(e) *Die geometrischen Fasern von $M \mid \dot{\Lambda}$ sind dreidimensionale rationale, normale affine Mannigfaltigkeiten $\subseteq \mathbf{A}^8$ mit einer Singularität im Nullpunkt. Die Einbettungsdimension in diesem Punkt ist* 8.

Wir werden später sehen, daß dem singulären Punkt die Kurve $y^2 = x^5 - 1$ entspricht.

3. Präzisierung der Problemstellung

3.1. Globale Moduln

Nach diesen Beispielen wollen wir die allgemeine Problemstellung genauer formulieren. Es ist erst seit ca. 15 Jahren klar, wie Modulprobleme genau zu formulieren sind.

Zunächst sei eine Klasse $\mathfrak{M}$ von algebraischen Mannigfaltigkeiten (z. B. die Klasse aller kompletten singularitätenfreien algebraischen Flächen V mit gegebenen Plurigeschlechtern $P_n = \dim H^0(V, (\Omega_V^2)^{\otimes n})$ oder die Klasse aller kompletten singularitätenfreien Kurven vom Geschlecht p) oder von anderen algebraisch-geometrischen Objekten (z. B. Vektorbündel, Gruppenschemata, Raumkeime). Ferner muß präzisiert werden, welche Typen von Schemata als Parameterräume zugelassen werden, meist wird das die Kategorie der lokal Noetherschen oder der algebraischen Schemata sein, evtl. mit Ausschluß gewisser Restklassencharakteristiken.

Unter einer algebraischen Familie von Mannigfaltigkeiten aus $\mathfrak{M}$ versteht man dann gewöhnlich einen Morphismus $X \to S$, wobei S ein zugelassenes Parameterschema ist, so daß gilt:

1. p ist flach und lokal von endlicher Darstellung,
2. die geometrischen Fasern von $X \xrightarrow{p} S$ sind Mannigfaltigkeiten der Klasse $\mathfrak{M}$.

Es ist klar, daß für einen Morphismus $T \to S$ von Parameterschemata die Familie $X \xrightarrow{p} S$ eine Familie $X_T \to T$ induziert, $X_T = X \times_S T$, p_T Projektion.

Unter einem Morphismus algebraischer Familien $X' \to S'$, $X \to S$ versteht man ein Faserproduktdiagramm

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ S' & \longrightarrow & S \end{array}$$

Auf diese Weise erhält man die Kategorie $\mathcal{F}$ der algebraischen Familien von Objekten aus $\mathfrak{M}$ sowie einen kanonischen Funktor $\mathcal{F} \to \mathcal{C}$ =: Kategorie der Parameterschemata (der jeder Familie das Parameterschema und jedem Morphismus von Familien den unteren Pfeil zuordnet).

In der Sprache der Kategorien ausgedrückt ist $\mathcal{F} \to \mathcal{C}$ ein gefasertes Gruppoid. Dieses gefaserte Gruppoid ist dann der Gegenstand der weiteren Untersuchungen. Ist $\mathfrak{X} \to M$ ein Objekt aus $\mathcal{F}$, so induziert dieses einen Funktor gefaserter Gruppoide über $\mathcal{C}$

$$\mathcal{C} \mid M \to \mathcal{F}$$

(wobei $\mathscr{C} \mid M$ die Kategorie der Morphismen aus $\mathscr{C}$ mit dem „Ziel" M ist, $\mathscr{C} \mid M \to \mathscr{C}$ der Funktor „Start") durch

$$(S \to M) \mapsto (\mathscr{X} \times_M S \xrightarrow{\text{Projektion}} S).$$

Die Untersuchung von $\mathscr{F}$ wäre dann auf das Studium der Morphismen in $\mathscr{C}$ mit dem Ziel M zurückgeführt, wenn man $\mathscr{X} \to M$ als Endobjekt in $\mathscr{F}$ wählen könnte; dann ist nämlich

$$\mathscr{C} \mid M \to \mathscr{F}$$

eine Äquivalenz von Kategorien.
Das grundlegende Existenzproblem lautet deshalb:

(0) Gibt es in $\mathscr{F}$ ein Endpobjekt?

