$E_{11} - E_{00}$, $E_{22} - E_{00}$ (E_{pq} = Matrix mit den Koeffizienten $x_{ij} = \delta_{ip}\delta_{jq}$), so erhalten wir die folgende Basis von $T_{F_0})B_0)$ (wegen

$$F_0^{\mathrm{id}+\tau X}(T) = F_0(T) + \tau\,[F_{0T_0}(T)\,(x_{00}T_0 + x_{10}T_1 + x_{20}T_2) + F_{0T_1}(T)\,(x_{01}T_0 + x_{11}T_1 + x_{21}T_2) + \cdots]$$

und

$$F_0^{\mathrm{id}+\tau X}\,(1, 0, 0)^{-1} = 1 - \tau[4x_{00} + a_1x_{01} + a_2x_{02}],$$

wenn $A_1(T_1, T_2) = a_1T_1 + a_2T_2$):

$$\begin{aligned} U_{01} &= F_{0T_1}\cdot T_0 - a_1F_0, & U_{10} &= F_{0T_0}\cdot T_1,\\ U_{02} &= F_{0T_2}\cdot T_0 - a_2F_0, & U_{20} &= F_{0T_0}\cdot T_2,\\ U_{12} &= F_{0T_2}\cdot T_1, & U_{21} &= F_{0T_1}\cdot T_2,\\ U_{11} &= F_{0T_1}T_1 - F_{0T_0}\cdot T_0 + 4F_0, & U_{22} &= F_{0T_2}\cdot T_2 - F_{0T_0}\cdot T_0 + 4F_0. \end{aligned}$$

Setzen wir noch $U_{00} = T_0^4$ und ergänzen diese neun linear unabhängigen Formen vom Grad 4 zu einer Basis, durch Formen $G_1, \ldots, G_6$ (in denen o. B. d. A. T_0^4 nicht vorkommt), so gilt

4.3.1. Satz. *Die durch* $F(t, T) = F_0(T) + t_1G_1(T) + \cdots + t_6G_6(T) = 0$ definierte *Familie* C_t, $t \in \mathbf{A}^6$ *ist semiuniversell im Punkt* 0 (*und in jedem Punkt* t_0, *in dem* $G_1, \ldots, G_6$ *transversal zum Orbit von* $F(t_0, T)$ *in* $\mathbf{P}^{14}$ *sind*).

Beispiel.

$$F_0 = T_0^4 + T_1^4 + T_2^4,$$

$$F(t, T) = F_0(T) + t_1T_0^2T_1^2 + t_2T_0^2T_1T_2 + t_3T_0^2T_2^2 + t_4T_0T_1^2T_2 + t_5T_0T_1T_2^2 + t_6T_1^2T_2^2.$$

Der Beweis des Satzes folgt daraus, daß $SL(3) \times \mathbf{A}^6 \to \mathbf{P}^{14}$, $(\sigma, F) \mapsto F^\sigma$, in einer Umgebung von (id, F_0) ein Etalmorphismus ist ($\mathbf{A}^6$ wird hier identifiziert mit $\{F_0 + t_1G_1 + \cdots + t_6G_6 = F\}$) und weil jede Familie $(C_s)_{s\in S}$, in der C_0 vorkommt, lokal in $s = 0$ durch eine Form $F(s, T) = 0$ mit $F(0, T) = F_0(T)$ definiert wird.

4.4. Mannigfaltigkeiten vom allgemeinen Typ

Eine komplette singularitätenfreie Mannigfaltigkeit V heißt *von allgemeinem Typ*, wenn das N-kanonische Linearsystem $|\omega_V^{\otimes N}|$ ($\omega_V = \Omega_V^n$, $n = \dim V$) für ein $N > 0$ eine birationale Abbildung definiert. Für $\dim V = 1$ sind das die Kurven vom Geschlecht $\geqq 2$; für $\dim V = 2$ sind die folgenden Typen von Flächen nicht vom allgemeinen Typ: Regelflächen, Enriquesche Flächen, $K3$-Flächen, abelsche Flächen und Flächen mit einem elliptischen Büschel (vgl. etwa I. R. Schafarewitsch u. a.[1]). Ein vollständiger Durchschnitt $V \subset \mathbf{P}^r$ von Hyperflächen $H_1, \ldots, H_{r-n}$ vom Grad $m_1, \ldots, m_{r-n}$ ist genau dann vom allgemeinen Typ, wenn $m_1 + \cdots + m_{r-n} > n + 1$ ist (wegen $\omega_V \cong \mathcal{O}_V(m_1 + \cdots + m_{n-r} - n - 1)$).
B. G. Moišezon hat in seinem Vortrag in Nizza 1970 die Vermutung geäußert, daß alle Deformationen von Mannigfaltigkeiten vom allgemeinen Typ wieder von allgemeinem Typ sind. Wir wollen das hier beweisen unter der einschränkenden Voraussetzung, daß $|\omega_V^{\otimes N}|$ für ein $N > 0$ keine Basispunkte hat. Alle Basisschemata S, T usw. werden als noethersch vorausgesetzt.

