Damit wird $D(V) = D(I_V)$ ein Vektorraum und $V \mapsto D(I_V)$ ein linksexakter Funktor in die Kategorie der Vektorräume. Ist $V = V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ (dim $V_i = 1$), so ist

$$D(I_V) = D(I_{V_1}) \otimes \cdots \otimes D(I_{V_n}) = D(I_1) \otimes V$$

(Basis $e_i \in V_i$ auswählen!), q. e. d.

Damit ergibt sich als erste notwendige Bedingung für die Lösbarkeit von (III):

Forderung 1. $V \mapsto D(I_V)$ ist linksexakt und dim $D(I_1) < \infty$.

Falls eine semiuniverselle Deformation existiert, ist $D(I_1)$ der Tangentialraum $T_\Lambda(\mathcal{A})$.

Ist also dim $D(I_1) = m$, so müßte das gesuchte $\mathcal{A}$ Quotient von $\Lambda\langle\langle x_1, \ldots, x_m\rangle\rangle$ sein. Gewöhnlich kann man $D(I_1)$ als eine geeignete erste Kohomologiegruppe ausdrücken (vgl. etwa 3.3. sowie Kap. II).

(B) Wenn es eine semiuniverselle Deformation (für D) gibt, muß für jedes Diagramm lokaler Artinalgebren $A' \to A/I \leftarrow A$ folgendes gelten:

$$D(A \times_{A/I} A') \to D(A) \times_{D(A/I)} D(A') \text{ ist surjektiv.}$$

Das ist eine Abschwächung der Bedingung „linksexakt".

Für die Lösbarkeit von (III) ergibt sich also als zweite notwendige Bedingung

Forderung 2. Für jedes Diagramm lokaler Artinalgebren $A' \to A/I \leftarrow A$ ist

$$D(A \times_{A/I} A') \to D(A) \times_{D(A/I)} D(A')$$

surjektiv.

Nach einem Kriterium von Schlessinger (vgl. Kap. II) sind diese beiden Forderungen auch hinreichend, um das Problem auf *formaler* Ebene zu lösen. Schließlich folgt aus der *stärkeren*

Forderung 3. D ist linksexakt,

daß der Funktor S prorepräsentierbar in der Kategorie der Artinschen Λ-Algebren ist (vgl. Kap. II).

Wir werden in Abschnitt 4 Beispiele bringen, aus denen folgt, daß hieraus noch nicht die Lösung von (III) folgt.

3.3. Kodaira-Spencer-Abbildung

Beim lokalen Studium von algebraischen oder analytischen Familien spielt eine von Kodaira und Spencer eingeführte Abbildung eine wichtige Rolle, die in gewisser Weise die Abweichung dieser Familie in jedem Punkt von der universellen Familie mißt.

Wir geben hier eine Variante dieser Betrachtungen; eine für Zwecke der Deformationstheorie nützliche Verallgemeinerung geben wir in Kap. II.

Betrachtet werden Familien $V \to T$ von kompletten singularitätenfreien Mannigfaltigkeiten V_t, $t \in T$.

Mit Ω_V bzw. $\Omega_{V|T}$ bezeichnen wir die Garbe der holomorphen 1-Formen bzw. relativen holomorphen 1-Formen, mit Θ_V bzw. $\Theta_{V|T}$ die dazu duale Garbe der Vektorfelder bzw. Vektorfelder längs der Fasern.

Da nach Voraussetzung $V \to T$ glatt ist, haben wir eine exakte Folge

$$0 \to p^*\Omega_T \to \Omega_V \to \Omega_{V|T} \to 0,$$

und dieser entspricht eine kanonische Kohomologieklasse

$$C(V \mid T) \in \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}_V}(\Omega^1_{V|T}, p^*\Omega^1_T)$$

(z. B. auf Grund der Yoneda-Interpretation von Ext oder mittels des Verbindungsmorphismus $\delta(\mathrm{id}_{\Omega_{V|T}})$ bezüglich der Kohomologiefolge zu $\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_V}(\Omega_{V|T}, -)$ definiert!). Da $\Omega_{V|T}$ lokal frei sind, ist

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_V}(\Omega_{V|T}, -) = \Theta_{V|T} \otimes_{\mathcal{O}_V} [-] \quad \text{und}$$

$$\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_V}(\Omega_{V|T}, -) = 0,$$

also

$$\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}_V}(\Omega^1_{V|T}, p^*\Omega^1_T) = H^1(V, \Theta_{V|T} \otimes_T \Omega^1_T).$$