Das wird im allgemeinen nicht der Fall sein, da die Gruppe der S-Automorphismen einer Familie $V \to S$ im allgemeinen nicht trivial ist.
Eine etwas schwächere Formulierung des obigen Problems ist die Frage:

(I) *Strenges* (*oder feines*) *Modulproblem*. Gibt es eine *universelle Familie* in $\mathscr{F}$, d. h., ist der Funktor

$\mathscr{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{Ens}, \quad S \mapsto \mathscr{M}(S)$

(wobei $\mathscr{M}(S)$ die Menge aller Isomorphieklassen von Familien aus $\mathfrak{M}$ über S ist) darstellbar?

Wenn eine solche Familie $\mathscr{X} \to M$ existiert, würden insbesondere den geometrischen Punkten von M mit Werten in einem algebraisch abgeschlossenen Körper k (mit Spec $(k) \in \mathscr{C}$) die Isomorphieklassen von Mannigfaltigkeiten aus $\mathfrak{M}$ entsprechen, die über k definiert sind.

(II) *Schwaches* (*oder grobes*) *Modulproblem*. Gibt es ein Schema M sowie eine natürliche Transformation $j: \mathscr{M} \to M$ (M aufgefaßt als Kofunktor auf $\mathscr{C}$, $M(S) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(S, M)$), so daß gilt:

1. Für jeden algebraisch abgeschlossenen Körper k (mit Spec $(k) \in \mathscr{C}$) ist $j_k: \mathscr{M}(k) \to M(k)$ bijektiv (d. h., $M(k)$ ist isomorph zur Menge aller Isomorphieklassen von Mannigfaltigkeiten aus $\mathfrak{M}$, die über k definiert sind).

2. $j: \mathscr{M} \to M$ ist eine *universelle natürliche Transformation* in einem darstellbaren Kofunktor auf $\mathscr{C}$, d. h., ist $\mathscr{J}: \mathscr{M} \to N$ eine natürliche Transformation in einen darstellbaren Kofunktor N (= Schema aus $\mathscr{C}$), so gibt es genau einen Morphismus

$h: M \to N \quad \text{mit} \quad \mathscr{J} = h \cdot j.$

Ausführlich besagt 2.: Für jede Familie $\mathscr{X} \to S$ ist $j_{\mathscr{X}|S}$ ein Morphismus $S \to M$, so daß $j_{\mathscr{X}|S}(t)$ für $t \in S(k)$ der Punkt aus $M(k)$ ist, der der Isomorphieklasse von X_t entspricht, und (j, M) ist universell mit dieser Eigenschaft. M heißt der *Modulraum* und j die *absolute Invariante* für die Mannigfaltigkeiten aus $\mathfrak{M}$.

Folgende Tatsachen sind unmittelbar klar:

1. Wenn die Existenzprobleme (I) bzw. (II) eine Lösung $\mathscr{X} \to M$ bzw. (j, M) besitzen, ist diese (bis auf kanonische Isomorphie) eindeutig bestimmt.

2. Ist $\mathscr{X} \to M$ eine Lösung des Problems (I), so daß wir also M als Funktor mit $\mathscr{M}$ identifizieren können, so ist (id_M, M) auch eine Lösung von (II).

Daher ist (II) eine Abschwächung von (I), und wenn (j, M) eine Lösung von (II) und (I) überhaupt lösbar ist, dann ist j ein Isomorphismus $\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} M$, und der identischen Abbildung von M entspricht ein Element aus $\mathcal{M}(M)$, was natürlich die universelle Familie $\mathfrak{X} \to M$ ist.