4.4.1. Satz. *Es sei $V \xrightarrow{p} S$ glatt und eigentlich, $0 \in S$ und V_0 eine projektive algebraische Mannigfaltigkeit vom allgemeinen Typ mit der oben erwähnten Voraussetzung. Ist S von der Charakteristik* 0 (*bzw. ω_{V_0} ampel*), *so gibt es eine Umgebung S_0 von 0 in S und eine natürliche Zahl $N > 0$, so daß folgendes gilt:*

(i) $p^* p_* \omega^{\otimes N} \to \omega^{\otimes N}$ *ist surjektiv über S_0.*

(ii) $R^i p_* \omega^{\otimes Nq} = 0$ *für alle $i > 0$ und $q > 0$, und $p_* \omega^{\otimes Nq}$ ist lokal frei und mit Basiswechsel verträglich.*

(iii) *Ist $\Phi: V|S_0 \to \mathbf{P}_{S_0}(p_* \omega^{\otimes N}|S_0)$ die N-kanonische Abbildung, $W \subseteq \mathbf{P}_{S_0}(p_* \omega^{\otimes N}|S_0)$ das Bild von $V \mid S_0$, so gilt:*

a) *W ist S_0-flach, und für alle S_0-Schemata T ist $(\Phi_T)_* \mathcal{O}_{V_T} = \mathcal{O}_{W_T}$.*

b) *Es gibt ein offenes Unterschema $U \subseteq V \mid S_0$, so daß U_t dicht in V_t ist für alle $t \in S_0$; Φ induziert eine offene Einbettung $U \to W$* (*bzw. Φ ist ein Isomorphismus $V \xrightarrow{\sim} W$*).

Beweis. Zunächst sei S von der Charakteristik 0. Für ein $N > 0$ hat nach Voraussetzung das Linearsystem $|\omega_{V_0}^{\otimes N}|$ keine Basispunkte und definiert einen birationalen projektiven Morphismus, das gleiche gilt auch für alle $|\omega_{V_0}^{\otimes Nq}|$, $q > 0$. Nach einem Satz von C. P. RAMANUJAM [1] (Theorem 3) ist dann $H^j(V_0, \omega_{V_0}^{\otimes -m}) = 0$ für $j = 0, \ldots, n-1$ und alle $m > 0$; aus Dualitätsgründen (vgl. z. B. Kap. III, Abschnitt 2) ist also $H^i(V_0, \omega_{V_0}^{\otimes m}) = 0$ für alle $i \geqq 1$ und $m > 1$.
Für $N > 1$ ist dann in einer Umgebung von 0 auch $R^i p_* \omega_{V|S}^{\otimes N} = 0$ für alle $i \geqq 1$ und $p_* \omega_{V|S}^{\otimes N}$ frei und mit Basiswechsel verträglich (Basiswechsel, vgl. z. B. Kap. III, Abschnitt 1). Da der kanonische Morphismus $p^* p_* \omega_{V|S}^{\otimes N} \to \omega_{V|S}^{\otimes N}$ auf V_0 surjektiv ist, hat sein Kokern einen zu V_0 disjunkten Träger F und ist daher zu $p^{-1}(S - p(F))$ disjunkt.
Insgesamt gibt es also zu jedem $Nq > 1$ eine Umgebung von 0, über der $p_* \omega_{V|S}^{\otimes Nq}$ lokal frei und mit Basiswechsel verträglich ist, die höheren direkten Bilder verschwinden und $p^* p_* \omega_{V|S}^{\otimes Nq} \to \omega_{V|S}^{\otimes Nq}$ surjektiv ist.
Wir zeigen, daß für $q \gg 0$ die Nq-kanonische Abbildung

