Daher ist (II) eine Abschwächung von (I), und wenn (j, M) eine Lösung von (II) und (I) überhaupt lösbar ist, dann ist j ein Isomorphismus $\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} M$, und der identischen Abbildung von M entspricht ein Element aus $\mathcal{M}(M)$, was natürlich die universelle Familie $\mathfrak{X} \to M$ ist.

Die in Abschnitt 2 betrachteten Beispiele sind Lösungen des schwachen Modulproblems ($\mathfrak{M}$ Klasse aller Kurven vom Geschlecht 1 bzw. 2). Wir werden gleich sehen, daß das strenge Modulproblem im allgemeinen keine Lösung hat.

3.2. Lokale Modulprobleme

Die im vorigen Abschnitt betrachteten Probleme waren globaler Natur: Es sollte die Menge aller Isomorphieklassen von Mannigfaltigkeiten aus $\mathfrak{M}$ parametrisiert werden und möglichst noch eine universelle Familie konstruiert werden. Eine Abschwächung des Problems besteht darin, die Abhängigkeit der Isomorphieklassen nur lokal, d. h. für kleine Änderungen von Parameterwerten, zu untersuchen. Anstelle der oben betrachteten Kategorie $\mathcal{C}$ von Parameterräumen S wird man hier also nur *Raumkeime* (S, o) betrachten, d. h. Paare, bestehend aus einem Schema S und einem ausgezeichneten Punkt $o \in S$, modulo folgender Äquivalenzrelation: (S, o) und (S', o') werden als äquivalent betrachtet, wenn es eine gemeinsame Umgebung (S'', o'') von o in S und von o' in S' gibt:

$$\begin{tikzcd} & (S, o) \\ (S'', o'') \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & (S', o') \end{tikzcd}$$

Es ist sinnvoll, unter „Umgebung" hier „Etalumgebungen" zu verstehen.

Das führt also dazu, Schemata über lokalen Henselschen Algebren von endlichem Typ über einem Henselschen Grundring Λ zu betrachten (d. h. Algebren der Form $\Lambda\langle\langle z_1, \ldots, z_n\rangle\rangle/(f_1, \ldots, f_r)$, wobei $\Lambda\langle\langle z_1, \ldots, z_n\rangle\rangle$ den Ring aller über $\Lambda[z_1, \ldots, z_n]$ *algebraischen* Potenzreihen bezeichnet) bzw. über beliebigen Noetherschen lokalen Henselschen Λ-Algebren z. B. der Form $\Lambda[[z_1, \ldots, z_n]]/(f_1, \ldots, f_r)$ Mit m_A bezeichnen wir im folgenden das Maximalideal eines lokalen Ringes A. Dabei wird vorausgesetzt, daß alle Algebren A den gleichen Restklassenkörper wie Λ haben.

Es sei k der Restklassenkörper von Λ, V eine Mannigfaltigkeit über k. Unter einer Deformation von V versteht man dann ein Tripel (A, X, θ), wobei A eine zur Konkurrenz zugelassene lokale Λ-Algebra ist, X ein flaches Λ-Schema und θ ein Isomorphismus von V auf die spezielle Faser von X über A.

Es ist klar, was man unter Morphismen von Deformationen zu verstehen hat und wie die durch einen Λ-Morphismus $A \to B$ induzierte Deformation definiert ist, für die wir einfach $(A, X, \theta) \otimes_A B$ schreiben werden.

Das lokale Modulproblem ist die folgende Frage:

(III) Gibt es zu gegebenem V eine Deformation $(\mathcal{A}, \mathfrak{X}, \Theta)$ von V mit den folgenden Eigenschaften?

(1) Jede Deformation (A, X, θ) von V wird bis auf Isomorphie durch einen Λ-Morphismus $\mathcal{A} \xrightarrow{\alpha} A$ induziert, der bis zu einer beliebig hohen Ordnung n vorgegeben sein kann (d. h., wenn die Deformation $(A, X, \theta) \otimes_A A/m_A^{n+1}$ durch ein $\beta_n\colon \mathcal{A} \to A/m_A^{n+1}$ induziert wird, kann man α so wählen, daß $\alpha \bmod m_A^{n+1} = \beta$ gilt).

(2) Die in den Zariskischen Tangentialräumen über Λ induzierte Abbildung $d\alpha$: $T_\Lambda(A) \to T_\Lambda(\mathcal{A})$ ist eindeutig durch (A, X, θ) bestimmt $(T_\Lambda(A) = \mathrm{Hom}\,(A, k[[t]]/(t^2)))$.

(3) $\mathcal{A}$ ist eine Henselsche Λ-Algebra von endlichem Typ.