Die in Abschnitt 2 betrachteten Beispiele sind Lösungen des schwachen Modulproblems ($\mathfrak{M}$ Klasse aller Kurven vom Geschlecht 1 bzw. 2). Wir werden gleich sehen, daß das strenge Modulproblem im allgemeinen keine Lösung hat.

3.2. Lokale Modulprobleme

Die im vorigen Abschnitt betrachteten Probleme waren globaler Natur: Es sollte die Menge aller Isomorphieklassen von Mannigfaltigkeiten aus $\mathfrak{M}$ parametrisiert werden und möglichst noch eine universelle Familie konstruiert werden. Eine Abschwächung des Problems besteht darin, die Abhängigkeit der Isomorphieklassen nur lokal, d. h. für kleine Änderungen von Parameterwerten, zu untersuchen. Anstelle der oben betrachteten Kategorie $\mathscr{C}$ von Parameterräumen S wird man hier also nur *Raumkeime* (S, o) betrachten, d. h. Paare, bestehend aus einem Schema S und einem ausgezeichneten Punkt $o \in S$, modulo folgender Äquivalenzrelation: (S, o) und (S', o') werden als äquivalent betrachtet, wenn es eine gemeinsame Umgebung (S'', o'') von o in S und von o' in S' gibt:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & (S, o) \\ (S'', o'') \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & (S', o') \end{tikzcd}$$

Es ist sinnvoll, unter „Umgebung" hier „Etalumgebungen" zu verstehen.

Das führt also dazu, Schemata über lokalen Henselschen Algebren von endlichem Typ über einem Henselschen Grundring Λ zu betrachten (d. h. Algebren der Form $\Lambda\langle\langle z_1, \ldots, z_n\rangle\rangle/(f_1, \ldots, f_r)$, wobei $\Lambda\langle\langle z_1, \ldots, z_n\rangle\rangle$ den Ring aller über $\Lambda[z_1, \ldots, z_n]$ *algebraischen* Potenzreihen bezeichnet) bzw. über beliebigen Noetherschen lokalen Henselschen Λ-Algebren z. B. der Form $\Lambda[[z_1, \ldots, z_n]]/(f_1, \ldots, f_r)$ Mit m_A bezeichnen wir im folgenden das Maximalideal eines lokalen Ringes A. Dabei wird vorausgesetzt, daß alle Algebren A den gleichen Restklassenkörper wie Λ haben.

Es sei k der Restklassenkörper von Λ, V eine Mannigfaltigkeit über k. Unter einer Deformation von V versteht man dann ein Tripel (A, X, θ), wobei A eine zur Konkurrenz zugelassene lokale Λ-Algebra ist, X ein flaches Λ-Schema und θ ein Isomorphismus von V auf die spezielle Faser von X über A.

Es ist klar, was man unter Morphismen von Deformationen zu verstehen hat und wie die durch einen Λ-Morphismus $A \to B$ induzierte Deformation definiert ist, für die wir einfach $(A, X, \theta) \otimes_A B$ schreiben werden.

Das lokale Modulproblem ist die folgende Frage:

(III) Gibt es zu gegebenem V eine Deformation $(\mathcal{A}, \mathfrak{X}, \Theta)$ von V mit den folgenden Eigenschaften?

(1) Jede Deformation (A, X, θ) von V wird bis auf Isomorphie durch einen Λ-Morphismus $\mathcal{A} \xrightarrow{\alpha} A$ induziert, der bis zu einer beliebig hohen Ordnung n vorgegeben sein kann (d. h., wenn die Deformation $(A, X, \theta) \otimes_A A/m_A^{n+1}$ durch ein $\beta_n\colon \mathcal{A} \to A/m_A^{n+1}$ induziert wird, kann man α so wählen, daß $\alpha \bmod m_A^{n+1} = \beta$ gilt).