Durch Einschränkung der Betrachtung auf offene Teilmengen von T (bzw. Etalüberdeckungen) erhält man eine lokale Variante von C, d. h. ein Element aus $H^0(T, R^1p_*(\Theta_{V|T} \otimes_T \Omega_T))$. Insgesamt haben wir also erhalten:

A. eine Fundamentalklasse $C(V \mid T) \in H^1(V, \Theta_{V|T} \otimes_T \Omega^1_T)$,

B. eine Fundamentalklasse $c(V \mid T) \in H^0(T, R^1p_*(\Theta_{V|T} \otimes_T \Omega^1_T))$.

Beide werden *Kodaira-Spencer-Klasse* genannt.
Bei der kanonischen Abbildung

$$H^1(V, \Theta_{V|T} \otimes_T \Omega^1_T) \to H^0(T, R^1p_*(\Theta_{V|T} \otimes_T \Omega^1_T))$$

geht C in c über.
Diese Klassen lassen sich auch (zumindest für singularitätenfreie T) wie folgt beschreiben: Wir haben eine kanonische Abbildung

$$R^1p_*(\Theta_{V|T} \otimes_T \Omega_T) \otimes_{\mathcal{O}_V} \Theta_T \to R^1p_*\Theta_{V|T},$$

$$a \otimes \xi \mapsto \xi_*(a).$$

(Ein Vektorfeld ξ auf T ist ein Homomorphismus $\xi\colon \Omega_T \to \mathcal{O}_T$ und induziert also einen Homomorphismus

$$\mathrm{id} \otimes \xi\colon \Theta_{V|T} \otimes_T \Omega_T \to \Theta_{V|T}$$

bzw. in der ersten Kohomologie eine mit ξ_* bezeichnete Abbildung.) Wenn wir für a stets $c(V \mid T)$ einsetzen, erhalten wir also eine Abbildung

$$\varrho'_{V|T}\colon \Theta_T \to R^1p_*\Theta_{V|T},$$

durch die (wenn T singularitätenfrei, also Ω_T lokal frei ist) $c(V \mid T)$ eindeutig bestimmt ist. $\varrho'_{V|T}$ heißt *Kodaira-Spencer-Abbildung*; die globale Version

$$\varrho_{V|T}\colon H^0(T, \Theta_T) \to H^1(V, \Theta_{V|T})$$

ist entsprechend definiert.
„Explizit" ist z. B. $\varrho'_{V|T}(\xi)$ wie folgt definiert: ξ sei über $U \subset T$ definiert; man überdecke $p^{-1}(U) \subset V$ mit hinreichend kleinen offenen Mengen U_α, so daß sich ξ zu einem Vektorfeld ξ_α auf U_α liften läßt. ($0 \to \Theta_{V|T} \to \Theta_V \to p^*\Theta_T \to 0$ ist eine exakte Folge von Garben!). Dann ist $\varphi_{\alpha\beta} = \xi_\alpha - \xi_\beta \in \Theta_{V|T}(U_{\alpha\beta})$ und $(\varphi_{\alpha\beta})$ ein 1-Kozyklus mit Koeffizienten aus $\Theta_{V|T}$, dessen Klasse in $R^1p_*\Theta_{V|T}$ das Bild $\varrho'_{V|T}(\xi)$ repräsentiert.

Anwendung 1. Es sei $T = \operatorname{Spec}(I_1)$; dann ist also (V, I_1, θ) ($\theta\colon V_0 \to V$ Einbettung der Faser von V im abgeschlossenen Punkt O von T) eine Deformation von V_0. Es ist ferner $\Omega_T = k\,dt$ ($I_1 = k[[t]]/(t^2)$, dt Differential von t und (t^2)) und $t\,dt = 0$. Man rechnet direkt nach:

$$\Theta_{V|T} \otimes_T \Omega_T \xrightarrow{\sim} \Theta_{V_0},$$

$$\xi \otimes dt \mapsto \bar{\xi} \quad (=:\text{ Einschränkung auf } V_0).$$

Somit hat man also jeder Deformation von V_0, (V, I_1, θ), eine Klasse $c(V \mid I_1) \in H^1(V_0, \Theta_{V_0})$ zugeordnet, d. h., die Kodaira-Spencer-Klasse liefert eine kanonische Abbildung