$$V_0 \xrightarrow{\Phi_q} \mathbf{P}(H^0(V_0, \omega_{V_0}^{\otimes Nq})$$

die Eigenschaft $(\Phi_q)_* \mathcal{O}_{V_0} = \mathcal{O}_{W_q}$ (mit $W_q =: \Phi_q(V_0)$) hat. Es sei $\eta_0, \ldots, \eta_r$ eine Basis von $H^0(V_0, \omega_{V_0}^{\otimes N})$ und V_{0i} die offene Teilmenge von V_0, auf der η_i keine Nullstellen hat, $V_0 = V_{00} \cup V_{01} \cup \cdots \cup V_{0r}$.
Für jedes q sei W_{qi} die offene Teilmenge in W_q, die durch $\eta_i^q \neq 0$ definiert ist. Dann ist $W_{q0}, \ldots, W_{qr}$ eine affine Überdeckung von W_q und $\Phi_q^{-1} W_{qi} = V_{0i}$. Ist jetzt z. B. f eine auf V_{00} reguläre Funktion, so ist $f\eta_0^q$ für $q \gg 0$ eine auf ganz V reguläre qN-fache Differentialform, also $f \in H^0(W_{q0}, \mathcal{O}_{W_q})$. Da $H^0(V_{0i}, \mathcal{O}_{V_0})$ endlich über $H^0(W_{1i}, \mathcal{O}_{W_1})$ ist, folgt daher für $q \gg 0$ die Beziehung $\Phi_q * \mathcal{O}_{V_0} = \mathcal{O}_{W_q}$.
Wir ersetzen N durch qN für ein solches q und zeigen, daß für $q \gg 0$ in einer Umgebung von 0 die Behauptungen (i), (ii), und (iii) gelten. Indem wir S gegebenenfalls verkleinern, können wir annehmen, daß auf S die Behauptung (i) gilt und (ii) für $q = 1$. Es sei $\mathscr{C}$ der Kokern von $\mathcal{O}_W \to \Phi_* \mathcal{O}_V$. Wir zeigen, daß $\operatorname{supp} \mathscr{C} \cap W_0 = \emptyset$ ist, so daß also $\mathcal{O}_W \to \Phi_* \mathcal{O}_V$ surjektiv über einer Umgebung von 0 ist. Dazu sei $S = \operatorname{Spec}(R)$ Spektrum eines lokalen Ringes und 0 sein abgeschlossener Punkt.

Wir können annehmen (Noethersche Induktion), daß für jeden echten Restklassenring R' von R der Morphismus $\mathcal{O}_W \to \Phi_*(\mathcal{O}_V \otimes_R R')$ bereits surjektiv ist. Es sei $r \neq 0$ ein Element aus m_R, $I = \operatorname{ann}_R(r)$. Da $\mathcal{O}_V$ R-flach ist, ist

$$0 \to \mathcal{O}_V/I\mathcal{O}_V \xrightarrow{r} \mathcal{O}_V \to \mathcal{O}_V/r\mathcal{O}_V \to 0$$

exakt; also sind in dem folgenden kommutativen Diagramm die Zeilen exakt:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to \Phi_*(\mathcal{O}_V/I\mathcal{O}_V) & \xrightarrow{r} & \Phi_*\mathcal{O}_V & \to & \Phi_*(\mathcal{O}_V/r\mathcal{O}_V) & \to 0 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ \mathcal{O}_W & \xrightarrow{r} & \mathcal{O}_W & \longrightarrow & \mathcal{O}_W/r\mathcal{O}_W & \to 0 \end{array}$$

(da der rechte vertikale Pfeil ein Epimorphismus ist).
Hieraus folgt sofort, daß $\mathcal{O}_W \to \Phi_*\mathcal{O}_V$ surjektiv ist, also $\operatorname{supp} \mathcal{C} \cap W_0 = \emptyset$.
Wir können also jetzt $\Phi_*\mathcal{O}_V = \mathcal{O}_W$ annehmen. Ist $U \subset V$ die offene Menge der Punkte, in denen Φ quasiendlich ist, so folgt aus Zariskis Hauptsatz (in der Formulierung z. B. aus H. Kurke, G. Pfister und M. Roczen [1]), daß Φ auf U eine offene Einbettung $U \to W$ induziert. Außerdem ist $U \neq \emptyset$, da $V_0 \cap U \neq \emptyset$ ist.
Wir setzen $S_0 = p(U)$; dann ist S_0 eine Umgebung von 0 in S und U_t dicht in V_t für alle $t \in S_0$, d. h., es gilt (iii)b).
Insbesondere ist Φ_t birational, und aus dem oben zitierten Resultat aus C. P. Ramanujam [1] folgt dann $H^i(V_t, \omega_{V_t}^{\otimes Nq}) = 0$ für alle $i > 0$, $q > 0$ und nach Basiswechsel (Kap. III, Abschnitt 1) somit auch $R^i p_* \omega_{V|S}^{\otimes Nq} = 0$ für alle $i > 0$, $q > 0$, und $p_*\omega^{\otimes Nq}$ ist daher lokal frei und mit Basiswechsel verträglich, also ist (ii) bewiesen.
Wegen

$$\omega_{V|S_0}^{\otimes Nq} \cong \Phi^*\mathcal{O}_W(q)$$

und

$$p_*\Phi^*\mathcal{O}_W(q) = p_{0*}[(\Phi_*\mathcal{O}_V) \otimes \mathcal{O}_W(q)] = p_{0*}\mathcal{O}_W(q)$$