(2) Die in den Zariskischen Tangentialräumen über Λ induzierte Abbildung $d\alpha$: $T_\Lambda(A) \to T_\Lambda(\mathcal{A})$ ist eindeutig durch (A, X, θ) bestimmt $(T_\Lambda(A) = \operatorname{Hom}(A, k[[t]]/(t^2)))$.

(3) $\mathcal{A}$ ist eine Henselsche Λ-Algebra von endlichem Typ.

Man nennt $(\mathcal{A}, \mathcal{X}, \Theta)$ eine *semiuniverselle Deformation von V*. Zu dieser Definition ist folgendes zu bemerken:

1. Es sei $D(A)$ die Menge aller *Isomorphieklassen* von Deformationen (A, X, θ) von V *über A*; dann ist $A \to D(A)$ ein Funktor, und (1), (2) kann man wie folgt formulieren:

(1') $\operatorname{Hom}_\Lambda(\mathcal{A}, -) \to D(-)$ ist surjektiv, und für alle A und $n \geqq 0$ ist der kanonische Morphismus

$$\operatorname{Hom}_\Lambda(\mathcal{A}, A) \to \operatorname{Hom}_\Lambda(\mathcal{A}, A/m_A^{n+1}) \times_{D(A/m_A^{n+1})} D(A)$$

ebenfalls surjektiv (d. h., $\operatorname{Hom}_\Lambda(\mathcal{A}, -) \to D(-)$ ist formal glatt).

(2') $\operatorname{Hom}_\Lambda(\mathcal{A}, k[[t]]/(t^2)) \to D(k[[t]]/(t^2))$ ist bijektiv.

2. Diese beiden Bedingungen sind eine Abschwächung der Bedingung der Darstellbarkeit von D; damit D durch $(\mathcal{A}, \mathcal{X}, \Theta)$ dargestellt wird, dürfte nicht nur $d\alpha$, sondern α selbst *eindeutig* durch (A, X, θ) bestimmt sein. Die zweite Forderung in (1) bzw. (1') besagt, daß im Fall der Darstellbarkeit von D der Morphismus Spec $(\mathcal{A}) \to D$ glatt ist (d. h., das Differential ist von konstantem Rang), und aus (2) folgt dann, daß Spec $(\mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} D$ ist. Wenn also D überhaupt darstellbar ist, so durch $(\mathcal{A}, \mathcal{X}, \Theta)$. Wenn $(\mathcal{A}, \mathcal{X}, \Theta)$ nur Forderung (1) und (3) erfüllt, wollen wir $(\mathcal{A}, \mathcal{X}, \Theta)$ eine *verselle Deformation* von V nennen. Wenn $(\mathcal{A}, \mathcal{X}, \Theta)$ eine Darstellung von D liefert, nennen wir $(\mathcal{A}, \mathcal{X}, \Theta)$ eine *universelle Deformation* von V.

3. Durch die Bedingungen (1), (2), (3) ist $(\mathcal{A}, \mathcal{X}, \Theta)$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt (vgl. Kap. II), wobei jedoch diese Isomorphie, falls D nicht darstellbar ist, nicht kanonisch ist (d. h., im allgemeinen hat $(\mathcal{A}, \mathcal{X}, \Theta)$ nichttriviale Automorphismen).

4. Wir können den Funktor D einschränken auf die Unterkategorie der „infinitesimalen Raumkeime" über Λ, d. h. der lokalen *Artinschen* Λ-Algebren. Wenn dann $(\mathcal{A}, \mathcal{X}, \Theta)$ die Forderung (1) bzw. (1) und (2) erfüllt, wobei $\mathcal{A}$ eine komplette lokale Noethersche Λ-Algebra ist, so heißt $(\mathcal{A}, \mathcal{X}, \Theta)$ eine *effektive formale verselle* bzw. *semiuniverselle Deformation* von V. Ebenso induziert D einen Funktor auf der Kategorie der endlichdimensionalen Vektorräume, $V \mapsto D(k \otimes V)$, wobei mit $k \otimes V \underset{\text{def}}{=} I_V$ die Artinalgebra $k \otimes V$, $V^2 = 0$, $(x, v)(y, w) = (xy, xw + yv)$ bezeichnet wird. Mit diesen Bezeichnungen gilt:

