unterraum $S \subset H$ (o. B. d. A. $S =$ linearer Unterraum $\cap H$). In allen Punkten, in denen S transversal zum Orbit ist, ist die auf S induzierte Familie von Kurven semiuniversell.