$$D(I_1) \to H^1(V_0, \Theta_{V_0}),$$

$$(V, I_1, \theta) \mapsto c(V \mid I_1),$$

und analog erhält man für jeden endlichdimensionalen Vektorraum W eine kanonische Abbildung

$$D(I_W) \to H^1(V_0, \Theta_{V_0}) \otimes W = H^1(V, \Theta_{V|T\times W})$$

($W \cong \operatorname{Spec}(I_W)$). Diese Abbildung ist stets bijektiv. Ein Kozyklus $\{\varphi_{ij}\}$ mit Werten in $\Theta_{V_0} \otimes W$ bezüglich einer offenen Überdeckung U_i von V_0 ist nichts weiter als eine Vorschrift, wie die Garben $\mathcal{O}_{V_0} \mid U_i \otimes_k I_W = \mathcal{O}_{U_i}$ auf U_i miteinander zu verheften sind zu einer Garbe $\mathcal{O}_V$, die zu einer Deformation (V, I_W, θ) gehört. Die Verheftung ist wie folgt (φ_{ij} ist eine Derivation $\mathcal{O}_{V_0} \mid U_{ij} \to \mathcal{O}_{V_0} \mid U_{ij} \otimes_k W$):

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{O}_{U_i} \mid U_{ij} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{U_j} \mid U_{ij} \\
\| & & \| \\
\mathcal{O}_{V_0} \mid U_{ij} \oplus (W \otimes \mathcal{O}_{V_0} \mid U_{ij}) & & \mathcal{O}_{V_0} \mid U_{ij} \oplus (W \otimes \mathcal{O}_{V_0} \mid U_{ij}), \\
(f, w \otimes g) & \longrightarrow & (f, \varphi_{ij}(w \otimes g)).
\end{array}$$

Kohomologe Kozyklen liefern isomorphe Deformationen, so daß also für alle singularitätenfreien V_0

$$D(I_1) \xrightarrow{\sim} H^1(V_0, \Theta_{V_0}),$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Menge aller} \\ \text{infinitesimalen Deformationen} \\ (V, I_1, \theta)\end{array}\right\} \mapsto c(V \mid I_1)$$

gilt; insbesondere gilt also:

Korollar 1. *Der Parameterraum der semiuniversellen Deformation singularitätenfreier eigentlicher Mannigfaltigkeiten V_0 hat die Einbettungsdimension $m = \dim H^1(V_0, \Theta_{V_0})$.*

Beispiel. Ist V_0 eine Kurve vom Geschlecht p, dann ist $\Theta_{V_0} = \omega_{V_0}^{-1}$ und $H^1(V_0, \Theta_V)$ nach dem Satz von Riemann-Roch (bzw. dem Dualitätssatz von Serre) dual zu $H^0(V_0, \omega_V^{\otimes 2})$, also von der Dimension $3p - 3$.

Korollar 2. *Eine notwendige Bedingung dafür, daß $V \to T$ in einem Punkt $o \in T$ eine semiuniverselle Deformation von V_0 ist, ist die Bedingung, daß die durch $\varrho'_{V|T}$ induzierte Abbildung*

$$T_0(T) \to H^1(V_0, \Theta_{V_0})$$

bijektiv ist. ($T_0(T) =: \Theta_{T,o} \otimes_{\mathcal{O}_{T,o}} k =:$ *Tangentialraum an* T *in* o; *die Abbildung wird durch*

$$\theta_{T,O} \otimes_{\mathcal{O}_{T,o}} k \xrightarrow{\varrho'\otimes k} (R^1 p_* \Theta_{V|T}) \otimes_{\mathcal{O}_{T,o}} k \xrightarrow{\text{Basiswechsel}} H^1(V_0, \Theta_{V_*})$$

induziert, $\Theta_{V_*} = (\Theta_{V|T})_O \otimes \mathcal{O}_{V,o}\, k$.)

„Explizit" ist die obige Abbildung wie folgt definiert: Wenn $\varrho'_{V|T}(\xi)$ über einer Umgebung von o durch den Kozyklus $\varphi_{\alpha\beta}(\xi) \in \Theta_{V|T}(U_{\alpha\beta})$ repräsentiert wird, erhält man durch Spezialisierung von t zu o aus den Vektorfeldern $\varphi_{\alpha\beta}(\xi)$ Vektorfelder $\varphi_{\alpha\beta}(\xi)_0$ auf $V_0 \cap U_{\alpha\beta}$, die einen Kozyklus auf V_0 mit Werten in Θ_{V_*} bilden. Dessen Klasse ist das Bild von $\bar{\xi}_0$.

