kurve zu $\partial/\partial z_q$ mit dem Anfangswert

$$p\varphi(x, 0) = p(x);$$

also ist

$$p\varphi(x, z) = p(x) + (0, \ldots, 0, z) \quad \text{in } \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_q$$

(Parallele zur „z_q-Achse"). Setzen wir

$$\psi(x) \underset{\text{def}}{=} \varphi(x, -z_q(p(x))),$$

so ist $p\psi(x) \in \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_q \times \{0\}$ (d. h., $\psi(x)$ liegt über der „Ebene" $z_q = 0$); ψ liefert also eine holomorphe Abbildung

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\quad\psi\quad} & V' = p^{-1}(\Delta_1 \times \cdots \times \Delta_{q-1} \times \{0\}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_q & \xrightarrow[\text{Projektion}]{} & \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_{q-1} \times \{0\} \end{array}$$

Durch $x \mapsto (\psi(x), Z_q(p(x))$ erhält man also einen T-Morphismus $V \to V' \times \Delta_q$; das ist ein Isomorphismus (Umkehrung: $(x', z_q) \mapsto \varphi(x', z_q)$).
$V' \to \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_{q-1}$ erfüllt wieder die Voraussetzung und ist daher nach Induktionsvoraussetzung lokal trivial.

4. Beispiele für semiuniverselle Deformationen

4.1. Starre Mannigfaltigkeiten

Ist V eine singularitätenfreie komplette Mannigfaltigkeit, so daß $H^1(V, \Theta_V) = 0$, so gibt es keine infinitesimalen Deformationen erster Ordnung und folglich nur triviale lokale Deformationen.
Beispiele für solche Mannigfaltigkeiten sind die projektiven Räume $\mathbf{P}^n$ bzw. multiprojektiven Räume $\mathbf{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbf{P}^{n_r}$. Die Garbe Θ der Vektorfelder ist hier die folgende Garbe: Es gibt eine kanonische exakte Folge von Vektorbündeln über $V = \mathbf{P}^n = \mathbf{P}(W)$

$$0 \to N \to V \times W \to M \to 0, \quad M = V \times W/N,$$

wobei N dasjenige Unterbündel des trivialen Bündels $V \times W$ ist, dessen Faser im Punkt $p \in V$ die entsprechende Gerade von W ist. Dann ist

$$\Omega_V^1 \cong \mathscr{H}om\,(M, N), \;\; \Theta_V \cong \mathscr{H}om\,(N, M) \cong \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1) \otimes \mathcal{O}(M);$$

also ist

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n} \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1)^{n+1} \to \Theta_{\mathbf{P}^n} \to 0$$

exakt. Hieraus folgt unmittelbar die Behauptung.

4.2. Rationale Flächen

Beispiele für rationale Flächen sind $V = \mathbf{P}^2$, $V = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ und die zu den Vektorbündeln $L^{\otimes m} \oplus I \to \mathbf{P}^1$ ($L \subset \mathbf{P}^1 \times \mathbf{A}^2$ kanonisches Unterbündel des trivialen Bündels, I eindimensionales triviales Bündel) assoziierten projektiven Bündel $\mathbf{P}(L^{\otimes m} \oplus I)$

$= V^{(m)}$, die man auch wie folgt beschreiben kann:

$$V^{(m)} \subset \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^2 =: \text{Menge aller } (x:y,\ u:v:w) \text{ mit}$$

$$x^m v - y^m u = 0. \tag{1}$$

Bekanntlich erhält man auf diese Weise alle relativ minimalen rationalen Flächen; $V^{(1)}$ ist nicht minimal (sondern Aufblasung der projektiven Ebene in einem Punkt). (Vgl. hierzu I. R. SCHAFAREWITSCH u. a. [1].)

Wir zeigen jetzt an einem auf HIRZEBRUCH zurückgehenden Beispiel, daß die Flächen $V^{(m)}$ und $V^{(m-2k)}$ $(2k \leqq m)$ in ein und derselben algebraischen Familie vorkommen, und zwar in folgender:

$$V \subseteq \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^2 \times \mathbf{A}^1 \text{ über } \mathbf{A}^1,$$

definiert durch

$$x^m v - y^m u = t x^k y^{m-k} w. \tag{2}$$

Für $T \neq 0$ sind die Flächen V_t isomorph zu V_1, die definiert ist durch die Gleichung

$$x^m v - y^m u = x^k y^{m-k} w$$

(indem man $(x:y,\ u:v:w) \mapsto (x:y,\ u:v:tw)$, $V_t \xrightarrow{\sim} V_1$ definiert). Also ist über der offenen Menge $U = \mathbf{A}^1 - \{0\}$ die Familie trivial.

Für $t = 0$ erhält man $V_0 \cong V^{(m)}$, d. h., die V_t sind Deformationen von V_0.

4.2.1. Hilfssatz. $V_1 \cong V^{(m-2k)}$.

Wir geben dazu einen Isomorphismus $V^{(m-2k)} \xrightarrow{\Phi} V_1$ an. Wir definieren nun für $(x:y,u:v:w) \in V^{(m-2k)}$

$$\Phi(x:y,\ u:v:w) = (x:y,\ -(x^m vw + x^k y^{m-k} w^2):$$
$$(x^k y^{m-k} uv + y^m vw) : (x^m uv + x^k y^{m-k} uw + x^{m-k} y^k vw + y^m w^2)). \tag{3}$$

Man rechnet direkt nach (am einfachsten, indem man inhomogene Koordinaten benutzt), daß dadurch ein Isomorphismus (über $\mathbf{P}^1$) definiert wird, q. e. d.

Es seien $0, \infty$ die Punkte $(0:1)$, $(1:0)$ auf $\mathbf{P}^1$ und $U_1, U_2 \subseteq V^{(m)}$ die Urbilder der offenen Mengen $\mathbf{P}^1 - \{0\} = \Delta_1$, $\mathbf{P}^1 - \{\infty\} = \Delta_2$ bezüglich der Projektion $V^{(m)} \to \mathbf{P}^1$. Auf Δ_1 benutzen wir die Koordinate $z = x/y$, auf Δ_2 die Koordinate $z' = y/x = 1/z$; wir wollen $H^0(V^{(m)}, \Theta)$, $H^1(V^{(m)}, \Theta)$ sowie die Kodaira-Spencer-Abbildung, die zu der Familie $(V_t)_{t \in \mathbf{A}^1}$ gehört, berechnen.

Aus

$$U_1 \cong \mathbf{P}^1 \times \Delta_1, \quad U_2 \cong \mathbf{P}^1 \times \Delta_2, \quad U_{12} \cong \mathbf{P}^1 \times \Delta_{12}$$
$$(U_{12} =: U_1 \cap U_2, \quad \Delta_{12} =: \Delta_1 \cap \Delta_2)$$

und aus

$$\Theta_{\mathbf{P}^1} \cong \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(2)$$

folgt

$$H^1(U_i, \Theta) = 0; \ i = 1, 2, 12;$$

und daher liefert die Meyer-Vietoris-Sequenz, daß die Folge

$$0 \to H^0(V) \to H^0(U_1) \oplus H^0(U_2) \to H^0(U_{12}) \to H^1(V) \to 0$$

exakt ist (die Koeffizientengarbe Θ in diesen Kohomologiegruppen haben wir in der Schreibweise weggelassen).

Wir benutzen folgende Koordinaten:

$$\text{auf } U_1: z = \frac{x}{y},\ \xi_2 = \frac{v}{w},$$

$$\text{auf } U_2: z' = \frac{y}{x},\ \xi_1 = \frac{u}{w};$$

dann gilt

$$z' = \frac{1}{z} \quad \text{und} \quad \xi_1 = z^m \xi_2,$$

und somit gilt auf $U_1 \cap U_2$

$$\frac{\partial}{\partial z} = -z'^2 \frac{\partial}{\partial z'} + mz' \left(\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1}\right),$$

$$z \frac{\partial}{\partial z} = -z' \frac{\partial}{\partial z'} + m \left(\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1}\right),$$

$$z^2 \frac{\partial}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z'} + m \frac{1}{z'} \left(\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_2} = z'^{-m} \frac{\partial}{\partial \xi_1},$$

$$\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} = \xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1}$$

und

$$\xi_2^2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} = z'^m \left(\xi_1^2 \frac{\partial}{\partial \xi_1}\right).$$

Hieraus folgt (für $m > 0$)

4.2.2. Hilfssatz.

$$H^0(V^{(m)}\, \Theta) = k \frac{\partial}{\partial z} + k \left(z \frac{\partial}{\partial z}\right) + k \left(z^2 \frac{\partial}{\partial z} - mz\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2}\right)$$
$$+ k \left(\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2}\right) + \sum_{i=0}^{m} kz^i \left(\xi_2^2 \frac{\partial}{\partial \xi_2}\right),$$

$$H^1(V^{(m)}, \Theta) = (kz + \cdots + kz^{m-1}) \frac{\partial}{\partial \xi_1} \pmod{H^0(U_1) \oplus H^0(U_2)},$$

also

$$\dim H^0(V^{(m)}, \Theta) = m + 5,$$
$$\dim H^1(V^{(m)}, \Theta) = m - 1.$$

Auf ähnliche Weise berechnet man $p_* \Theta_{V|\mathbf{A}^1}$ und $R^1 p_* \Theta_{V|\mathbf{A}^1}$. Dazu seien W_1, W_2 die offenen Mengen in V, in denen $x \neq 0$ bzw. $y \neq 0$ ist und $W_{12} = W_1 \cap W_2$.
Mit denselben Koordinaten wie oben ist

$$z' = \frac{1}{z},\ \xi_1 = z^m \xi_2 - z^k t$$

und somit

$$\frac{\partial}{\partial z} = -z'^2 \frac{\partial}{\partial z'} + (m-k)\frac{t}{z'^{k-1}}\frac{\partial}{\partial \xi_1} + mz'\left(\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1}\right),$$

$$z\frac{\partial}{\partial z} = -z'\frac{\partial}{\partial z'} + (m-k)\frac{t}{z'^{k-2}}\frac{\partial}{\partial \xi_1} + m\left(\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1}\right),$$

$$z^2\frac{\partial}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z'} + (m-k)\frac{t}{z'^{k-3}}\frac{\partial}{\partial \xi_1} + \frac{m}{z'}\left(\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_2} = z^m \frac{\partial}{\partial \xi_1} = \frac{1}{z'^m}\frac{\partial}{\partial \xi_1},$$

$$\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} = \frac{t}{z'^k}\frac{\partial}{\partial \xi_1} + \xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1},$$

$$\xi_2^2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} = t^2 z'^{m-2k}\frac{\partial}{\partial \xi_1} + 2tz'^{m-k}\left(\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1}\right) + z'^m\left(\xi_1^2 \frac{\partial}{\partial \xi_1}\right).$$