(A) Wenn es eine semiuniverselle Deformation (für D) gibt, ist $V \to D(I_V)$ ein linksexakter Funktor auf der Kategorie der endlichdimensionalen Vektorräume, d. h., $D(k)$ enthält genau ein Element,

$$D(I_V \times_{I_W} I_{V'}) = D(I_V) \times_{D(I_W)} D(I_{V'})$$

für jedes Diagramm $V \to W \leftarrow V'$ (es ist $I_V \times_{I_W} I_{V'} = I_V \times_W V'$).

(A*) Ist $V \mapsto D(I_V)$ linksexakt, so ist $D(I_V)$ ein Vektorraum über k und

$$D(I_V) = D(I_1) \otimes_k V \quad (I_1 = k[[t]]/(t^2)).$$

Beweis. $V \times V \to V$ (Addition) induziert wegen der Linksexaktheit eine Addition $D(V) \times D(V) \to D(V)$ $(D(V) \underset{\text{def}}{=} D(I_V))$. Für $\lambda \in k$ induziert $V \xrightarrow{\lambda} V$ eine Multiplikation $D(\lambda): D(V) \to D(V)$.

Damit wird $D(V) = D(I_V)$ ein Vektorraum und $V \mapsto D(I_V)$ ein linksexakter Funktor in die Kategorie der Vektorräume. Ist $V = V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ (dim $V_i = 1$), so ist

$$D(I_V) = D(I_{V_1}) \otimes \cdots \otimes D(I_{V_n}) = D(I_1) \otimes V$$

(Basis $e_i \in V_i$ auswählen!), q. e. d.

Damit ergibt sich als erste notwendige Bedingung für die Lösbarkeit von (III):

Forderung 1. $V \mapsto D(I_V)$ ist linksexakt und dim $D(I_1) < \infty$.

Falls eine semiuniverselle Deformation existiert, ist $D(I_1)$ der Tangentialraum $T_\Lambda(\mathcal{A})$.

Ist also dim $D(I_1) = m$, so müßte das gesuchte $\mathcal{A}$ Quotient von $\Lambda\langle\langle x_1, \ldots, x_m\rangle\rangle$ sein. Gewöhnlich kann man $D(I_1)$ als eine geeignete erste Kohomologiegruppe ausdrücken (vgl. etwa 3.3. sowie Kap. II).

(B) Wenn es eine semiuniverselle Deformation (für D) gibt, muß für jedes Diagramm lokaler Artinalgebren $A' \to A/I \leftarrow A$ folgendes gelten:

$$D(A \times_{A/I} A') \to D(A) \times_{D(A/I)} D(A') \text{ ist surjektiv.}$$

Das ist eine Abschwächung der Bedingung „linksexakt".

Für die Lösbarkeit von (III) ergibt sich also als zweite notwendige Bedingung

Forderung 2. Für jedes Diagramm lokaler Artinalgebren $A' \to A/I \leftarrow A$ ist

$$D(A \times_{A/I} A') \to D(A) \times_{D(A/I)} D(A')$$

surjektiv.

Nach einem Kriterium von Schlessinger (vgl. Kap. II) sind diese beiden Forderungen auch hinreichend, um das Problem auf *formaler* Ebene zu lösen. Schließlich folgt aus der *stärkeren*

Forderung 3. D ist linksexakt,

daß der Funktor S prorepräsentierbar in der Kategorie der Artinschen Λ-Algebren ist (vgl. Kap. II).

Wir werden in Abschnitt 4 Beispiele bringen, aus denen folgt, daß hieraus noch nicht die Lösung von (III) folgt.