Man nennt $(\mathcal{A}, \mathcal{X}, \Theta)$ eine *semiuniverselle Deformation von* V. Zu dieser Definition ist folgendes zu bemerken:

1. Es sei $D(A)$ die Menge aller *Isomorphieklassen* von Deformationen (A, X, θ) von V *über* A; dann ist $A \to D(A)$ ein Funktor, und (1), (2) kann man wie folgt formulieren:

(1′) $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{A}, -) \to D(-)$ ist surjektiv, und für alle A und $n \geqq 0$ ist der kanonische Morphismus

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{A}, A) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{A}, A/m_A^{n+1}) \times_{D(A/m_A^{n+1})} D(A)$$

ebenfalls surjektiv (d. h., $\mathrm{Hom}_\Lambda\,(\mathcal{A}, -) \to D(-)$ ist formal glatt).

(2′) $\mathrm{Hom}_\Lambda\,(\mathcal{A}, k[[t]]/(t^2)) \to D(k[[t]]/(t^2))$ ist bijektiv.

2. Diese beiden Bedingungen sind eine Abschwächung der Bedingung der Darstellbarkeit von D; damit D durch $(\mathcal{A}, \mathcal{X}, \Theta)$ dargestellt wird, dürfte nicht nur $d\alpha$, sondern α selbst *eindeutig* durch (A, X, θ) bestimmt sein. Die zweite Forderung in (1) bzw. (1′) besagt, daß im Fall der Darstellbarkeit von D der Morphismus Spec $(\mathcal{A}) \to D$ glatt ist (d. h., das Differential ist von konstantem Rang), und aus (2) folgt dann, daß Spec $(\mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} D$ ist. Wenn also D überhaupt darstellbar ist, so durch $(\mathcal{A}, \mathcal{X}, \Theta)$. Wenn $(\mathcal{A}, \mathcal{X}, \Theta)$ nur Forderung (1) und (3) erfüllt, wollen wir $(\mathcal{A}, \mathcal{X}, \Theta)$ eine *verselle Deformation* von V nennen. Wenn $(\mathcal{A}, \mathcal{X}, \Theta)$ eine Darstellung von D liefert, nennen wir $(\mathcal{A}, \mathcal{X}, \Theta)$ eine *universelle Deformation* von V.

3. Durch die Bedingungen (1), (2), (3) ist $(\mathcal{A}, \mathcal{X}, \Theta)$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt (vgl. Kap. II), wobei jedoch diese Isomorphie, falls D nicht darstellbar ist, nicht kanonisch ist (d. h., im allgemeinen hat $(\mathcal{A}, \mathcal{X}, \Theta)$ nichttriviale Automorphismen).

4. Wir können den Funktor D einschränken auf die Unterkategorie der „infinitesimalen Raumkeime" über Λ, d. h. der lokalen *Artinschen* Λ-Algebren. Wenn dann $(\mathcal{A}, \mathcal{X}, \Theta)$ die Forderung (1) bzw. (1) und (2) erfüllt, wobei $\mathcal{A}$ eine komplette lokale Noethersche Λ-Algebra ist, so heißt $(\mathcal{A}, \mathcal{X}, \Theta)$ eine *effektive formale verselle* bzw. *semiuniverselle Deformation* von V. Ebenso induziert D einen Funktor auf der Kategorie der endlichdimensionalen Vektorräume, $V \mapsto D(k \otimes V)$, wobei mit $k \otimes V \underset{\text{def}}{=} I_V$ die Artinalgebra $k \otimes V$, $V^2 = 0$, $(x, v)\,(y, w) = (xy, xw + yv)$ bezeichnet wird. Mit diesen Bezeichnungen gilt:

(A) Wenn es eine semiuniverselle Deformation (für D) gibt, ist $V \to D(I_V)$ ein linksexakter Funktor auf der Kategorie der endlichdimensionalen Vektorräume, d. h., $D(k)$ enthält genau ein Element,

$$D(I_V \times_{I_W} I_{V'}) = D(I_V) \times_{D(I_W)} D(I_{V'})$$

für jedes Diagramm $V \to W \leftarrow V'$ (es ist $I_V \times_{I_W} I_{V'} = I_V \times_W V'$).

(A*) Ist $V \mapsto D(I_V)$ linksexakt, so ist $D(I_V)$ ein Vektorraum über k und

$$D(I_V) = D(I_1) \otimes_k V \quad (I_1 = k[[t]]/(t^2)).$$

Beweis. $V \times V \to V$ (Addition) induziert wegen der Linksexaktheit eine Addition $D(V) \times D(V) \to D(V)$ $\quad (D(V) \underset{\text{def}}{=} D(I_V))$. Für $\lambda \in k$ induziert $V \xrightarrow{\lambda} V$ eine Multiplikation $D(\lambda)\colon D(V) \to D(V)$.