Es sei η ein globales Vektorfeld aus $\Theta_{V|\mathbf{A}^1}$; auf W_1 hat η die Form

$$\eta = G\frac{\partial}{\partial z} + A_0 \frac{\partial}{\partial \xi_2} + A_1\left(\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2}\right) + A_2\left(\xi_2^2 \frac{\partial}{\partial \xi_2}\right)$$

(G, A_0, A_1, A_2 Polynome in t und z); auf W_2 gilt dann

$$\begin{aligned}\eta = &-(z'^2 G)\frac{\partial}{\partial z}\\ &+\left[(m-k)\frac{t}{z'^{k-1}}G + \frac{A_0}{z'^m} + \frac{tA_1}{z'^k} + t^2 z'^{m-2k}A_2\right]\frac{\partial}{\partial \xi_1}\\ &+[mz'G + A_1 + 2tz'^{m-k}A_2]\left(\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1}\right)\\ &+z'^m A_2\left(\xi_1^2 \frac{\partial}{\partial \xi_1}\right).\end{aligned}$$

Wir setzen

$$A_2 = B_2 + z^{m-2k+1}\, C_2 + z^{m-k+1}\, D_2, \tag{4}$$

so daß B_2 (bzw. C_2) höchstens vom Grad $m-2k$ (bzw. $k-1$) in z ist. Da $z'^m A_2$ Polynom in z' sein muß, ist dann auch D_2 höchstens vom Grad $k-1$.
Ferner sei

$$G = G_1 + z^2 C(t) = a(t) + zb(t) + z^2 c(t)$$

($a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ Polynome in t). Der Vergleich mit dem Koeffizienten von $\xi_1 \cdot (\partial/\partial \xi_1)$ ergibt dann ($d(t)$ Polynom in t)

$$A_1 = d(t) - mc(t)z - 2t\, zD_2 \tag{5}$$

und mit dem Koeffizienten von $\partial/\partial\xi_1$, wenn $k > 1$ ist,

$$\begin{aligned}-z^m A_0 &= (m-k)\, tz^{k-1}\, G + t^2(zC_2 + z^{k+1}D_2) + tz^k(d(t) - mc(t)\, z - 2t^2\, zD_2)\\ &= (m-k)\, ta(t)\, z^{k-1} + [(m-k)\, tb(t) + td(t)]\, z^k - ktc(t)\, z^{k+1} + t^2 z(C_2 - z^k D_2).\end{aligned}$$

Im Fall $m > 2k$ ist $A_0 = 0$ und

$$z^k D_2 - C_2 = (m-k)\, f(t)\, z^{k-2} + g(t)\, z^{k-1} - kh(t)\, z^k, \tag{6}$$

$$a(t) = tf(t), \quad c(t) = th(t), \quad (m-k)\, b(t) + d(t) = tg(t). \tag{7}$$

Im Fall $m = 2k$ ist

$$A_0 = t^2 a_0(t), \quad D_2 = a_0(t)\, z^{k-1} + E_2 \text{ mit } \deg_z E_2 < k-1, \tag{8}$$

$$z^k E_2 - C_2 = (m-k)\, f(t)\, z^{k-2} + g(t)\, z^{k-1} - kh(t)\, z^k; \tag{9}$$

f, g, h wie in (7). Somit ergibt sich

4.2.3. Hilfssatz. *$p_* \Theta_{V|\mathbf{A}^1}$ wird über $\mathcal{O}_{\mathbf{A}^1}$ durch $m - 2k + 5$ Vektorfelder (falls $m > 2k$) bzw. durch sechs Vektorfelder (falls $m = 2k$) erzeugt, die außerhalb $t = 0$ ein freies Erzeugendensystem bilden.*

Beweis. Die Erzeugenden entsprechend der Wahl von $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$, $b(t)$ in (7) (bzw. $a_0(t)$ in (8)) und von

$$B_2 = p_0(t) + p_1(t)\, z + \cdots + p_{m-2k}(t)\, z^{m-2k}$$

in (4), da nach (4), (5), (6), (8) und (9) dadurch eindeutig bestimmte Vektorfelder definiert werden. Diese bilden nur in $t = 0$ einen Vektorraum der Dimension $< m - 2k + 5$ (bzw. 6).
Analog ergibt sich

4.2.4. Hilfssatz. *$R^1 p_* \Theta_{V|\mathbf{A}^1}$ wird über $\mathcal{O}_{\mathbf{A}^1}$ durch die Klassen von*

$$z^\nu \frac{\partial}{\partial \xi_1} (\operatorname{mod} p_* \Theta_{W_1|\mathbf{A}^1} + p_* \Theta_{W_2|\mathbf{A}^1}), \quad \nu = 1, \ldots, m-1,$$

erzeugt, und $R^1 p_* \Theta_{V|\mathbf{A}^1}$ wird durch die folgenden Relationen definiert:

$$t^2 z^\nu \frac{\partial}{\partial \xi_1} = 0 \qquad \text{für} \qquad 1 \leqq \nu \leqq 2k,\ \nu \neq k,$$

$$t z^k \frac{\partial}{\partial \xi_1} = 0.$$

Also ist $R^1{}_{p_*} \Theta_{V|\mathbf{A}^1}$ außerhalb $t = 0$ frei vom Rang $m - 2k - 1$ (bzw. 0, falls $m = 2k$ ist).

Korollar. *Außerhalb $t = 0$ ist für $m > 2k$ $p_* \Theta_{V|\mathbf{A}^1}$ bzw. $R^1 p_* \Theta_{V|\mathbf{A}^1}$ lokal frei vom Rang $m - 2k + 5$ bzw. $m - 2k - 1$ und*

$$(R^i p_* \Theta_{V|\mathbf{A}^1})_t \otimes k(t) \cong H^i(V_t, \Theta_t), \quad i = 0, 1.$$

Für $m = 2k$ gilt das analoge mit dem Rang 6 bzw. 0.

Benutzen wir auf W_1 die Koordinaten z, ξ_2, t und auf W_2 die Koordinaten z', ξ_1, t, so liefern in diesen Koordinatensystemen $\partial/\partial t$ Liftungen von $\partial/\partial t \in \Theta_{\mathbf{A}^1}$, und benutzen wir auf W_{12} die Koordinaten z, ξ_1, t, so ergibt sich, daß die Differenz beider Liftungen gleich $z^k \cdot \partial/\partial \xi_1$ ist. Somit ist die Kodaira-Spencer-Abbildung von $V \mid T$ durch

$$\frac{\partial}{\partial t} \mapsto z^k \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\operatorname{mod} \sum_{\nu=1}^{k-1} \mathcal{O} t^2 \left(z^\nu \frac{\partial}{\partial \xi_1}\right) + \mathcal{O} t \left(z^k \frac{\partial}{\partial \xi_1}\right) + \sum_{\nu=k+1}^{2k} \mathcal{O} t^2 \left(z^\nu \frac{\partial}{\partial \xi_1}\right)\right) \tag{10}$$

definiert.

Zusammenfassend gilt also

4.2.5. Satz. *Die algebraische Familie* $V_t \subset \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^2$, *definiert durch* $x^m v - y^m u = t\, x^k y^{m-k} w$, *ist außerhalb* $t = 0$ *algebraisch trivial, die Fasern* V_t, $t \neq 0$, *sind isomorph zu* $V^{(m-2k)}$. *Die Faser* V_0 *ist isomorph zu* $V^{(m)}$, *also zu keiner der Fasern* V_t, $t \neq 0$, *isomorph.*
Die Garben $p_* \Theta_{V|T}$ *und* $R^1 p_* \Theta_{V|T}$ *sind außerhalb* $t = 0$ *lokal frei vom Rang* $m - 2k + 5$, $m - 2k - 1$ (*bzw. im Fall* $m = 2k$ *vom Rang* 6 *und* 0), *und*

$$\left.\begin{array}{l} (p_* \Theta_{V|T}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbf{A}^1,t}} k(t) \to H^0(V_t, \Theta_t)\,, \\ (R^1 p_* \Theta_{V|T}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbf{A}^1,t}} k(t) \to H^1(V_t, \Theta_t) \end{array}\right\} \tag{11}$$

sind für $t \neq 0$ *Isomorphismen, im Fall* $t = 0$ *jedoch nicht. Die Kodaira-Spencer-Abbildung ist durch* (10) *definiert.*

Dieses Beispiel lehrt unter anderem folgendes:

1. Nehmen wir $m = 2k$, so daß es also keine infinitesimalen Deformationen von $V_t \cong \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ gibt, so kann es dennoch *global* nicht-triviale Deformationen geben.