3.3. Kodaira-Spencer-Abbildung

Beim lokalen Studium von algebraischen oder analytischen Familien spielt eine von Kodaira und Spencer eingeführte Abbildung eine wichtige Rolle, die in gewisser Weise die Abweichung dieser Familie in jedem Punkt von der universellen Familie mißt.

Wir geben hier eine Variante dieser Betrachtungen; eine für Zwecke der Deformationstheorie nützliche Verallgemeinerung geben wir in Kap. II.

Betrachtet werden Familien $V \to T$ von kompletten singularitätenfreien Mannigfaltigkeiten V_t, $t \in T$.

Mit Ω_V bzw. $\Omega_{V|T}$ bezeichnen wir die Garbe der holomorphen 1-Formen bzw. relativen holomorphen 1-Formen, mit Θ_V bzw. $\Theta_{V|T}$ die dazu duale Garbe der Vektorfelder bzw. Vektorfelder längs der Fasern.

Da nach Voraussetzung $V \to T$ glatt ist, haben wir eine exakte Folge

$$0 \to p^*\Omega_T \to \Omega_V \to \Omega_{V|T} \to 0,$$

und dieser entspricht eine kanonische Kohomologieklasse

$$C(V \mid T) \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_V}(\Omega^1_{V|T}, p^*\Omega^1_T)$$

(z. B. auf Grund der Yoneda-Interpretation von Ext oder mittels des Verbindungsmorphismus $\delta(\mathrm{id}_{\Omega_{V|T}})$ bezüglich der Kohomologiefolge zu $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_V}(\Omega_{V|T}, -)$ definiert!). Da $\Omega_{V|T}$ lokal frei sind, ist

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_V}(\Omega_{V|T}, -) = \Theta_{V|T} \otimes_{\mathcal{O}_V} [-] \quad \text{und}$$

$$\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_V}(\Omega_{V|T}, -) = 0,$$

also

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_V}(\Omega^1_{V|T}, p^*\Omega^1_T) = H^1(V, \Theta_{V|T} \otimes_T \Omega^1_T).$$

Durch Einschränkung der Betrachtung auf offene Teilmengen von T (bzw. Etalüberdeckungen) erhält man eine lokale Variante von C, d. h. ein Element aus $H^0(T, R^1p_*(\Theta_{V|T} \otimes_T \Omega_T))$. Insgesamt haben wir also erhalten:

A. eine Fundamentalklasse $C(V \mid T) \in H^1(V, \Theta_{V|T} \otimes_T \Omega^1_T)$,

B. eine Fundamentalklasse $c(V \mid T) \in H^0(T, R^1p_* (\Theta_{V|T} \otimes_T \Omega^1_T))$.

Beide werden *Kodaira-Spencer-Klasse* genannt.
Bei der kanonischen Abbildung

$$H^1(V, \Theta_{V|T} \otimes_T \Omega^1_T) \to H^0(T, R^1p_* (\Theta_{V|T} \otimes_T \Omega^1_T))$$

geht C in c über.
Diese Klassen lassen sich auch (zumindest für singularitätenfreie T) wie folgt beschreiben: Wir haben eine kanonische Abbildung

$$R^1p_*(\Theta_{V|T} \otimes_T \Omega_T) \otimes_{\mathcal{O}_V} \Theta_T \to R^1p_*\Theta_{V|T},$$

$$a \otimes \xi \mapsto \xi_*(a).$$

(Ein Vektorfeld ξ auf T ist ein Homomorphismus $\xi\colon \Omega_T \to \mathcal{O}_T$ und induziert also einen Homomorphismus

$$\mathrm{id} \otimes \xi\colon \Theta_{V|T} \otimes_T \Omega_T \to \Theta_{V|T}$$

bzw. in der ersten Kohomologie eine mit ξ_* bezeichnete Abbildung.) Wenn wir für a stets $c(V \mid T)$ einsetzen, erhalten wir also eine Abbildung