(mit p_0: $W \to S_0$ Projektion) ist $p_{0*}\mathcal{O}_W(q)$ für alle $q \geqq 0$ lokal frei, und somit ist W S_0-flach ($W = \operatorname{Proj}\left(\sum_{q \geqq 0} p_*\omega_{V|S_0}^{\otimes Nq}\right)$, wenn $N \gg 0$ ist). Bei Basiswechsel $T \to S_0$ ist $W_T = W \times_{S_0} T$ daher das Bild der N-kanonischen Abbildung Φ_T: $V_T \to \mathbf{P}_T(p_{T*}\omega_{V_T|T}^{\otimes N})$ und $(\Phi_T)_*\mathcal{O}_{V_T} = \mathcal{O}_{W_T}$.

Der Beweis für den Fall, daß ω_{V_0} ampel ist, verläuft völlig analog. Man hat dazu nur zu beachten: Wenn $\omega_{V_0}^{\otimes N}$ eine projektive Einbettung definiert, so auch $\omega_{V_0}^{\otimes Nq}$ für $q > 0$. Man kann also $H^i(V_0, \omega_{V_0}^{\otimes Nq}) = 0$ für alle $i > 0$, $q > 0$ annehmen. Die N-kanonische Abbildung Φ ist dann auf V_0 eine abgeschlossene Einbettung. Das gilt dann auch über einer Umgebung von 0, und wir können N so groß wählen, daß $R^i p_* \omega_{V|S}^{\otimes Nq} = 0$ für $i > 0$, $q > 0$ auf dieser Umgebung ist.

Für Mannigfaltigkeiten vom allgemeinen Typ ist die Gruppe der birationalen Transformationen endlich, wie im folgenden präzisiert werden soll.
Es sei V eine glatte Mannigfaltigkeit über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k. Da V normal ist, ist jede birationale Transformation von V auf einer offenen Menge $U \subseteq V$ mit $\operatorname{kodim}(V - U) \geqq 2$ definiert. Daher operiert die Gruppe der birationalen Transformationen (linear) auf jedem der Vektorräume $H^0(V, \omega_V^{\otimes N})$, $N \in \mathbf{Z}$, durch $\eta \mapsto \alpha^*\eta$ (da $H^0(V, \omega_V^{\otimes N}) \to H^0(U, \omega_V^{\otimes N})$ bijektiv ist). Wenn $|\omega_V^{\otimes N}|$ einen birationalen Morphismus Φ: $V \to \mathbf{P}_k^r$ definiert, induziert also jede birationale Transforma-

tion α einen linearen Automorphismus $\bar{\alpha}: \mathbf{P}_k^r \to \mathbf{P}_k^r$, der $\Phi(V)$ auf sich abbildet, und umgekehrt induziert jeder solche lineare Automorphismus eine birationale Transformation α von V. Die Gruppe $B(k)$ aller über k definierten birationalen Transformationen von V besteht also aus den k-rationalen Punkten eines abgeschlossenen Untergruppenschemas von $PGL(r+1)$ (Stabilisator von $\Phi(V) \subseteq \mathbf{P}_k^r$).
Funktoriell läßt sich die Gruppe $B(k)$ wie folgt interpretieren: Wir betrachten die Kategorie der Noetherschen reduzierten Schemata $S, S', \ldots$; es sei $p\colon V \to S$ ein glatter, eigentlicher Morphismus (mit zusammenhängenden Fasern). Außerdem sei für jedes (reduzierte!) S-Schema S' mit $B(S')$ die Gruppe aller birationalen Transformationen α' von $V' =: V \times_S S'$ über S' mit der Eigenschaft, daß der Definitionsbereich von α' und α'^{-1} mit jeder Faser einen nicht leeren Durchschnitt hat, bezeichnet.