2. Wenn die Kohomologie $H^1(V_s, \Theta_{V_s})$ einer algebraischen Familie $(V_s)_{s \in S}$ in einem Punkt $s = 0$ einen Sprung macht (d. h., wenn (11) kein Isomorphismus ist in einem Punkt $s = 0$), so ist es möglich, daß die Kodaira-Spencer-Abbildung in diesem Punkt $s \in S$ die Nullabbildung

$$T_s(S) \to H^1(V_s, \Theta_{V_s})$$

induziert, ohne daß die Familie trivial ist. (Zu diesem Zweck betrachte man die durch die Abbildung $s \mapsto s^2$ induzierte Familie V_s, $s \in \mathbf{A}^1$.) Die Ursache für dieses Phänomen ist, daß $R^1 p_* \Theta_{V|S}$ nicht mit Basiswechsel verträglich ist, d. h., daß $s \mapsto \dim H^1(V_s, \Theta_{V_s})$ nicht stetig ist.

4.2.6. Satz. *Die semiuniverselle Deformation der rationalen Fläche* $V^{(m)}$ *wird definiert durch die Familie*

$$V_t\colon x^m v - y^m u = \sum_{\nu=1}^{m-1} t_\nu x^\nu y^{m-\nu} \omega, \quad t \in \mathbf{A}^{m-1},$$

und den kanonischen Isomorphismus $V_0 \cong V^{(m)}$.

Das kann man beweisen, wenn man die Existenz einer semiuniversellen Deformation schon als bekannt voraussetzt, indem man für die durch die Kodaira-Spencer-Abbildung induzierte Abbildung $T_0\,(\mathbf{A}^{m-1}) \to H^1(V^{(m)}, \Theta_{V^{(m)}})$ zeigt, daß sie ein Isomorphismus ist. Der Beweis ist im wesentlichen derselbe wie für (10).
Dann folgt, daß $\mathbf{A}^{m-1}$ im Nullpunkt und der Raumkeim S, der zur semiuniversellen Deformation gehört, isomorphe Tangentialräume haben, und somit wegen der Singularitätenfreiheit von $\mathbf{A}^{m-1}$, daß S der Keim von $\mathbf{A}^{m-1}$ im Nullpunkt ist. Diese Familie ist auch ein Beispiel für eine semiuniverselle Deformation, die nicht universell ist. (Jedes $\sigma \in GL(m-1)$ induziert bis auf Isomorphie dieselbe Deformation!)

4.3. Algebraische Kurven

Am einfachsten ist hier wieder die Situation für elliptische Kurven und Kurven vom Geschlecht 2. Wir setzen der Einfachheit halber wieder voraus, daß der Grundkörper eine von 2 verschiedene Charakteristik hat und algebraisch abgeschlossen ist.

A. Die Familie

$$E_\lambda\colon y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$$

(inhomogene Koordinaten) ist in jedem $\lambda \neq 0, 1$ universell, und jede elliptische Kurve kommt in dieser Familie vor.

B. Die Familie

$$C_{(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}\colon y^2 = x(x-1)(x^3 - \lambda_1 x^2 + \lambda_2 x - \lambda_3)$$

ist in jedem $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ mit $\lambda_3 \neq 0$, $\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 \neq 1$ und Diskriminante $\neq 0$ universell, und jede Kurve vom Geschlecht 2 kommt in dieser Familie vor.

Zu A. Nach 2.1. wird jede Familie elliptischer Kurven lokal durch eine Gleichung $E_t\colon y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$ definiert, wobei $a = a(t)$, $b = b(t)$ usw. reguläre Funktionen auf dem Parameterraum T sind.
Für $t = 0$ sei $E_0 = E_\lambda$; dann ist insbesondere $a(0) = 1$, und wir können $a = 1$ annehmen. Für $t \neq 0$ hat $x^3 + bx^2 + cx + d$ die einfachen Wurzeln $0, 1, \lambda$, und daher ist in einer Etalumgebung von 0 in T

$$x^3 + bx^2 + cx + d = (x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)$$

mit $e_1(0) = 0$, $e_2(0) = 1$, $e_3(0) = \lambda$. Durch eine Koordinatentransformation erhält man daher

$$E_t\colon y^2 = x(x-1)(x-\lambda'), \qquad \lambda'(0) = \lambda,$$

d. h., die Familie wird durch die Funktion $t \mapsto \lambda'(t)$ induziert, und $\lambda'(t)$ ist dadurch eindeutig bestimmt.

Zu B. Der Beweis ist analog, man benutzt hierzu das Resultat aus 2.2.

C. Kurven vom Geschlecht 3. Wir betrachten Kurven vom Geschlecht 3, die nicht hyperelliptisch sind; nach 2.2. definiert dann die Garbe der Differentialformen ω eine Einbettung in die projektive Ebene $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}(H^0(\omega))$, und da zwischen dem Grad m einer ebenen Kurve und dem Geschlecht p die Relation $p = \dfrac{(m-1)(m-2)}{2}$ besteht, ist jede solcher Kurven vom Geschlecht 3 durch eine biquadratische Form $F(x, y, z) = 0$ definiert.
Umgekehrt definiert jede biquadratische Form $F(X, Y, Z)$ mit $dF \neq 0$ (für $(X, Y, Z) \neq 0$) eine *kanonisch* in $\mathbf{P}^2$ eingebettete Kurve vom Geschlecht 3. Die folgenden Differentiale bilden eine Basis von $H^0(C, \omega)$:

$$\eta_X = \frac{X^3}{F_Z}\, d\left(\frac{Y}{X}\right) = -\frac{X^3}{F_Y}\, d\left(\frac{Z}{X}\right),$$

$$\eta_Y = \frac{Y^3}{F_Z}\, d\left(\frac{X}{Z}\right) = -\frac{Y^3}{F_X}\, d\left(\frac{Z}{Y}\right),$$

$$\eta_Z = \frac{Z^3}{F_Y}\, d\left(\frac{X}{Z}\right) = -\frac{Z^3}{F_X}\, d\left(\frac{Y}{Z}\right).$$

(Man beachte die Relationen $d\left(\dfrac{X}{Z}\right) = -\dfrac{F_Y}{F_X}\, d\left(\dfrac{Y}{Z}\right)$ usw. auf C sowie $d\left(\dfrac{X}{Z}\right) = -\dfrac{X^2}{Z^2}\, d\left(\dfrac{Z}{X}\right)$ usw.)

Auf der offenen Menge $X \neq 0$ ist z. B.

$$\eta_Y = -\frac{X^3 Y}{F_Z}\, d\left(\frac{Y}{X}\right) = \frac{X^3 Y}{F_Y}\, d\left(\frac{Z}{X}\right),$$

$$\eta_Z = -\frac{X^2 Z}{F_Y}\, d\left(\frac{X}{Z}\right) = \frac{X^3 Z}{F_Z}\, d\left(\frac{Y}{X}\right),$$

also ist $(\eta_X : \eta_Y : \eta_Z) = (X : -Y : Z)$.

Ist $(C_s)_{s\in S}$ eine algebraische Familie von Kurven (Fasern von $C \xrightarrow{p} S$), so sind $R^1 p_* \omega_{C|S}$ und $p_* \omega_{C|S}$ lokal frei vom Rang p bzw. 1 (vgl. Kap. III, Abschnitt 1), im Fall $p = 3$ erhalten wir also lokal eine Faktorisierung $C \to \mathbf{P}^2 \times S \to S$. Wenn eine Faser C_0 $(0 \in S)$ nicht hyperelliptisch ist, erhalten wir eine Einbettung $C \subset \mathbf{P}^2 \times S$ (S muß eventuell durch eine Umgebung von 0 ersetzt werden!), d. h., C ist die Nullstellenmenge einer Gleichung

$$F(s, X, Y, Z) = 0$$

(Form vierten Grades in X, Y, Z, Koeffizienten aus $\Gamma(S, \mathcal{O}_S)$, $\left(\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}, \frac{\partial F}{\partial Z}\right) \neq (0, 0, 0)$).

Die semiuniverselle Deformation von C_0 muß also, falls sie existiert, durch eine Familie von Formen vierten Grades definiert sein. Wir können annehmen, C_0 sei durch eine Form

$$F_0 = T_0^4 + A_1(T_1, T_2)\, T_0^3 + A_2(T_1, T_2)\, T_0^2 + A_3(T_1, T_2)\, T_0 + A_4(T_1, T_2) = 0$$

definiert.

Die Menge der biquadratischen Formen in T_0, T_1, T_2 bildet einen projektiven Raum $\mathbf{P}^{14}$, auf dem $SL(3)$ in kanonischer Weise operiert. Da C_0 kanonisch in $\mathbf{P}^2$ eingebettet ist und

$$\mathrm{Aut}(C_0)^{\mathrm{opp}} \to GL(H^0(C_0, \omega_{C_0})),$$

$$\sigma \mapsto (\eta \mapsto \sigma^* \eta)$$

injektiv ist, ist jeder Automorphismus von C_0 Einschränkung eines projektiven Automorphismus σ auf C_0, d. h.

$$\mathrm{Aut}(C_0)^{\mathrm{opp}} = \{\sigma \in SL(3),\ F_0^\sigma = \mathrm{const} \cdot F_0\} \bmod \{\pm \mathrm{id}\},$$

und diese Gruppe ist diskret (die Liesche Algebra ist gleich

$$\mathrm{Kern}\ (\mathrm{Aut}_{I_1}(C_0 \times I_1) \to \mathrm{Aut}\ (C_0)) = H^1(C_0, \Theta_{C_0}) = 0$$

nach dem Satz von RIEMANN-ROCH).

