(e) *Die geometrischen Fasern von $M \mid \dot{\Lambda}$ sind dreidimensionale rationale, normale affine Mannigfaltigkeiten $\subseteq \mathbf{A}^8$ mit einer Singularität im Nullpunkt. Die Einbettungsdimension in diesem Punkt ist* 8.

Wir werden später sehen, daß dem singulären Punkt die Kurve $y^2 = x^5 - 1$ entspricht.

3. Präzisierung der Problemstellung

3.1. Globale Moduln

Nach diesen Beispielen wollen wir die allgemeine Problemstellung genauer formulieren. Es ist erst seit ca. 15 Jahren klar, wie Modulprobleme genau zu formulieren sind.

Zunächst sei eine Klasse $\mathfrak{M}$ von algebraischen Mannigfaltigkeiten (z. B. die Klasse aller kompletten singularitätenfreien algebraischen Flächen V mit gegebenen Plurigeschlechtern $P_n = \dim H^0(V, (\Omega_V^2)^{\otimes n})$ oder die Klasse aller kompletten singularitätenfreien Kurven vom Geschlecht p) oder von anderen algebraisch-geometrischen Objekten (z. B. Vektorbündel, Gruppenschemata, Raumkeime). Ferner muß präzisiert werden, welche Typen von Schemata als Parameterräume zugelassen werden, meist wird das die Kategorie der lokal Noetherschen oder der algebraischen Schemata sein, evtl. mit Ausschluß gewisser Restklassencharakteristiken.

Unter einer algebraischen Familie von Mannigfaltigkeiten aus $\mathfrak{M}$ versteht man dann gewöhnlich einen Morphismus $X \to S$, wobei S ein zugelassenes Parameterschema ist, so daß gilt:

1. p ist flach und lokal von endlicher Darstellung,

2. die geometrischen Fasern von $X \xrightarrow{p} S$ sind Mannigfaltigkeiten der Klasse $\mathfrak{M}$.

Es ist klar, daß für einen Morphismus $T \to S$ von Parameterschemata die Familie $X \xrightarrow{p} S$ eine Familie $X_T \to T$ induziert, $X_T = X \times_S T$, p_T Projektion.

Unter einem Morphismus algebraischer Familien $X' \to S'$, $X \to S$ versteht man ein Faserproduktdiagramm

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ S' & \longrightarrow & S \end{array}$$

Auf diese Weise erhält man die Kategorie $\mathcal{F}$ der algebraischen Familien von Objekten aus $\mathfrak{M}$ sowie einen kanonischen Funktor $\mathcal{F} \to \mathcal{C}$ =: Kategorie der Parameterschemata (der jeder Familie das Parameterschema und jedem Morphismus von Familien den unteren Pfeil zuordnet).

In der Sprache der Kategorien ausgedrückt ist $\mathcal{F} \to \mathcal{C}$ ein gefasertes Gruppoid. Dieses gefaserte Gruppoid ist dann der Gegenstand der weiteren Untersuchungen. Ist $\mathfrak{X} \to M$ ein Objekt aus $\mathcal{F}$, so induziert dieses einen Funktor gefaserter Gruppoide über $\mathcal{C}$

$$\mathcal{C} \mid M \to \mathcal{F}$$

(wobei $\mathscr{C} \mid M$ die Kategorie der Morphismen aus $\mathscr{C}$ mit dem „Ziel" M ist, $\mathscr{C} \mid M \to \mathscr{C}$ der Funktor „Start") durch

$$(S \to M) \mapsto (\mathscr{X} \times_M S \xrightarrow{\text{Projektion}} S).$$

Die Untersuchung von $\mathscr{F}$ wäre dann auf das Studium der Morphismen in $\mathscr{C}$ mit dem Ziel M zurückgeführt, wenn man $\mathscr{X} \to M$ als Endobjekt in $\mathscr{F}$ wählen könnte; dann ist nämlich

$$\mathscr{C} \mid M \to \mathscr{F}$$

eine Äquivalenz von Kategorien.

Das grundlegende Existenzproblem lautet deshalb:

(0) Gibt es in $\mathscr{F}$ ein Endpobjekt?

Das wird im allgemeinen nicht der Fall sein, da die Gruppe der S-Automorphismen einer Familie $V \to S$ im allgemeinen nicht trivial ist.

Eine etwas schwächere Formulierung des obigen Problems ist die Frage:

(I) *Strenges (oder feines) Modulproblem.* Gibt es eine *universelle Familie* in $\mathscr{F}$, d. h., ist der Funktor

$\mathscr{C}^{\text{opp}} \to \text{Ens}, \quad S \mapsto \mathscr{M}(S)$

(wobei $\mathscr{M}(S)$ die Menge aller Isomorphieklassen von Familien aus $\mathfrak{M}$ über S ist) darstellbar?

Wenn eine solche Familie $\mathscr{X} \to M$ existiert, würden insbesondere den geometrischen Punkten von M mit Werten in einem algebraisch abgeschlossenen Körper k (mit Spec $(k) \in \mathscr{C}$) die Isomorphieklassen von Mannigfaltigkeiten aus $\mathfrak{M}$ entsprechen, die über k definiert sind.

(II) *Schwaches (oder grobes) Modulproblem.* Gibt es ein Schema M sowie eine natürliche Transformation $j: \mathscr{M} \to M$ (M aufgefaßt als Kofunktor auf $\mathscr{C}$, $M(S) = \text{Hom}_{\mathscr{C}}(S, M)$), so daß gilt:

1. Für jeden algebraisch abgeschlossenen Körper k (mit Spec $(k) \in \mathscr{C}$) ist $j_k: \mathscr{M}(k) \to M(k)$ bijektiv (d. h., $M(k)$ ist isomorph zur Menge aller Isomorphieklassen von Mannigfaltigkeiten aus $\mathfrak{M}$, die über k definiert sind).

2. $j: \mathscr{M} \to M$ ist eine *universelle natürliche Transformation* in einem darstellbaren Kofunktor auf $\mathscr{C}$, d. h., ist $\mathscr{J}: \mathscr{M} \to N$ eine natürliche Transformation in einen darstellbaren Kofunktor N ($=$ Schema aus $\mathscr{C}$), so gibt es genau einen Morphismus

$h: M \to N \quad \text{mit} \quad \mathscr{J} = h \cdot j.$

Ausführlich besagt 2.: Für jede Familie $\mathscr{X} \to S$ ist $j_{\mathscr{X}|S}$ ein Morphismus $S \to M$, so daß $j_{\mathscr{X}|S}(t)$ für $t \in S(k)$ der Punkt aus $M(k)$ ist, der der Isomorphieklasse von X_t entspricht, und (j, M) ist universell mit dieser Eigenschaft. M heißt der *Modulraum* und j die *absolute Invariante* für die Mannigfaltigkeiten aus $\mathfrak{M}$.

Folgende Tatsachen sind unmittelbar klar:

1. Wenn die Existenzprobleme (I) bzw. (II) eine Lösung $\mathscr{X} \to M$ bzw. (j, M) besitzen, ist diese (bis auf kanonische Isomorphie) eindeutig bestimmt.

2. Ist $\mathscr{X} \to M$ eine Lösung des Problems (I), so daß wir also M als Funktor mit $\mathscr{M}$ identifizieren können, so ist (id_M, M) auch eine Lösung von (II).