Hilfssatz 1. *Jedes $\alpha \in B(S)$ ist in den Punkten x von V mit* $\operatorname{codh} \mathcal{O}_{V,x} \leqq 1$ *definiert.*

Beweis. Es sei $t = p(x) \in S$. Da $\mathcal{O}_{V,x}$ flach über $\mathcal{O}_{S,t}$ ist, ist

$$\operatorname{codh} \mathcal{O}_{V,x} = \operatorname{codh} \mathcal{O}_{V_t,x} + \operatorname{codh} \mathcal{O}_{S,t} = \dim \mathcal{O}_{V_t,x} + \operatorname{codh} \mathcal{O}_{S,t} \leqq 1.$$

Ist $\dim \mathcal{O}_{V_t,x} = 0$, so ist x allgemeiner Punkt in seiner Faser, und somit nach Definition von $B(S)$ jedes $\alpha \in B(S)$ in x definiert.
Ist $\dim \mathcal{O}_{V_t,x} = 1$, so ist $\operatorname{codh} \mathcal{O}_{S,t} = 0$, also $\mathcal{O}_{S,t} = k(t)$ ein Körper (da S reduziert ist) und $\mathcal{O}_{V,x} = \mathcal{O}_{V_t,x}$ ein diskreter Bewertungsring. Daher ist α auch in solchen Punkten definiert, und der Hilfssatz ist bewiesen.
Auf Grund dieses Hilfssatzes erhalten wir, daß für reduzierte $S' = \operatorname{Spec}(R')$ die Gruppe $B(S')$ auf den R'-Moduln $H^0(V', \omega_{V'|S'}^{\otimes N})$ operiert ($N \in \mathbf{Z}$) ($\eta \mapsto \alpha^* \eta$).

Hilfssatz 2. *Es sei N eine natürliche Zahl derart, daß folgendes gilt:*
(1) $H^1(V_t, \omega_{V_t}^{\otimes Nq}) = 0$ *für alle* $t \in S$, $q > 0$.
(2) *Die N-kanonische Abbildung $\Phi\colon V \to P = \mathbf{P}_S(E)$ (mit $E =: p_* \omega_{V|S}^{\otimes N}$) ist ein birationaler Morphismus $V \to W =: \Phi(V) \subseteq P$ mit $\Phi_* \mathcal{O}_V = \mathcal{O}_W$. Dann ist B darstellbar durch ein endliches Untergruppenschema von $PGL(E^\vee)$, ($E^\vee$ duale Garbe zu E).*

Beweis. Es sei o. B. d. A. $S = \operatorname{Spec}(R)$ affin, $H^0(V, \omega_{V|S}^{\otimes N})$ frei vom Rang $r+1$, $S' = \operatorname{Spec}(R')$ ein S-Schema. Für $\alpha \in B(S')$ induziert $\alpha^{*\prime}$ einen linearen Automorphismus $\bar{\alpha}: P \to P$, der $\Phi(V')$ auf sich abbildet, und $\alpha \mapsto \bar{\alpha}$ ist eine natürliche Transformation von Gruppenfunktoren.
Aus der Voraussetzung (1) folgt, daß $p_* \omega_{V|S}^{\otimes Nq}$ lokal frei und mit Basiswechsel verträglich ist, aus (2) folgt

$$p_* \omega_{V|S}^{\otimes Nq} = p_{0*} \Phi_* (\Phi^* \mathcal{O}_W(q)) = p_{0*} (\Phi_* \mathcal{O}_V(q)) = p_{0*} \mathcal{O}_W(q)$$

($p_0\colon W \to S$ Projektion). Also ist W S-flach und $W \times_S S' = \Phi_{S'}(V \times_S S')$. Außerdem ist

$$\begin{tikzcd} V' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\Phi"'] & V' \arrow[d, "\Phi"] \\ W' \arrow[r, "\bar{\alpha}"] & W' \end{tikzcd} \qquad (W' =: W \times_S S')$$

nach Konstruktion von $\bar{\alpha}$ kommutativ und daher α durch $\bar{\alpha}$ eindeutig bestimmt. Somit wird B durch den Stabilisator von W in $PGL(r+1)$ dargestellt.
Um zu zeigen, daß B endlich über S ist, genügt es zu zeigen, daß B eigentlich über S ist. Dazu genügt es zu zeigen (Bewertungskriterium): Ist $S = \operatorname{Spec}(R)$, R ein diskreter Bewertungsring, so läßt sich jede birationale Transformation α_K von V_K ($K = \operatorname{Quot}(R)$) zu einer birationalen Transformation α von V über S fortsetzen.
Da V ein reguläres Schema ist, läßt sich α_K zu einem S-Morphismus $\alpha\colon U \to V$ fortsetzen, der auf einem offenen Unterschema U von V definiert ist, so daß also $\operatorname{kodim}_V(V - U) \geqq 2$ ist. Dann ist für jedes $\eta \in H^0(V, \omega_{V|S}^{\otimes N})$ das inverse Bild $\alpha^*\eta$ auf U und damit auf ganz V definiert, d. h., α^* ist eine R-lineare Abbildung

$$\alpha^*\colon H^0(V, \omega_{V|S}^{\otimes N}) \to H^0(V, \omega_{V|S}^{\otimes N}),$$