Bezeichnen wir mit $B_0 \subseteq \mathbf{P}^{14}$ das Orbit von F_0, so ist also $SL(3) \to B_0$ eine Etalüberlagerung und $\mathfrak{sl}(3) \to T_{F_0}(B_0)$ ein Isomorphismus.

Daher kann man den Tangentialraum in F_0 an B_0, als Unterraum von $\mathbf{P}^{14}$ betrachtet, wie folgt berechnen: Wir betrachten $k[\tau] = k[t]/(t^2)$; dann ist

$$\tau T_{F_0}(B_0) = \{F_0^{\mathrm{id}+\tau X}(T)/F_0^{\mathrm{id}+\tau(X)}(1, 0, 0) - F_0 \mid X \in \mathfrak{sl}(3)\}$$

(den Quotienten bilden wir, um die transformierte Form $F_0^{\mathrm{id}+\tau X}$ wieder so zu normieren, daß der Koeffizient von T_0^4 gleich 1 wird). Setzen wir $X = E_{ij}$ $(i \neq j)$ bzw.

$E_{11} - E_{00}$, $E_{22} - E_{00}$ (E_{pq} = Matrix mit den Koeffizienten $x_{ij} = \delta_{ip}\delta_{jq}$), so erhalten wir die folgende Basis von $T_{F_0})B_0)$ (wegen

$$F_0^{\mathrm{id}+\tau X}(T) = F_0(T) + \tau\,[F_{0T_0}(T)\,(x_{00}T_0 + x_{10}T_1 + x_{20}T_2)$$
$$+ F_{0T_1}(T)\,(x_{01}T_0 + x_{11}T_1 + x_{21}T_2) + \cdots]$$

und

$$F_0^{\mathrm{id}+\tau X}\,(1, 0, 0)^{-1} = 1 - \tau[4x_{00} + a_1x_{01} + a_2x_{02}],$$

wenn $A_1(T_1, T_2) = a_1T_1 + a_2T_2$):

$$U_{01} = F_{0T_1} \cdot T_0 - a_1F_0, \qquad U_{10} = F_{0T_0} \cdot T_1,$$
$$U_{02} = F_{0T_2} \cdot T_0 - a_2F_0, \qquad U_{20} = F_{0T_0} \cdot T_2,$$
$$U_{12} = F_{0T_2} \cdot T_1, \qquad U_{21} = F_{0T_1} \cdot T_2,$$
$$U_{11} = F_{0T_1}T_1 - F_{0T_0} \cdot T_0 + 4F_0, \qquad U_{22} = F_{0T_2} \cdot T_2 - F_{0T_0} \cdot T_0 + 4F_0.$$

Setzen wir noch $U_{00} = T_0^4$ und ergänzen diese neun linear unabhängigen Formen vom Grad 4 zu einer Basis, durch Formen $G_1, \ldots, G_6$ (in denen o. B. d. A. T_0^4 nicht vorkommt), so gilt

4.3.1. Satz. *Die durch* $F(t, T) = F_0(T) + t_1G_1(T) + \cdots + t_6G_6(T) = 0$ *definierte Familie* C_t, $t \in \mathbf{A}^6$ *ist semiuniversell im Punkt* 0 (*und in jedem Punkt* t_0, *in dem* $G_1, \ldots, G_6$ *transversal zum Orbit von* $F(t_0, T)$ *in* $\mathbf{P}^{14}$ *sind*).

Beispiel.

$$F_0 = T_0^4 + T_1^4 + T_2^4,$$
$$F(t, T) = F_0(T) + t_1T_0^2T_1^2 + t_2T_0^2T_1T_2 + t_3T_0^2T_2^2$$
$$+ t_4T_0T_1^2T_2 + t_5T_0T_1T_2^2 + t_6T_1^2T_2^2.$$

Der Beweis des Satzes folgt daraus, daß $SL(3) \times \mathbf{A}^6 \to \mathbf{P}^{14}$, $(\sigma, F) \mapsto F^\sigma$, in einer Umgebung von (id, F_0) ein Etalmorphismus ist ($\mathbf{A}^6$ wird hier identifiziert mit $\{F_0 + t_1G_1 + \cdots + t_6G_6 = F\}$) und weil jede Familie $(C_s)_{s\in S}$, in der C_0 vorkommt, lokal in $s = 0$ durch eine Form $F(s, T) = 0$ mit $F(0, T) = F_0(T)$ definiert wird.

4.4. Mannigfaltigkeiten vom allgemeinen Typ

Eine komplette singularitätenfreie Mannigfaltigkeit V heißt *von allgemeinem Typ*, wenn das N-kanonische Linearsystem $|\omega_V^{\otimes N}|$ ($\omega_V = \Omega_V^n$, $n = \dim V$) für ein $N > 0$ eine birationale Abbildung definiert. Für dim $V = 1$ sind das die Kurven vom Geschlecht $\geqq 2$; für dim $V = 2$ sind die folgenden Typen von Flächen nicht vom allgemeinen Typ: Regelflächen, Enriquesche Flächen, $K3$-Flächen, abelsche Flächen und Flächen mit einem elliptischen Büschel (vgl. etwa I. R. Schafarewitsch u. a.[1]). Ein vollständiger Durchschnitt $V \subset \mathbf{P}^r$ von Hyperflächen $H_1, \ldots, H_{r-n}$ vom Grad $m_1, \ldots, m_{r-n}$ ist genau dann vom allgemeinen Typ, wenn $m_1 + \cdots + m_{r-n} > n + 1$ ist (wegen $\omega_V \cong \mathcal{O}_V(m_1 + \cdots + m_{n-r} - n - 1)$).

B. G. Moišezon hat in seinem Vortrag in Nizza 1970 die Vermutung geäußert, daß alle Deformationen von Mannigfaltigkeiten vom allgemeinen Typ wieder von allgemeinem Typ sind. Wir wollen das hier beweisen unter der einschränkenden Voraussetzung, daß $|\omega_V^{\otimes N}|$ für ein $N > 0$ keine Basispunkte hat. Alle Basisschemata S, T usw. werden als noethersch vorausgesetzt.

4.4.1. Satz. *Es sei $V \xrightarrow{p} S$ glatt und eigentlich, $0 \in S$ und V_0 eine projektive algebraische Mannigfaltigkeit vom allgemeinen Typ mit der oben erwähnten Voraussetzung. Ist S von der Charakteristik 0 (bzw. ω_{V_0} ampel), so gibt es eine Umgebung S_0 von 0 in S und eine natürliche Zahl $N > 0$, so daß folgendes gilt:*

(i) $p^* p_* \omega^{\otimes N} \to \omega^{\otimes N}$ *ist surjektiv über S_0.*

(ii) $R^i p_* \omega^{\otimes Nq} = 0$ *für alle $i > 0$ und $q > 0$, und $p_* \omega^{\otimes Nq}$ ist lokal frei und mit Basiswechsel verträglich.*

(iii) *Ist $\Phi\colon V|S_0 \to \mathbf{P}_{S_0}(p_* \omega^{\otimes N}|S_0)$ die N-kanonische Abbildung, $W \subseteq \mathbf{P}_{S_0}(p_* \omega^{\otimes N}|S_0)$ das Bild von $V \mid S_0$, so gilt:*

a) *W ist S_0-flach, und für alle S_0-Schemata T ist $(\Phi_T)_* \mathcal{O}_{V_T} = \mathcal{O}_{W_T}$.*

b) *Es gibt ein offenes Unterschema $U \subseteq V \mid S_0$, so daß U_t dicht in V_t ist für alle $t \in S_0$; Φ induziert eine offene Einbettung $U \to W$ (bzw. Φ ist ein Isomorphismus $V \xrightarrow{\sim} W$).*

Beweis. Zunächst sei S von der Charakteristik 0. Für ein $N > 0$ hat nach Voraussetzung das Linearsystem $|\omega_{V_0}^{\otimes N}|$ keine Basispunkte und definiert einen birationalen projektiven Morphismus, das gleiche gilt auch für alle $|\omega_{V_0}^{\otimes Nq}|$, $q > 0$. Nach einem Satz von C. P. RAMANUJAM [1] (Theorem 3) ist dann $H^j(V_0, \omega_{V_0}^{\otimes -m}) = 0$ für $j = 0, \ldots, n-1$ und alle $m > 0$; aus Dualitätsgründen (vgl. z. B. Kap. III, Abschnitt 2) ist also $H^i(V_0, \omega_{V_0}^{\otimes m}) = 0$ für alle $i \geqq 1$ und $m > 1$.
Für $N > 1$ ist dann in einer Umgebung von 0 auch $R^i p_* \omega_{V|S}^{\otimes N} = 0$ für alle $i \geqq 1$ und $p_* \omega_{V|S}^{\otimes N}$ frei und mit Basiswechsel verträglich (Basiswechsel, vgl. z. B. Kap. III, Abschnitt 1). Da der kanonische Morphismus $p^* p_* \omega_{V|S}^{\otimes N} \to \omega_{V|S}^{\otimes N}$ auf V_0 surjektiv ist, hat sein Kokern einen zu V_0 disjunkten Träger F und ist daher zu $p^{-1}(S - p(F))$ disjunkt.
Insgesamt gibt es also zu jedem $Nq > 1$ eine Umgebung von 0, über der $p_* \omega_{V|S}^{\otimes Nq}$ lokal frei und mit Basiswechsel verträglich ist, die höheren direkten Bilder verschwinden und $p^* p_* \omega_{V|S}^{\otimes Nq} \to \omega_{V|S}^{\otimes Nq}$ surjektiv ist.
Wir zeigen, daß für $q \gg 0$ die Nq-kanonische Abbildung