Anwendung 2 (über $\mathbf{C}$). Ist T singularitätenfrei und $\varrho'(V \mid T)\colon \Theta_T \to R^1 p_* \Theta_{V|T}$ die Nullabbildung, so ist $V \to T$ eine analytisch lokal triviale Faserung.

Der Beweis erfolgt in mehreren Schritten:

Schritt 1. Das Verschwinden von ϱ' bedeutet, daß die Folge

$$0 \to p^*\Omega_T^1 \to \Omega_V^1 \to \Omega_{V|T}^1 \to 0$$

lokal über T zerfällt; also gilt für hinreichend kleine T

$$\Omega_V^1 \cong p^*\Omega_T \oplus \Omega_{V|T}.$$

Außerdem sei o. B. d. A. T analytisch isomorph zum Produkt von q offenen Kreisscheiben $\Delta_1 \times \cdots \times \Delta_q$; $\Delta_j \subseteq \mathbf{C}$, Koordinaten $z_1, \ldots, z_q$. Der Beweis der Trivialität von $V \to T$ erfolgt durch Induktion über q, und zwar zeigen wir, daß nach eventueller Verkleinerung der Kreisscheiben gilt, daß $V \to T$ isomorph zu $V' \times \Delta_q \to T' \times \Delta_q$ ist mit $T' = \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_{q-1}$, $V' = p^{-1}(\Delta_1 \times \cdots \times \Delta_{q-1} \times \{0\}) \subseteq V$. Da $\theta_V \cong p_*\theta_T \oplus \Theta_{V|T}$ ist, läßt sich das Vektorfeld $\partial/\partial z_q$ auf T zu einem Vektorfeld ξ auf V liften. Wir benutzen zum Beweis, daß es zu jedem holomorphen Vektorfeld auf einer komplexen Mannigfaltigkeit eine holomorphe „Integralkurve" gibt, die holomorph vom Anfangswert abhängt, d. h. den folgenden

Hilfssatz. *Es sei V eine komplexe Mannigfaltigkeit,* ξ *ein Vektorfeld auf* V; *dann gibt es eine Umgebung* $W \subseteq V \times \mathbf{C}$ *von* $V \times \{o\}$ *und eine holomorphe Abbildung* $\varphi\colon W \to V$ *derart, daß folgendes gilt:*

1. $\partial\varphi/\partial z(x, z) = \xi(\varphi(x, z))$ *für alle* $(x, z) \in W \subseteq V \times \mathbf{C}$,
2. $\varphi(x, 0) = x$.

Schritt 2. Es ist klar, daß wir im Fall eines kompakten V die Umgebung W von der Form $V \times \Delta$ wählen können (Δ eine hinreichend kleine offene Kreisscheibe). Für den uns interessierenden Fall ist V nicht kompakt, wohl aber die Fasern von $V \to T$. Wählen wir nun eine relativ kompakte Umgebung U von 0 in T, so ist $p^{-1}(\overline{U}) \subset V$ kompakt (da p eigentlich ist!), also ist die Projektion $p^{-1}(\overline{U}) \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ eigentlich und daher das Bild der abgeschlossenen Menge $(p^{-1}(\overline{U}) \times \mathbf{C})$ in $\mathbf{C}$ abgeschlossen und disjunkt zum Nullpunkt. Daher können wir in $\mathbf{C}$ eine zu dieser Menge disjunkte Kreisscheibe Δ' wählen, die den Nullpunkt enthält, so daß also $p^{-1}(U) \times \Delta' \subseteq W$ ist.

Wir müssen also T durch die eventuell kleinere offene Menge U ersetzen, V durch $p^{-1}(V)$, so daß φ aus dem Lemma dann auf $V \times \Delta$ definiert ist.

Schritt 3. Es sei also jetzt $T = \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_q$ und o. B. d. A. der Radius von Δ_q nicht größer als der Radius von Δ. Die „Kurve" $z \mapsto p\varphi(x, z)$ in $T \subseteq \mathbf{C}^q$ ist Integral-