$$\varrho'_{V|T}\colon \Theta_T \to R^1p_*\Theta_{V|T},$$

durch die (wenn T singularitätenfrei, also Ω_T lokal frei ist) $c(V \mid T)$ eindeutig bestimmt ist. $\varrho'_{V|T}$ heißt *Kodaira-Spencer-Abbildung*; die globale Version

$$\varrho_{V|T}\colon H^0(T, \Theta_T) \to H^1(V, \Theta_{V|T})$$

ist entsprechend definiert.
„Explizit" ist z. B. $\varrho'_{V|T}(\xi)$ wie folgt definiert: ξ sei über $U \subset T$ definiert; man überdecke $p^{-1}(U) \subset V$ mit hinreichend kleinen offenen Mengen U_α, so daß sich ξ zu einem Vektorfeld ξ_α auf U_α liften läßt. ($0 \to \Theta_{V|T} \to \Theta_V \to p^*\Theta_T \to 0$ ist eine exakte Folge von Garben!). Dann ist $\varphi_{\alpha\beta} = \xi_\alpha - \xi_\beta \in \Theta_{V|T}(U_{\alpha\beta})$ und $(\varphi_{\alpha\beta})'$ ein 1-Kozyklus mit Koeffizienten aus $\Theta_{V|T}$, dessen Klasse in $R^1p_*\Theta_{V|T}$ das Bild $\varrho'_{V|T}(\xi)$ repräsentiert.

Anwendung 1. Es sei $T = \mathrm{Spec}\,(I_1)$; dann ist also (V, I_1, θ) ($\theta\colon V_0 \to V$ Einbettung der Faser von V im abgeschlossenen Punkt O von T) eine Deformation von V_0. Es ist ferner $\Omega_T = k\,dt$ ($I_1 = k[[t]]/(t^2)$, dt Differential von t und (t^2)) und $t\,dt = 0$. Man rechnet direkt nach:

$$\Theta_{V|T} \otimes_T \Omega_T \xrightarrow{\sim} \Theta_{V_0},$$

$$\xi \otimes dt \mapsto \bar{\xi} \quad (=: \text{Einschränkung auf } V_0).$$

Somit hat man also jeder Deformation von V_0, (V, I_1, θ), eine Klasse $c(V \mid I_1) \in H^1(V_0, \Theta_{V_0})$ zugeordnet, d. h., die Kodaira-Spencer-Klasse liefert eine kanonische Abbildung

$$D(I_1) \to H^1(V_0, \Theta_{V_0}),$$

$$(V, I_1, \theta) \mapsto c(V \mid I_1),$$

und analog erhält man für jeden endlichdimensionalen Vektorraum W eine kanonische Abbildung

$$D(I_W) \to H^1(V_0, \Theta_{V_0}) \otimes W = H^1(V, \Theta_{V|T\times W})$$

($W \cong \mathrm{Spec}\,(I_W)$). Diese Abbildung ist stets bijektiv. Ein Kozyklus $\{\varphi_{ij}\}$ mit Werten in $\Theta_{V_0} \otimes W$ bezüglich einer offenen Überdeckung U_i von V_0 ist nichts weiter als eine Vorschrift, wie die Garben $\mathcal{O}_{V_0} \mid U_i \otimes_k I_W = \mathcal{O}_{U_i}$ auf U_i miteinander zu verheften sind zu einer Garbe $\mathcal{O}_V$, die zu einer Deformation (V, I_W, θ) gehört. Die Verheftung ist wie folgt (φ_{ij} ist eine Derivation $\mathcal{O}_{V_0} \mid U_{ij} \to \mathcal{O}_{V_0} \mid U_{ij} \otimes_k W$):

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{O}_{U_i} \mid U_{ij} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{U_j} \mid U_{ij} \\
\| & & \| \\
\mathcal{O}_{V_0} \mid U_{ij} \oplus (W \otimes \mathcal{O}_{V_0} \mid U_{ij}) & & \mathcal{O}_{V_0} \mid U_{ij} \oplus (W \otimes \mathcal{O}_{V_0} \mid U_{ij}), \\
(f, w \otimes g) & \longrightarrow & (f, \varphi_{ij}(w \otimes g)).
\end{array}$$