$$V_0 \xrightarrow{\Phi_q} \mathbf{P}(H^0(V_0, \omega_{V_0}^{\otimes Nq})$$

die Eigenschaft $(\Phi_q)_* \mathcal{O}_{V_0} = \mathcal{O}_{W_q}$ (mit $W_q =: \Phi_q(V_0)$) hat. Es sei $\eta_0, \ldots, \eta_r$ eine Basis von $H^0(V_0, \omega_{V_0}^{\otimes N})$ und V_{0i} die offene Teilmenge von V_0, auf der η_i keine Nullstellen hat, $V_0 = V_{00} \cup V_{01} \cup \cdots \cup V_{0r}$.
Für jedes q sei W_{qi} die offene Teilmenge in W_q, die durch $\eta_i^q \neq 0$ definiert ist. Dann ist $W_{q0}, \ldots, W_{qr}$ eine affine Überdeckung von W_q und $\Phi_q^{-1} W_{qi} = V_{0i}$. Ist jetzt z. B. f eine auf V_{00} reguläre Funktion, so ist $f\eta_0^q$ für $q \gg 0$ eine auf ganz V reguläre qN-fache Differentialform, also $f \in H^0(W_{q0}, \mathcal{O}_{W_q})$. Da $H^0(V_{0i}, \mathcal{O}_{V_0})$ endlich über $H^0(W_{1i}, \mathcal{O}_{W_1})$ ist, folgt daher für $q \gg 0$ die Beziehung $\Phi_q * \mathcal{O}_{V_0} = \mathcal{O}_{W_q}$.
Wir ersetzen N durch qN für ein solches q und zeigen, daß für $q \gg 0$ in einer Umgebung von 0 die Behauptungen (i), (ii), und (iii) gelten. Indem wir S gegebenenfalls verkleinern, können wir annehmen, daß auf S die Behauptung (i) gilt und (ii) für $q = 1$.
Es sei $\mathscr{C}$ der Kokern von $\mathcal{O}_W \to \Phi_* \mathcal{O}_V$. Wir zeigen, daß $\operatorname{supp} \mathscr{C} \cap W_0 = \emptyset$ ist, so daß also $\mathcal{O}_W \to \Phi_* \mathcal{O}_V$ surjektiv über einer Umgebung von 0 ist. Dazu sei $S = \operatorname{Spec}(R)$ Spektrum eines lokalen Ringes und 0 sein abgeschlossener Punkt.

Wir können annehmen (Noethersche Induktion), daß für jeden echten Restklassenring R' von R der Morphismus $\mathcal{O}_W \to \Phi_*(\mathcal{O}_V \otimes_R R')$ bereits surjektiv ist. Es sei $r \neq 0$ ein Element aus m_R, $I = \mathrm{ann}_R(r)$. Da $\mathcal{O}_V$ R-flach ist, ist

$$0 \to \mathcal{O}_V/I\mathcal{O}_V \xrightarrow{r} \mathcal{O}_V \to \mathcal{O}_V/r\mathcal{O}_V \to 0$$

exakt; also sind in dem folgenden kommutativen Diagramm die Zeilen exakt:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to \Phi_*(\mathcal{O}_V/I\mathcal{O}_V) & \xrightarrow{r} & \Phi_*\mathcal{O}_V & \to & \Phi_*(\mathcal{O}_V/r\mathcal{O}_V) & \to 0 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ \mathcal{O}_W & \xrightarrow{r} & \mathcal{O}_W & \longrightarrow & \mathcal{O}_W/r\mathcal{O}_W & \to 0 \end{array}$$

(da der rechte vertikale Pfeil ein Epimorphismus ist).

Hieraus folgt sofort, daß $\mathcal{O}_W \to \Phi_*\mathcal{O}_V$ surjektiv ist, also $\operatorname{supp} \mathcal{C} \cap W_0 = \emptyset$.

Wir können also jetzt $\Phi_*\mathcal{O}_V = \mathcal{O}_W$ annehmen. Ist $U \subset V$ die offene Menge der Punkte, in denen Φ quasiendlich ist, so folgt aus Zariskis Hauptsatz (in der Formulierung z. B. aus H. Kurke, G. Pfister und M. Roczen [1]), daß Φ auf U eine offene Einbettung $U \to W$ induziert. Außerdem ist $U \neq \emptyset$, da $V_0 \cap U \neq \emptyset$ ist.

Wir setzen $S_0 = p(U)$; dann ist S_0 eine Umgebung von 0 in S und U_t dicht in V_t für alle $t \in S_0$, d. h., es gilt (iii)b).

Insbesondere ist Φ_t birational, und aus dem oben zitierten Resultat aus C. P. Ramanujam [1] folgt dann $H^i(V_t, \omega_{V_t}^{\otimes Nq}) = 0$ für alle $i > 0$, $q > 0$ und nach Basiswechsel (Kap. III, Abschnitt 1) somit auch $R^i p_* \omega_{V|S}^{\otimes Nq} = 0$ für alle $i > 0$, $q > 0$, und $p_*\omega^{\otimes Nq}$ ist daher lokal frei und mit Basiswechsel verträglich, also ist (ii) bewiesen.

Wegen

$$\omega_{V|S_0}^{\otimes Nq} \cong \Phi^*\mathcal{O}_W(q)$$

und

$$p_*\Phi^*\mathcal{O}_W(q) = p_{0*}[(\Phi_*\mathcal{O}_V) \otimes \mathcal{O}_W(q)] = p_{0*}\mathcal{O}_W(q)$$

(mit $p_0\colon W \to S_0$ Projektion) ist $p_{0*}\mathcal{O}_W(q)$ für alle $q \geqq 0$ lokal frei, und somit ist W S_0-flach ($W = \operatorname{Proj}\left(\sum_{q \geqq 0} p_*\omega_{V|S_0}^{\otimes Nq}\right)$, wenn $N \gg 0$ ist). Bei Basiswechsel $T \to S_0$ ist $W_T = W \times_{S_0} T$ daher das Bild der N-kanonischen Abbildung $\Phi_T\colon V_T \to \mathbf{P}_T(p_{T*}\omega_{V_T|T}^{\otimes N})$ und $(\Phi_T)_*\mathcal{O}_{V_T} = \mathcal{O}_{W_T}$.

Der Beweis für den Fall, daß ω_{V_0} ampel ist, verläuft völlig analog. Man hat dazu nur zu beachten: Wenn $\omega_{V_0}^{\otimes N}$ eine projektive Einbettung definiert, so auch $\omega_{V_0}^{\otimes Nq}$ für $q > 0$. Man kann also $H^i(V_0, \omega_{V_0}^{\otimes Nq}) = 0$ für alle $i > 0$, $q > 0$ annehmen. Die N-kanonische Abbildung Φ ist dann auf V_0 eine abgeschlossene Einbettung. Das gilt dann auch über einer Umgebung von 0, und wir können N so groß wählen, daß $R^i p_*\omega_{V|S}^{\otimes Nq} = 0$ für $i > 0$, $q > 0$ auf dieser Umgebung ist.

Für Mannigfaltigkeiten vom allgemeinen Typ ist die Gruppe der birationalen Transformationen endlich, wie im folgenden präzisiert werden soll.

Es sei V eine glatte Mannigfaltigkeit über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k. Da V normal ist, ist jede birationale Transformation von V auf einer offenen Menge $U \subseteq V$ mit $\operatorname{kodim}(V - U) \geqq 2$ definiert. Daher operiert die Gruppe der birationalen Transformationen (linear) auf jedem der Vektorräume $H^0(V, \omega_V^{\otimes N})$, $N \in \mathbf{Z}$, durch $\eta \mapsto \alpha^*\eta$ (da $H^0(V, \omega_V^{\otimes N}) \to H^0(U, \omega_V^{\otimes N})$ bijektiv ist). Wenn $|\omega_V^{\otimes N}|$ einen birationalen Morphismus $\Phi\colon V \to \mathbf{P}_k^r$ definiert, induziert also jede birationale Transforma-

tion α einen linearen Automorphismus $\bar{\alpha}$: $\mathbf{P}_k^r \to \mathbf{P}_k^r$, der $\Phi(V)$ auf sich abbildet, und umgekehrt induziert jeder solche lineare Automorphismus eine birationale Transformation α von V. Die Gruppe $B(k)$ aller über k definierten birationalen Transformationen von V besteht also aus den k-rationalen Punkten eines abgeschlossenen Untergruppenschemas von $PGL(r+1)$ (Stabilisator von $\Phi(V) \subseteq \mathbf{P}_k^r$).
Funktoriell läßt sich die Gruppe $B(k)$ wie folgt interpretieren: Wir betrachten die Kategorie der Noetherschen reduzierten Schemata $S, S', \ldots$; es sei $p\colon V \to S$ ein glatter, eigentlicher Morphismus (mit zusammenhängenden Fasern). Außerdem sei für jedes (reduzierte!) S-Schema S' mit $B(S')$ die Gruppe aller birationalen Transformationen α' von $V' =: V \times_S S'$ über S' mit der Eigenschaft, daß der Definitionsbereich von α' und α'^{-1} mit jeder Faser einen nicht leeren Durchschnitt hat, bezeichnet.

