Zusammenfassend gilt also

4.2.5. Satz. *Die algebraische Familie $V_t \subset \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^2$, definiert durch $x^m v - y^m u = t\, x^k y^{m-k} w$, ist außerhalb $t = 0$ algebraisch trivial, die Fasern V_t, $t \neq 0$, sind isomorph zu $V^{(m-2k)}$. Die Faser V_0 ist isomorph zu $V^{(m)}$, also zu keiner der Fasern V_t, $t \neq 0$, isomorph.*
Die Garben $p_* \Theta_{V|T}$ und $R^1 p_* \Theta_{V|T}$ sind außerhalb $t = 0$ lokal frei vom Rang $m - 2k + 5$, $m - 2k - 1$ (bzw. im Fall $m = 2k$ vom Rang 6 und 0), und

$$\left.\begin{aligned} (p_* \Theta_{V|T}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbf{A}^1,t}} k(t) &\to H^0(V_t, \Theta_t), \\ (R^1 p_* \Theta_{V|T}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbf{A}^1,t}} k(t) &\to H^1(V_t, \Theta_t) \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

sind für $t \neq 0$ Isomorphismen, im Fall $t = 0$ jedoch nicht. Die Kodaira-Spencer-Abbildung ist durch (10) *definiert.*

Dieses Beispiel lehrt unter anderem folgendes:

1. Nehmen wir $m = 2k$, so daß es also keine infinitesimalen Deformationen von $V_t \cong \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ gibt, so kann es dennoch *global* nicht-triviale Deformationen geben.

2. Wenn die Kohomologie $H^1(V_s, \Theta_{V_s})$ einer algebraischen Familie $(V_s)_{s \in S}$ in einem Punkt $s = 0$ einen Sprung macht (d. h., wenn (11) kein Isomorphismus ist in einem Punkt $s = 0$), so ist es möglich, daß die Kodaira-Spencer-Abbildung in diesem Punkt $s \in S$ die Nullabbildung

$$T_s(S) \to H^1(V_s, \Theta_{V_s})$$

induziert, ohne daß die Familie trivial ist. (Zu diesem Zweck betrachte man die durch die Abbildung $s \mapsto s^2$ induzierte Familie V_s, $s \in \mathbf{A}^1$.) Die Ursache für dieses Phänomen ist, daß $R^1 p_* \Theta_{V|S}$ nicht mit Basiswechsel verträglich ist, d. h., daß $s \mapsto \dim H^1(V_s, \Theta_{V_s})$ nicht stetig ist.

4.2.6. Satz. *Die semiuniverselle Deformation der rationalen Fläche $V^{(m)}$ wird definiert durch die Familie*

$$V_t\colon x^m v - y^m u = \sum_{\nu=1}^{m-1} t_\nu x^\nu y^{m-\nu} \omega, \quad t \in \mathbf{A}^{m-1},$$

und den kanonischen Isomorphismus $V_0 \cong V^{(m)}$.

Das kann man beweisen, wenn man die Existenz einer semiuniversellen Deformation schon als bekannt voraussetzt, indem man für die durch die Kodaira-Spencer-Abbildung induzierte Abbildung $T_0\,(\mathbf{A}^{m-1}) \to H^1(V^{(m)}, \Theta_{V^{(m)}})$ zeigt, daß sie ein Isomorphismus ist. Der Beweis ist im wesentlichen derselbe wie für (10).
Dann folgt, daß $\mathbf{A}^{m-1}$ im Nullpunkt und der Raumkeim S, der zur semiuniversellen Deformation gehört, isomorphe Tangentialräume haben, und somit wegen der Singularitätenfreiheit von $\mathbf{A}^{m-1}$, daß S der Keim von $\mathbf{A}^{m-1}$ im Nullpunkt ist. Diese Familie ist auch ein Beispiel für eine semiuniverselle Deformation, die nicht universell ist. (Jedes $\sigma \in GL(m-1)$ induziert bis auf Isomorphie dieselbe Deformation!)