und $\alpha^* \otimes_R K = (\alpha_K)^*$ ist ein Isomorphismus.
Analog induziert α_k^{-1} einen S-Morphismus $\alpha'\colon U' \to V$ mit $\operatorname{kodim}_V(V - U') \geqq 2$ und

$$\alpha'^*\colon H^0(V, \omega_{V|S}^{\otimes N}) \to H^0(V, \omega_{V|S}^{\otimes N}),$$

$$\alpha'^* \otimes_R K = (\alpha_K)^{*-1}.$$

Dann ist $(\alpha^* \circ \alpha'^*) \otimes K = \mathrm{id}$, $(\alpha'^* \circ \alpha^*) \otimes K = \mathrm{id}$, also

$$\alpha^* \circ \alpha'^* = \alpha'^* \circ \alpha^* = \mathrm{id},$$

und daher ist α eine birationale Transformation von V, die in den Fasern birational ist. Damit ist gezeigt, daß B ein endliches Gruppenschema über S ist (eigentlich und affin = endlich).

4.4.2. Satz. *Es sei $V \to S$ ein glatter eigentlicher Morphismus. Mit den Bezeichnungen und den Voraussetzungen* (1), (2) *von Hilfssatz* 2 *gilt, wenn $B \subset PGL(E^\vee)$ der Stabilisator von $W \subseteq P$ ist:*

a) *B ist ein endliches Gruppenschema über S.*

b) *Für reduzierte S-Schemata S' ist $B(S')$ die Gruppe aller birationalen Transformationen von $V' = V \times_S S'$ über S', die auch auf allen Fasern birational sind.*

c) *Der Funktor $S' \mapsto \operatorname{Aut}_{S'}(V')$ wird durch ein offenes Untergruppenschema A von B dargestellt, und es gilt $B = A$, wenn $\omega_{V|S}$ ampel relativ S ist.*

d) *Ist $S = \operatorname{Spec}(k)$, k ein Körper, so ist $H^0(V, \Theta_{V|S})$ die zu B und A gehörige Lie-Algebra.*

Aus dem vorigen Hilfssatz folgen a) und b). Jeder Automorphismus α induziert einen linearen Automorphismus von E und somit einen Automorphismus $\bar{\alpha}$ von P, der W auf sich abbildet. Somit gibt es eine kanonische natürliche Transformation $A \to B$. Wir wollen zeigen, daß diese injektiv ist. Es sei also $\bar{\alpha} = \mathrm{id}_W$ und $C =: \operatorname{Kern}(\alpha, \mathrm{id}_V)$; C ist ein abgeschlossenes Unterschema von V, und für jedes S-Schema S' ist $C' = \operatorname{Kern}(\alpha_{S'}, \mathrm{id}_{V'})$. Um zu zeigen, daß $C = \emptyset$ ist, können wir uns also auf den Fall $S = \operatorname{Spec}(R)$, R ein lokaler Artinring, beschränken und induktiv nach der Länge $l(R)$ vorgehen. Für reduzierte S gilt die Behauptung bereits nach dem vorigen Hilfssatz. Es sei $I \cong k =: R/m$ ein einfaches Ideal, $S' = \operatorname{Spec}(R/I)$; nach Induktionsannahme gelte die Behauptung für $V' = V \times_S S'$. Auf dem zugrunde liegenden Raum stimmt α mit id_V überein, und in der Strukturgarbe induziert α eine Abbildung der Form $f \mapsto f + X(f)$, $X\colon \mathcal{O}_V \to I\mathcal{O}_V \cong \mathcal{O}_{V_0}$ (V_0 die abgeschlossene Faser) eine R-Derivation. X verschwindet auf $m\mathcal{O}_V$ (m das Maximalideal von R) und wird daher durch ein glo-

bales Vektorfeld Y von V_0 induziert. Da α auf einer dichten offenen Teilmenge mit id_V übereinstimmt, verschwindet dort das Vektorfeld Y, d. h. aber $Y = 0$ auf ganz V_0, $\alpha = \mathrm{id}_V$.
Somit ist der Funktor $A: S' \mapsto \mathrm{Aut}_{S'}(C')$ ein Subfunktor von B. Es ist allgemein bekannt, daß der Funktor A darstellbar ist. Das folgt z. B. aus M. ARTINS Kriterium (M. ARTIN [3], Thm. 3.4.). Daß A Etalgarbe, von endlicher Darstellung und relativ repräsentierbar ist und jede in einem Punkt t formal etale natürliche Transformation $T \to A$ eines darstellbaren Kofunktors T in A in einer Umgebung von t formal etal ist, folgt unmittelbar daraus, daß A Subfunktor des darstellbaren Funktors B ist. Außerdem können wir o. B. d. A. annehmen, daß S Spektrum eines endlich erzeugten Ringes ist. Um ARTINS Kriterium anzuwenden, müssen wir noch nachweisen, daß A effektiv prorepräsentierbar ist. Offensichtlich ist für jeden Punkt $s \in S$ und jede lokale Noethersche $\mathcal{O}_{S,s}$-Algebra R die kanonische Abbildung $A(\hat{R}) \to \varprojlim_n A(R/m^n)$ bijektiv; ist andererseits $R' \leftarrow R \to R''$ ein Diagramm lokaler Artinscher $\mathcal{O}_{S,s}$-Algebren, $R = R''/I$, so ist