Hilfssatz 1. *Jedes $\alpha \in B(S)$ ist in den Punkten x von V mit* codh $\mathcal{O}_{V,x} \leqq 1$ *definiert.*

Beweis. Es sei $t = p(x) \in S$. Da $\mathcal{O}_{V,x}$ flach über $\mathcal{O}_{S,t}$ ist, ist

$$\operatorname{codh} \mathcal{O}_{V,x} = \operatorname{codh} \mathcal{O}_{V_t,x} + \operatorname{codh} \mathcal{O}_{S,t} = \dim \mathcal{O}_{V_t,x} + \operatorname{codh} \mathcal{O}_{S,t} \leqq 1 .$$

Ist $\dim \mathcal{O}_{V_t,x} = 0$, so ist x allgemeiner Punkt in seiner Faser, und somit nach Definition von $B(S)$ jedes $\alpha \in B(S)$ in x definiert.
Ist $\dim \mathcal{O}_{V_t,x} = 1$, so ist codh $\mathcal{O}_{S,t} = 0$, also $\mathcal{O}_{S,t} = k(t)$ ein Körper (da S reduziert ist) und $\mathcal{O}_{V,x} = \mathcal{O}_{V_t,x}$ ein diskreter Bewertungsring. Daher ist α auch in solchen Punkten definiert, und der Hilfssatz ist bewiesen.
Auf Grund dieses Hilfssatzes erhalten wir, daß für reduzierte $S' = \operatorname{Spec}(R')$ die Gruppe $B(S')$ auf den R'-Moduln $H^0(V', \omega_{V'|S'}^{\otimes N})$ operiert ($N \in \mathbf{Z}$) ($\eta \mapsto \alpha^*\eta$).

Hilfssatz 2. *Es sei N eine natürliche Zahl derart, daß folgendes gilt:*

(1) $H^1(V_t, \omega_{V_t}^{\otimes Nq}) = 0$ *für alle* $t \in S$, $q > 0$.

(2) *Die N-kanonische Abbildung Φ: $V \to P = \mathbf{P}_S(E)$ (mit $E =: p_*\omega_{V|S}^{\otimes N}$) ist ein birationaler Morphismus $V \to W =: \Phi(V) \subseteq P$ mit $\Phi_*\mathcal{O}_V = \mathcal{O}_W$. Dann ist B darstellbar durch ein endliches Untergruppenschema von $PGL(E^\vee)$, ($E^\vee$ duale Garbe zu E).*

Beweis. Es sei o. B. d. A. $S = \operatorname{Spec}(R)$ affin, $H^0(V, \omega_{V|S}^{\otimes N})$ frei vom Rang $r+1$, $S' = \operatorname{Spec}(R')$ ein S-Schema. Für $\alpha \in B(S')$ induziert $\alpha^{*\prime}$ einen linearen Automorphismus $\bar{\alpha}: P \to P$, der $\Phi(V')$ auf sich abbildet, und $\alpha \mapsto \bar{\alpha}$ ist eine natürliche Transformation von Gruppenfunktoren.
Aus der Voraussetzung (1) folgt, daß $p_*\omega_{V|S}^{\otimes Nq}$ lokal frei und mit Basiswechsel verträglich ist, aus (2) folgt

$$p_*\omega_{V|S}^{\otimes Nq} = p_{0*}\Phi_*(\Phi^*\mathcal{O}_W(q)) = p_{0*}(\Phi_*\mathcal{O}_V(q)) = p_{0*}\mathcal{O}_W(q)$$

(p_0: $W \to S$ Projektion). Also ist W S-flach und $W \times_S S' = \Phi_{S'}(V \times_S S')$. Außerdem ist

$$\begin{array}{ccc} V' & \xrightarrow{\alpha} & V' \\ \downarrow{\scriptstyle\Phi} & & \downarrow{\scriptstyle\Phi} \\ W' & \xrightarrow{\bar{\alpha}} & W' \end{array} \qquad (W' =: W \times_S S')$$

nach Konstruktion von $\bar{\alpha}$ kommutativ und daher α durch $\bar{\alpha}$ eindeutig bestimmt. Somit wird B durch den Stabilisator von W in $PGL(r+1)$ dargestellt.
Um zu zeigen, daß B endlich über S ist, genügt es zu zeigen, daß B eigentlich über S ist. Dazu genügt es zu zeigen (Bewertungskriterium): Ist $S = \operatorname{Spec}(R)$, R ein diskreter Bewertungsring, so läßt sich jede birationale Transformation α_K von V_K ($K = \operatorname{Quot}(R)$) zu einer birationalen Transformation α von V über S fortsetzen.
Da V ein reguläres Schema ist, läßt sich α_K zu einem S-Morphismus $\alpha\colon U \to V$ fortsetzen, der auf einem offenen Unterschema U von V definiert ist, so daß also $\operatorname{kodim}_V (V - U) \geqq 2$ ist. Dann ist für jedes $\eta \in H^0(V, \omega_{V|S}^{\otimes N})$ das inverse Bild $\alpha^*\eta$ auf U und damit auf ganz V definiert, d. h., α^* ist eine R-lineare Abbildung

$$\alpha^*\colon H^0(V, \omega_{V|S}^{\otimes N}) \to H^0(V, \omega_{V|S}^{\otimes N}),$$

und $\alpha^* \otimes_R K = (\alpha_K)^*$ ist ein Isomorphismus.
Analog induziert α_k^{-1} einen S-Morphismus $\alpha'\colon U' \to V$ mit $\operatorname{kodim}_V (V - U') \geqq 2$ und

$$\alpha'^*\colon H^0(V, \omega_{V|S}^{\otimes N}) \to H^0(V, \omega_{V|S}^{\otimes N}),$$

$$\alpha'^* \otimes_R K = (\alpha_K)^{*-1}.$$

Dann ist $(\alpha^* \circ \alpha'^*) \otimes K = \mathrm{id}$, $(\alpha'^* \circ \alpha^*) \otimes K = \mathrm{id}$, also

$$\alpha^* \circ \alpha'^* = \alpha'^* \circ \alpha^* = \mathrm{id},$$

und daher ist α eine birationale Transformation von V, die in den Fasern birational ist. Damit ist gezeigt, daß B ein endliches Gruppenschema über S ist (eigentlich und affin = endlich).

4.4.2. Satz. *Es sei $V \to S$ ein glatter eigentlicher Morphismus. Mit den Bezeichnungen und den Voraussetzungen* (1), (2) *von Hilfssatz* 2 *gilt, wenn $B \subset PGL(E^\vee)$ der Stabilisator von $W \subseteq P$ ist:*

a) *B ist ein endliches Gruppenschema über S.*

b) *Für reduzierte S-Schemata S' ist $B(S')$ die Gruppe aller birationalen Transformationen von $V' = V \times_S S'$ über S', die auch auf allen Fasern birational sind.*

c) *Der Funktor $S' \mapsto \operatorname{Aut}_{S'}(V')$ wird durch ein offenes Untergruppenschema A von B dargestellt, und es gilt $B = A$, wenn $\omega_{V|S}$ ampel relativ S ist.*

d) *Ist $S = \operatorname{Spec}(k)$, k ein Körper, so ist $H^0(V, \Theta_{V|S})$ die zu B und A gehörige Lie-Algebra.*

Aus dem vorigen Hilfssatz folgen a) und b). Jeder Automorphismus α induziert einen linearen Automorphismus von E und somit einen Automorphismus $\bar{\alpha}$ von P, der W auf sich abbildet. Somit gibt es eine kanonische natürliche Transformation $A \to B$. Wir wollen zeigen, daß diese injektiv ist. Es sei also $\bar{\alpha} = \mathrm{id}_W$ und $C =: \operatorname{Kern}(\alpha, \mathrm{id}_V)$; C ist ein abgeschlossenes Unterschema von V, und für jedes S-Schema S' ist $C' = \operatorname{Kern}(\alpha_{S'}, \mathrm{id}_{V'})$. Um zu zeigen, daß $C = \emptyset$ ist, können wir uns also auf den Fall $S = \operatorname{Spec}(R)$, R ein lokaler Artinring, beschränken und induktiv nach der Länge $l(R)$ vorgehen. Für reduzierte S gilt die Behauptung bereits nach dem vorigen Hilfssatz. Es sei $I \cong k =: R/m$ ein einfaches Ideal, $S' = \operatorname{Spec}(R/I)$; nach Induktionsannahme gelte die Behauptung für $V' = V \times_S S'$. Auf dem zugrunde liegenden Raum stimmt α mit id_V überein, und in der Strukturgarbe induziert α eine Abbildung der Form $f \mapsto f + X(f)$, $X\colon \mathcal{O}_V \to I\mathcal{O}_V \cong \mathcal{O}_{V_0}$ (V_0 die abgeschlossene Faser) eine R-Derivation. X verschwindet auf $m\mathcal{O}_V$ (m das Maximalideal von R) und wird daher durch ein glo-

bales Vektorfeld Y von V_0 induziert. Da α auf einer dichten offenen Teilmenge mit id_V übereinstimmt, verschwindet dort das Vektorfeld Y, d. h. aber $Y = 0$ auf ganz V_0, $\alpha = \mathrm{id}_V$.
Somit ist der Funktor $A: S' \mapsto \mathrm{Aut}_{S'}(C')$ ein Subfunktor von B. Es ist allgemein bekannt, daß der Funktor A darstellbar ist. Das folgt z. B. aus M. ARTINS Kriterium (M. ARTIN [3], Thm. 3.4.). Daß A Etalgarbe, von endlicher Darstellung und relativ repräsentierbar ist und jede in einem Punkt t formal etale natürliche Transformation $T \to A$ eines darstellbaren Kofunktors T in A in einer Umgebung von t formal etal ist, folgt unmittelbar daraus, daß A Subfunktor des darstellbaren Funktors B ist. Außerdem können wir o. B. d. A. annehmen, daß S Spektrum eines endlich erzeugten Ringes ist. Um ARTINS Kriterium anzuwenden, müssen wir noch nachweisen, daß A effektiv prorepräsentierbar ist. Offensichtlich ist für jeden Punkt $s \in S$ und jede lokale Noethersche $\mathcal{O}_{S,s}$-Algebra R die kanonische Abbildung $A(\hat{R}) \to \varprojlim_n A(R/m^n)$ bijektiv; ist andererseits $R' \leftarrow R \to R''$ ein Diagramm lokaler Artinscher $\mathcal{O}_{S,s}$-Algebren, $R = R''/I$, so ist

$$\mathcal{O}_{V^*} \otimes (R' \times_R R'') \cong (\mathcal{O}_{V^*} \otimes R') \times_{(\mathcal{O}_{V^*} \otimes R)} (\mathcal{O}_{V^*} \otimes R'')$$