4.3. Algebraische Kurven

Am einfachsten ist hier wieder die Situation für elliptische Kurven und Kurven vom Geschlecht 2. Wir setzen der Einfachheit halber wieder voraus, daß der Grundkörper eine von 2 verschiedene Charakteristik hat und algebraisch abgeschlossen ist.

A. Die Familie

$$E_\lambda\colon y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$$

(inhomogene Koordinaten) ist in jedem $\lambda \neq 0, 1$ universell, und jede elliptische Kurve kommt in dieser Familie vor.

B. Die Familie

$$C_{(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}\colon y^2 = x(x-1)(x^3 - \lambda_1 x^2 + \lambda_2 x - \lambda_3)$$

ist in jedem $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ mit $\lambda_3 \neq 0$, $\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 \neq 1$ und Diskriminante $\neq 0$ universell, und jede Kurve vom Geschlecht 2 kommt in dieser Familie vor.

Zu A. Nach 2.1. wird jede Familie elliptischer Kurven lokal durch eine Gleichung $E_t\colon y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$ definiert, wobei $a = a(t)$, $b = b(t)$ usw. reguläre Funktionen auf dem Parameterraum T sind.
Für $t = 0$ sei $E_0 = E_\lambda$; dann ist insbesondere $a(0) = 1$, und wir können $a = 1$ annehmen. Für $t \neq 0$ hat $x^3 + bx^2 + cx + d$ die einfachen Wurzeln $0, 1, \lambda$, und daher ist in einer Etalumgebung von 0 in T

$$x^3 + bx^2 + cx + d = (x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)$$

mit $e_1(0) = 0$, $e_2(0) = 1$, $e_3(0) = \lambda$. Durch eine Koordinatentransformation erhält man daher

$$E_t\colon y^2 = x(x-1)(x-\lambda'), \qquad \lambda'(0) = \lambda,$$

d. h., die Familie wird durch die Funktion $t \mapsto \lambda'(t)$ induziert, und $\lambda'(t)$ ist dadurch eindeutig bestimmt.

Zu B. Der Beweis ist analog, man benutzt hierzu das Resultat aus 2.2.

C. Kurven vom Geschlecht 3. Wir betrachten Kurven vom Geschlecht 3, die nicht hyperelliptisch sind; nach 2.2. definiert dann die Garbe der Differentialformen ω eine Einbettung in die projektive Ebene $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}(H^0(\omega))$, und da zwischen dem Grad m einer ebenen Kurve und dem Geschlecht p die Relation $p = \dfrac{(m-1)(m-2)}{2}$ besteht, ist jede solcher Kurven vom Geschlecht 3 durch eine biquadratische Form $F(x, y, z) = 0$ definiert.
Umgekehrt definiert jede biquadratische Form $F(X, Y, Z)$ mit $dF \neq 0$ (für $(X, Y, Z) \neq 0$) eine *kanonisch* in $\mathbf{P}^2$ eingebettete Kurve vom Geschlecht 3. Die folgenden Differentiale bilden eine Basis von $H^0(C, \omega)$:

$$\eta_X = \frac{X^3}{F_Z}\, d\left(\frac{Y}{X}\right) = -\frac{X^3}{F_Y}\, d\left(\frac{Z}{X}\right),$$

$$\eta_Y = \frac{Y^3}{F_Z}\, d\left(\frac{X}{Z}\right) = -\frac{Y^3}{F_X}\, d\left(\frac{Z}{Y}\right),$$

$$\eta_Z = \frac{Z^3}{F_Y}\, d\left(\frac{X}{Z}\right) = -\frac{Z^3}{F_X}\, d\left(\frac{Y}{Z}\right).$$

(Man beachte die Relationen $d\left(\dfrac{X}{Z}\right) = -\dfrac{F_Y}{F_X}\, d\left(\dfrac{Y}{Z}\right)$ usw. auf C sowie $d\left(\dfrac{X}{Z}\right) = -\dfrac{X^2}{Z^2}\, d\left(\dfrac{Z}{X}\right)$ usw.)