$$\mathcal{O}_{V^*} \otimes (R' \times_R R'') \cong (\mathcal{O}_{V^*} \otimes R') \times_{(\mathcal{O}_{V^*} \otimes R)} (\mathcal{O}_{V^*} \otimes R'')$$

(mit $V^* = V \times_S \mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_{S,s})$, Tensorprodukte sind über $\mathcal{O}_{S,s}$ zu verstehen), da $\mathcal{O}_{V^*}$ flach über $\mathcal{O}_{S,s}$ ist. Also ist

$$A(R' \times_R R'') \to A(R') \times_{A(R)} A(R'')$$

bijektiv; nach M. SCHLESSINGER [1] folgt daher, daß A effektiv prorepräsentierbar ist. Somit ist A durch einen algebraischen Raum darstellbarer Subfunktor von B, also A ein Unterschema von B.
Will man sich im Beweis auf projektive Techniken beschränken, so muß man V als projektiv über S voraussetzen, dann wird A durch das größte Unterschema des Hilbertschemas von $V \times_S V$ dargestellt, über dem die Projektion der universellen Familie G von Unterschemata von $V \times_S V$ auf beide Faktoren ein Isomorphismus ist, G ist dann der Graph des universellen Isomorphismus.
A ist offen in B, da für reduzierte S-Schemata S' und für $\alpha \in B(S')$ die Menge aller $t \in S'$, über denen α ein Automorphismus ist, offen in S' ist. Die letzte Behauptung folgt unmittelbar durch Berechnung von Kern $(A(k[t]/(t^2)) \to A(k))$.
Ist H das Hilbertschema von $\mathbf{P}^r$, $Z \subset \mathbf{P}^r \times H$ die universelle Familie vom Unterschemata, so gibt es einen offenen Unterraum $H_1 \subseteq H$, so daß $Z_1 = Z \mid H_1$ die universelle Familie glatter Unterschemata oder Dimension d ist. Aus dem „see-saw"-Theorem (vgl. Kap. III, Abschnitt 1) folgt, daß die Menge aller Punkte von H_1, über denen $\omega_{Z_1|H_1}^{\otimes N}$ lokal isomorph zu $\mathcal{O}(1)$ ist, ein offenes Unterschema $H_{N,d} \subseteq H_1$ bildet. Es sei $W_{N,r} =: Z_1 \mid H_{N,d}$, dann gilt

4.4.3. Satz. *$W_{N,r} \subset \mathbf{P}^N \times H_{N,d}$ ist die universelle Familie glatter, N-kanonisch eingebetteter d-dimensionaler Unterschemata von $\mathbf{P}^r$ (mit dem N-ten Plurigeschlecht P_N* $= \dim H^0(V, \omega_V^{\otimes N}) = r + 1$).

Es sei $\mathfrak{M}(d, N, r)$ die Klasse aller kompletten singularitätenfreien d-dimensionalen Mannigfaltigkeiten vom allgemeinen Typ, für die $|\omega_V^{\otimes N}|$ eine projektive Einbettung definiert, $H^i(V, \omega_V^{\otimes N}) = 0$ für $i > 0$ und $P_N = r + 1$ ist. Nach Satz 4.4.1. ist die Menge H aller $t \in H_{N,d}$ mit $W_t \in \mathfrak{M}(d, N, r)$ offen in H, und jede Deformation $(V \to S, 0, V_0 \xrightarrow{\sim} W_0)$ eines $W_0 \in \mathfrak{M}(d, N, r)$ wird durch einen Morphismus $S \to H$ durch W induziert ($W =: W_{N,r} \mid H$).