(mit $V^* = V \times_S \mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_{S,s})$, Tensorprodukte sind über $\mathcal{O}_{S,s}$ zu verstehen), da $\mathcal{O}_{V^*}$ flach über $\mathcal{O}_{S,s}$ ist. Also ist

$$A(R' \times_R R'') \to A(R') \times_{A(R)} A(R'')$$

bijektiv; nach M. SCHLESSINGER [1] folgt daher, daß A effektiv prorepräsentierbar ist. Somit ist A durch einen algebraischen Raum darstellbarer Subfunktor von B, also A ein Unterschema von B.
Will man sich im Beweis auf projektive Techniken beschränken, so muß man V als projektiv über S voraussetzen, dann wird A durch das größte Unterschema des Hilbertschemas von $V \times_S V$ dargestellt, über dem die Projektion der universellen Familie G von Unterschemata von $V \times_S V$ auf beide Faktoren ein Isomorphismus ist, G ist dann der Graph des universellen Isomorphismus.
A ist offen in B, da für reduzierte S-Schemata S' und für $\alpha \in B(S')$ die Menge aller $t \in S'$, über denen α ein Automorphismus ist, offen in S' ist. Die letzte Behauptung folgt unmittelbar durch Berechnung von Kern $(A(k[t]/(t^2)) \to A(k))$.
Ist H das Hilbertschema von $\mathbf{P}^r$, $Z \subset \mathbf{P}^r \times H$ die universelle Familie vom Unterschemata, so gibt es einen offenen Unterraum $H_1 \subseteq H$, so daß $Z_1 = Z \mid H_1$ die universelle Familie glatter Unterschemata oder Dimension d ist. Aus dem „see-saw"-Theorem (vgl. Kap. III, Abschnitt 1) folgt, daß die Menge aller Punkte von H_1, über denen $\omega^{\otimes N}_{Z_1|H_1}$ lokal isomorph zu $\mathcal{O}(1)$ ist, ein offenes Unterschema $H_{N,d} \subseteq H_1$ bildet. Es sei $W_{N,r} =: Z_1 \mid H_{N,d}$, dann gilt

4.4.3. Satz. $W_{N,r} \subset \mathbf{P}^N \times H_{N,d}$ *ist die universelle Familie glatter, N-kanonisch eingebetteter d-dimensionaler Unterschemata von* $\mathbf{P}^r$ *(mit dem N-ten Plurigeschlecht P_N* $= \dim H^0(V, \omega_V^{\otimes N}) = r + 1$).

Es sei $\mathfrak{M}(d, N, r)$ die Klasse aller kompletten singularitätenfreien d-dimensionalen Mannigfaltigkeiten vom allgemeinen Typ, für die $|\omega_V^{\otimes N}|$ eine projektive Einbettung definiert, $H^i(V, \omega_V^{\otimes N}) = 0$ für $i > 0$ und $P_N = r + 1$ ist. Nach Satz 4.4.1. ist die Menge H aller $t \in H_{N,d}$ mit $W_t \in \mathfrak{M}(d, N, r)$ offen in H, und jede Deformation $(V \to S, 0, V_0 \xrightarrow{\sim} W_0)$ eines $W_0 \in \mathfrak{M}(d, N, r)$ wird durch einen Morphismus $S \to H$ durch W induziert $(W =: W_{N,r} \mid H)$.

Wir wollen zeigen, daß $W \to H$ in jedem Punkt von H eine verselle Deformation ist. Dazu sei $S = \operatorname{Spec}(A)$, $\bar{S} = \operatorname{Spec}(A/I)$, A ein lokaler Ring, 0 der abgeschlossene Punkt von Spec (A) und $(V \to S, 0, V_0 \xrightarrow{\sim} W_0)$ eine Deformation von $W_0 \in \mathfrak{M}(d, N, r)$, so daß $\bar{V} = V \times_S \bar{S}$ durch einen Morphismus $\bar{S} \to H$ induziert wird. Das bedeutet, daß eine Basis von $H^0\left(\bar{V}, \omega_{\bar{V}|\bar{S}}^{\otimes N}\right)$ ausgezeichnet ist, durch die eine N-kanonische Einbettung von $\bar{V} \mid \bar{S}$ definiert wird.
Wegen

$$H^0\left(\bar{V}, \omega_{\bar{V}|\bar{S}}^{\otimes N}\right) = H^0\left(V, \omega_{V|S}^{\otimes N}\right) \otimes_A \bar{A}$$

kann man diese Basis liften zu einer Basis von $H^0\left(V, \omega_{V|S}^{\otimes N}\right)$; die dadurch definierte N-kanonische Einbettung von $V \mid S$ liefert eine Fortsetzung $S \to H$ von $\bar{S} \to H$, so daß $(V \to S, 0, V_0 \xrightarrow{\sim} W_0)$ dadurch induziert wird. Somit ist gezeigt:

4.4.4. Satz. *Die Familie $W \to H$ induziert in jedem geometrischen Punkt* 0 *von H eine verselle Deformation von W_0.*

Ferner operiert auf H in offensichtlicher Weise die Gruppe $PGL(r+1)$ (induziert durch die natürliche Operation auf $\mathbf{P}^r$). Wenn $H \to S$ ein $PGL(r+1)$-äquivarianter Morphismus ist, wobei $PGL(r+1)$ trivial auf S operiere, so gibt es eine kanonische Abbildung $\nu\colon \mathfrak{sl}(r+1) \otimes \mathcal{O}_H \to \Theta_{H|S}$, deren Bild diejenigen Vektorfelder auf H sind, die tangential zu den Orbits sind. Mit diesen Bezeichnungen gilt

4.4.5. Satz. *Es sei $W_0 \in \mathfrak{M}(d, N, r)$; eine semiuniverselle (bzw. formale semiuniverselle) Deformation $V \to S$ von W_0 ($S = \operatorname{Spec}(A)$, A ein lokaler Henselscher bzw. kompletter Ring) ist durch folgende Eigenschaften charakterisiert:*

(i) *S ist Retrakt von $H' = H_0^h$ (bzw. $H_0^\wedge$), und ist $\pi\colon H' \to S$ die Retraktionsabbildung, so ist $V \times_S H'$ isomorph zu $W \mid H'$.*

(ii) *π ist $PGL(r+1)$-äquivariant (triviale Operation auf S). Außerdem ist die kanonische Abbildung*

$$\nu\colon \mathfrak{sl}(r+1) \otimes \mathcal{O}_{H'} \to \Theta_{H'|S'},$$

surjektiv, und π ist (formal) glatt.

Bemerkungen.

1. Dieser Satz gibt einen Hinweis, wie man semiuniverselle Deformationen bestimmen kann: Man bestimme für $0 \in H$ ein zum Orbit von 0 in H in 0 transversales abgeschlossenes Unterschema S von H und schränke W auf S ein, die so erhaltene Deformation $V \to S$ ist dann ein Kandidat für eine semiuniverselle Deformation von W_0. Dazu kann man außerdem zu Etalumgebungen von 0 übergehen, es müssen dann (i) und (ii) verifiziert werden. Diese Methode hatten wir in 4.3.c) benutzt, und sie wird in 4.5. an einigen weiteren Beispielen illustriert.

2. Die Operation von $PGL(r+1)$ auf H' ist im folgenden Sinne zu interpretieren: Es sei $PGL(r+1)'$ die Henselisierung von $PGL(r+1)$ in e (Einselement) (bzw. Komplettierung). Dann ist $PGL(r+1)'$ „Henselsche" bzw. formale Gruppe, und $H \times PGL(r+1) \to H$ induziert eine Operation $H' \times PGL(r+1)' \to H'$.

3. Im Fall der Charakteristik 0 oder im Fall $d = 1$ ist $H' \to S$ ein $PGL(r+1)'$-Prinzipalbündel, also $\mathfrak{sl}(r+1) \otimes \mathcal{O}_{H'} \cong \Theta_{H'|S'}$. Das gilt infolge von Satz 4.4.2. und da $H^0(V_0, \Theta_{V_0})$ die Liesche Algebra der Automorphismenschemata von V_0 ist.

Beweis von Satz 4.4.5. Zunächst gelte für $V \to S$ die Bedingung (i) und (ii). Aus (i) folgt sofort, daß $V \to S$ versell ist. Es bleibt daher zu zeigen, daß für zwei Tangentialvektoren $\alpha: I_1 \to S$, $\beta: I_1 - S$ ($I_1 = \operatorname{Spec}(k[t]/(t^2))$, k der Definitionskörper von W_0) folgendes gilt: Sind $\alpha^*(V)$ und $\beta^*(V)$ (als Deformationen von W_0) isomorph, so ist $\alpha = \beta$. Da V durch W induziert wird und da für zwei N-kanonische Einbettungen $V', V'' \subset \mathbf{P}^r \times I_1$ mit $V_0' = V_0'' = W_0$ jeder I_1-Isomorphismus $V' \xrightarrow{\sim} V''$, der auf W_0 die Identität induziert, durch einen projektiven Automorphismus $\mathrm{id} + tX \in PGL(r+1)'(I_1)$ induziert wird ($X \in \mathfrak{sl}(r+1, k)$), ist

$$i_*(\alpha) = i_*(\beta) + \nu(X)$$

($i: S \to H'$ Einbettung), also ist $\alpha = \pi_* i_*(\alpha) = \beta = \pi_* i_*(\beta)$.