Auf der offenen Menge $X \neq 0$ ist z. B.

$$\eta_Y = -\frac{X^3 Y}{F_Z} d\left(\frac{Y}{X}\right) = \frac{X^3 Y}{F_Y} d\left(\frac{Z}{X}\right),$$

$$\eta_Z = -\frac{X^2 Z}{F_Y} d\left(\frac{X}{Z}\right) = \frac{X^3 Z}{F_Z} d\left(\frac{Y}{X}\right),$$

also ist $(\eta_X : \eta_Y : \eta_Z) = (X : -Y : Z)$.

Ist $(C_s)_{s \in S}$ eine algebraische Familie von Kurven (Fasern von $C \xrightarrow{p} S$), so sind $R^1 p_* \omega_{C|S}$ und $p_* \omega_{C|S}$ lokal frei vom Rang p bzw. 1 (vgl. Kap. III, Abschnitt 1), im Fall $p = 3$ erhalten wir also lokal eine Faktorisierung $C \to \mathbf{P}^2 \times S \to S$. Wenn eine Faser C_0 $(0 \in S)$ nicht hyperelliptisch ist, erhalten wir eine Einbettung $C \subset \mathbf{P}^2 \times S$ (S muß eventuell durch eine Umgebung von 0 ersetzt werden!), d. h., C ist die Nullstellenmenge einer Gleichung

$$F(s, X, Y, Z) = 0$$

(Form vierten Grades in X, Y, Z, Koeffizienten aus $\Gamma(S, \mathcal{O}_S)$, $\left(\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}, \frac{\partial F}{\partial Z}\right) \neq (0, 0, 0)$).

Die semiuniverselle Deformation von C_0 muß also, falls sie existiert, durch eine Familie von Formen vierten Grades definiert sein. Wir können annehmen, C_0 sei durch eine Form

$$F_0 = T_0^4 + A_1(T_1, T_2)\, T_0^3 + A_2(T_1, T_2)\, T_0^2 + A_3(T_1, T_2)\, T_0 + A_4(T_1, T_2) = 0$$

definiert.

Die Menge der biquadratischen Formen in T_0, T_1, T_2 bildet einen projektiven Raum $\mathbf{P}^{14}$, auf dem $SL(3)$ in kanonischer Weise operiert. Da C_0 kanonisch in $\mathbf{P}^2$ eingebettet ist und

$$\mathrm{Aut}(C_0)^{\mathrm{opp}} \to GL(H^0(C_0, \omega_{C_0})),$$

$$\sigma \mapsto (\eta \mapsto \sigma^* \eta)$$

injektiv ist, ist jeder Automorphismus von C_0 Einschränkung eines projektiven Automorphismus σ auf C_0, d. h.

$$\mathrm{Aut}(C_0)^{\mathrm{opp}} = \{\sigma \in SL(3),\ F_0^\sigma = \mathrm{const} \cdot F_0\} \bmod \{\pm \mathrm{id}\},$$

und diese Gruppe ist diskret (die Liesche Algebra ist gleich

$$\mathrm{Kern}\ (\mathrm{Aut}_{I_1}(C_0 \times I_1) \to \mathrm{Aut}\ (C_0)) = H^1(C_0, \Theta_{C_0}) = 0$$

nach dem Satz von RIEMANN-ROCH).

Bezeichnen wir mit $B_0 \subseteq \mathbf{P}^{14}$ das Orbit von F_0, so ist also $SL(3) \to B_0$ eine Etalüberlagerung und $\mathfrak{sl}(3) \to T_{F_0}(B_0)$ ein Isomorphismus.

Daher kann man den Tangentialraum in F_0 an B_0, als Unterraum von $\mathbf{P}^{14}$ betrachtet, wie folgt berechnen: Wir betrachten $k[\tau] = k[t]/(t^2)$; dann ist

$$\tau T_{F_0}(B_0) = \{F_0^{\mathrm{id}+\tau X}(T)/F_0^{\mathrm{id}+\tau(X)}(1, 0, 0) - F_0 \mid X \in \mathfrak{sl}(3)\}$$

(den Quotienten bilden wir, um die transformierte Form $F_0^{\mathrm{id}+\tau X}$ wieder so zu normieren, daß der Koeffizient von T_0^4 gleich 1 wird). Setzen wir $X = E_{ij}$ $(i \neq j)$ bzw.