Wir wollen zeigen, daß $W \to H$ in jedem Punkt von H eine verselle Deformation ist. Dazu sei $S = \operatorname{Spec}(A)$, $\bar{S} = \operatorname{Spec}(A/I)$, A ein lokaler Ring, 0 der abgeschlossene Punkt von Spec (A) und $(V \to S, 0, V_0 \xrightarrow{\sim} W_0)$ eine Deformation von $W_0 \in \mathfrak{M}(d, N, r)$, so daß $\bar{V} = V \times_S \bar{S}$ durch einen Morphismus $\bar{S} \to H$ induziert wird. Das bedeutet, daß eine Basis von $H^0\left(\bar{V}, \omega_{\bar{V}|\bar{S}}^{\otimes N}\right)$ ausgezeichnet ist, durch die eine N-kanonische Einbettung von $\bar{V} \mid \bar{S}$ definiert wird.
Wegen

$$H^0\left(\bar{V}, \omega_{\bar{V}|\bar{S}}^{\otimes N}\right) = H^0\left(V, \omega_{V|S}^{\otimes N}\right) \otimes_A \bar{A}$$

kann man diese Basis liften zu einer Basis von $H^0\left(V, \omega_{V|S}^{\otimes N}\right)$; die dadurch definierte N-kanonische Einbettung von $V \mid S$ liefert eine Fortsetzung $S \to H$ von $\bar{S} \to H$, so daß $(V \to S, 0, V_0 \xrightarrow{\sim} W_0)$ dadurch induziert wird. Somit ist gezeigt:

4.4.4. Satz. *Die Familie $W \to H$ induziert in jedem geometrischen Punkt* 0 *von H eine verselle Deformation von W_0.*

Ferner operiert auf H in offensichtlicher Weise die Gruppe $PGL(r+1)$ (induziert durch die natürliche Operation auf $\mathbf{P}^r$). Wenn $H \to S$ ein $PGL(r+1)$-äquivarianter Morphismus ist, wobei $PGL(r+1)$ trivial auf S operiere, so gibt es eine kanonische Abbildung $\nu\colon \mathfrak{sl}(r+1) \otimes \mathcal{O}_H \to \Theta_{H|S}$, deren Bild diejenigen Vektorfelder auf H sind, die tangential zu den Orbits sind. Mit diesen Bezeichnungen gilt

4.4.5. Satz. *Es sei $W_0 \in \mathfrak{M}(d, N, r)$; eine semiuniverselle* (*bzw. formale semiuniverselle*) *Deformation $V \to S$ von W_0* ($S = \operatorname{Spec}(A)$, *$A$ ein lokaler Henselscher bzw. kompletter Ring*) *ist durch folgende Eigenschaften charakterisiert:*

(i) *S ist Retrakt von $H' = H_0^h$ (bzw. $H_0^\wedge$), und ist $\pi\colon H' \to S$ die Retraktionsabbildung, so ist $V \times_S H'$ isomorph zu $W \mid H'$.*

(ii) *π ist $PGL(r+1)$-äquivariant* (*triviale Operation auf S*). *Außerdem ist die kanonische Abbildung*

$$\nu\colon \mathfrak{sl}(r+1) \otimes \mathcal{O}_{H'} \to \Theta_{H'|S'},$$

surjektiv, und π ist (*formal*) *glatt.*

Bemerkungen.

1. Dieser Satz gibt einen Hinweis, wie man semiuniverselle Deformationen bestimmen kann: Man bestimme für $0 \in H$ ein zum Orbit von 0 in H in 0 transversales abgeschlossenes Unterschema S von H und schränke W auf S ein, die so erhaltene Deformation $V \to S$ ist dann ein Kandidat für eine semiuniverselle Deformation von W_0. Dazu kann man außerdem zu Etalumgebungen von 0 übergehen, es müssen dann (i) und (ii) verifiziert werden. Diese Methode hatten wir in 4.3.c) benutzt, und sie wird in 4.5. an einigen weiteren Beispielen illustriert.

2. Die Operation von $PGL(r+1)$ auf H' ist im folgenden Sinne zu interpretieren: Es sei $PGL(r+1)'$ die Henselisierung von $PGL(r+1)$ in e (Einselement) (bzw. Komplettierung). Dann ist $PGL(r+1)'$ „Henselsche" bzw. formale Gruppe, und $H \times PGL(r+1) \to H$ induziert eine Operation $H' \times PGL(r+1)' \to H'$.

3. Im Fall der Charakteristik 0 oder im Fall $d = 1$ ist $H' \to S$ ein $PGL(r+1)'$-Prinzipalbündel, also $\mathfrak{sl}(r+1) \otimes \mathcal{O}_{H'} \cong \Theta_{H'|S'}$. Das gilt infolge von Satz 4.4.2. und da $H^0(V_0, \Theta_{V_0})$ die Liesche Algebra der Automorphismenschemata von V_0 ist.