Es sei umgekehrt $V \to S$ semiuniversell. Dann gibt es eine Abbildung $\pi: H' \to S$, so daß $W \mid H' \cong V \times_S H'$ (als Deformation von W_0) ist, deren Tangentialabbildung π^* eindeutig bestimmt ist. Da $W \to H$ versell ist, gibt es andererseits einen Morphismus $j: S \to H'$, durch den V aus W induziert wird, und $\pi \circ j$ ist dann ein Morphismus $S \to S$, durch den V aus V induziert wird und dessen Tangentialabbildung demzufolge die Identität ist. Daher ist $\pi \circ j$ ein Automorphismus von S, und $i =: j \circ (\pi \circ j)^{-1}$: $S \to H'$ ist ein Schnitt von π, also gilt (i).

Ist $\mathscr{D}$ der Funktor der infinitesimalen Deformationen von W_0, so ist

$$H_0^\wedge \times_{S^\wedge} H_0^\wedge \subseteq H_0^\wedge \times_{\mathscr{D}} H_0^\wedge,$$

und wegen $(H_0^\wedge \times_S H_0^\wedge)(I_1) = (H_0^\wedge \times_{\mathscr{D}} H_0^\wedge)(I_1)$ ist

$$H_0^\wedge \times_{S^\wedge} H_0^\wedge = H_0^\wedge \times_{\mathscr{D}} H_0^\wedge.$$

Andererseits ist $H_0^\wedge \times_{\mathscr{D}} H_0^\wedge$ das Bild von $H_0^\wedge \times PGL(r+1)^\wedge$ in $H_0^\wedge \times H_0^\wedge$, und somit erfüllt $H_0^\wedge \to S_0^\wedge$ die Bedingung (ii). Das gilt dann auch bereits für $H' \to S$ (im Henselschen Fall), also gilt (ii).

Daß $H' \to S$ (formal) glatt ist, folgt aus der Tatsache, daß $W \mid H' \to H'$ versell ist. Um zu zeigen, daß ν surjektiv ist, genügt es nach dem Lemma von NAKAYAMA zu zeigen, daß

$$\mathfrak{sl}(r+1) \to (T_{H'|S})_0$$

surjektiv ist. Das bedeutet: Wenn $V_1 \subseteq \mathbf{P}^N \times I_1$ ($I_1 = \operatorname{Spec} k[t]/(t^2)$), I_1-glatt mit der speziellen Faser $V_0 \subset V_1$ gegeben ist und als Deformation isomorph zu $V_0 \times I_1$ ist, so gibt es ein $g = 1 + tX$ ($X \in \mathfrak{sl}(r+1)$), d. h. aus $PGL(r+1)(I_1)$ über 1, das über dem $V_1 \subseteq \mathbf{P}^N \times I_1$ entsprechenden Punkt von $(T_{H'|S})_0$ liegt.

Die Isomorphie von V_1 mit $V_0 \times I_1$ induziert auf V_0 die identische Abbildung, und da beide Schemata V_1 und $V_0 \times I_1$ N-kanonisch in $\mathbf{P}^r \times I_1$ eingebettet sind, ist jeder Isomorphismus durch einen I_1-Isomorphismus $\mathbf{P}^r \times I_1 \xrightarrow{g} \mathbf{P}^r \times I_1$ induziert, g ist daher von der Form $1 + tX$. Damit ist Satz 4.4.5. bewiesen.

4.5. Kurven vom Geschlecht 4 und 5

Wir illustrieren Satz 4.4.5. an Kurven vom Geschlecht 4 und 5. Ein Beispiel dazu hatten wir schon in 4.3.C. betrachtet. Wir betrachten Kurven vom Geschlecht 4 und 5, die kanonisch in den projektiven Raum eingebettet sind.

Der Grad einer kanonisch eingebetteten Kurve ist $2p - 2$, ferner ist $\dim H^0(\omega^{\otimes n}) = (2n-1)(p-1)$ für $n > 1$ und $\binom{n+p-1}{p-1}$ die Dimension von $H^0(\mathbf{P}^{p-1}, \mathcal{O}\mathbf{P}^{p-1}(n))$.

Hieraus folgt unmittelbar:

(1) Eine kanonisch eingebettete Kurve $C \subset \mathbf{P}^3$ vom Geschlecht 4 ist durch eine quadratische und eine kubische Form definiert (da der Grad des durch eine quadratische und kubische Form definierten Unterschemas gleich 6 ist).

(2) Eine kanonisch eingebettete Kurve $C \subset \mathbf{P}^4$ vom Geschlecht 5 ist durch drei quadratische Formen definiert oder trigonal. Denn $H^0(\mathbf{P}^4, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^4}(2)) \to H^0(C, \mathcal{O}_C(2))$ ist surjektiv ($\mathcal{O}_C(2) = \omega_C^{\otimes 2}$), und es ist

$$\dim H^0(\mathbf{P}^4, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^4}(2)) = 15, \quad \dim H^0(C, \mathcal{O}_C(2)) = 12.$$

Also gibt es drei linear unabhängige quadratische Formen, die auf C verschwinden. Die Formen müssen irreduzibel sein, da C irreduzibel ist und keine Linearform auf C verschwindet. Falls drei derartige linear unabhängige Formen eine Kurve (vom Grad 8) definieren, folgt die erste Behauptung.

Hieraus folgt: Wenn wir $\mathbf{P}^9$ bzw. $\mathbf{P}^{19}$ mit dem Raum der quadratischen bzw. kubischen Formen in vier Unbestimmten T_0, T_1, T_2, T_3 identifizieren und wenn $M_0, \ldots, M_{19}$ die Monome vom Grad 3 in irgendeiner Reihenfolge bezeichnet, so ist das Hilbertschema der kanonischen Kurven $\subseteq \mathbf{P}^3$ gleich

$$H = \bigcup_{0 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq 19} H_{i_1 i_2 i_3 i_4} \subseteq \mathbf{P}^9 \times \mathbf{P}^{19},$$

$$\begin{aligned} H_{i_1 i_2 i_3 i_4} = \{&(F, G) \text{ mit } F \in \mathbf{P}^9, G \in \mathbf{P}^{19}, \operatorname{rg}(dF, dG) = 2, \\ &\operatorname{rg}(T_0F, T_1F, T_2F, T_3F, M_j;\, j \neq i_\nu) = 20, \\ &G \text{ Linearkombination der } M_j,\, j \neq i_\nu\} \\ \subseteq\, &\mathbf{P}^9 \times \mathbf{P}^{15} \text{ (offener Unterraum)} \end{aligned}$$

(wobei $\mathbf{P}^{15}$ hier der von den M_j, $j \neq i_\nu$, aufgespannte Unterraum ist).

Analog erhalten wir, wenn wir mit $\mathbf{P}^{14}$ den Raum der quadratischen Formen in $T_0, \ldots, T_4$ bezeichnen, für das Hilbertschema der nichttrigonalen kanonischen Kurven $\subseteq \mathbf{P}^4$:

$$H = \bigcup H_{I_1 I_2 I_3} \subset \mathbf{P}^{14} \times \mathbf{P}^{14} \times \mathbf{P}^{14},$$

wobei wieder die quadratischen Monome in irgendeiner Reihenfolge $M_0, M_1, \ldots, M_{14}$ angeordnet seien, I_1, I_2, I_3 jeweils Zweiermengen $\{0, \ldots, 14\}$ sind, die disjunkt sind, und H_{I_1, I_2, I_3} wie folgt definiert ist: Es sei L_I der von den M_j, $j \notin I$, aufgespannte Unterraum von $\mathbf{P}^{14}$ ($\dim L_I = 12$). Dann ist

$$\begin{aligned} H_{I_1 I_2 I_3} = \{&(F_1, F_2, F_3) \in L_{I_1} \times L_{I_2} \times L_{I_3};\, \operatorname{rg}(dF_1, dF_2, dF_3) = 3, \\ &F_1, F_2 \text{ und } L_{I_3} \text{ usw. (zyklische Vertauschung) spannen } \mathbf{P}^{19} \text{ auf}\} \\ \subseteq\, &L_{I_1} \times L_{I_2} \times L_{I_3} \text{ (offener Unterraum).} \end{aligned}$$

Hat man jetzt eine Kurve C_0 vom Geschlecht 4 oder 5 gegeben, die sich kanonisch einbetten läßt (also nicht hyperelliptisch ist), so kann man eine Familie von solchen Kurven $(C_s)_{s \in S}$ bestimmen, die die Kurve C_0 (zu dem „Parameterwert" 0) enthält und in einer Umgebung von 0 in jedem Punkt semiuniversell ist.

Man bestimme wie in 4.3.C. den Tangentialraum an das Orbit des C_0 entsprechenden Punktes $h \in H$ (nach Wahl einer kanonischen Einbettung) bezüglich der kanonischen Operation $H \times PGL(N+1) \to H$ ($N = 3$ oder 4) und einen dazu transversalen Unterraum $S \subset H$ (o. B. d. A. S = linearer Unterraum $\cap H$). In allen Punkten, in denen S transversal zum Orbit ist, ist die auf S induzierte Familie von Kurven semiuniversell.