Kohomologe Kozyklen liefern isomorphe Deformationen, so daß also für alle singularitätenfreien V_0

$$D(I_1) \xrightarrow{\sim} H^1(V_0, \Theta_{V_0}),$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Menge aller} \\ \text{infinitesimalen Deformationen} \\ (V, I_1, \theta)\end{array}\right\} \mapsto c(V \mid I_1)$$

gilt; insbesondere gilt also:

Korollar 1. *Der Parameterraum der semiuniversellen Deformation singularitätenfreier eigentlicher Mannigfaltigkeiten V_0 hat die Einbettungsdimension $m = \dim H^1(V_0, \Theta_{V_0})$.*

Beispiel. Ist V_0 eine Kurve vom Geschlecht p, dann ist $\Theta_{V_0} = \omega_{V_0}^{-1}$ und $H^1(V_0, \Theta_V)$ nach dem Satz von Riemann-Roch (bzw. dem Dualitätssatz von Serre) dual zu $H^0(V_0, \omega_V^{\otimes 2})$, also von der Dimension $3p - 3$.

Korollar 2. *Eine notwendige Bedingung dafür, daß $V \to T$ in einem Punkt $o \in T$ eine semiuniverselle Deformation von V_0 ist, ist die Bedingung, daß die durch $\varrho'_{V|T}$ induzierte Abbildung*

$$T_0(T) \to H^1(V_0, \Theta_{V_0})$$

bijektiv ist. ($T_0(T) =: \Theta_{T,o} \otimes_{\mathcal{O}_{T,o}} k =:$ *Tangentialraum an* T *in* o; *die Abbildung wird durch*

$$\theta_{T,O} \otimes_{\mathcal{O}_{T,o}} k \xrightarrow{\varrho' \otimes k} (R^1 p_* \Theta_{V|T}) \otimes_{\mathcal{O}_{T,o}} k \xrightarrow{\text{Basiswechsel}} H^1(V_0, \Theta_{V_*})$$

induziert, $\Theta_{V_*} = (\Theta_{V|T})_O \otimes_{\mathcal{O}_{V,o}} k$.)

„Explizit" ist die obige Abbildung wie folgt definiert: Wenn $\varrho'_{V|T}(\xi)$ über einer Umgebung von o durch den Kozyklus $\varphi_{\alpha\beta}(\xi) \in \Theta_{V|T}(U_{\alpha\beta})$ repräsentiert wird, erhält man durch Spezialisierung von t zu o aus den Vektorfeldern $\varphi_{\alpha\beta}(\xi)$ Vektorfelder $\varphi_{\alpha\beta}(\xi)_0$ auf $V_0 \cap U_{\alpha\beta}$, die einen Kozyklus auf V_0 mit Werten in Θ_{V_*} bilden. Dessen Klasse ist das Bild von $\bar{\xi}_0$.

Anwendung 2 (über $\mathbf{C}$). Ist T singularitätenfrei und $\varrho'(V \mid T)$: $\Theta_T \to R^1 p_* \Theta_{V|T}$ die Nullabbildung, so ist $V \to T$ eine analytisch lokal triviale Faserung.

Der Beweis erfolgt in mehreren Schritten:

Schritt 1. Das Verschwinden von ϱ' bedeutet, daß die Folge

$$0 \to p^*\Omega_T^1 \to \Omega_V^1 \to \Omega_{V|T}^1 \to 0$$

lokal über T zerfällt; also gilt für hinreichend kleine T

$$\Omega_V^1 \cong p^*\Omega_T \oplus \Omega_{V|T}.$$

Außerdem sei o. B. d. A. T analytisch isomorph zum Produkt von q offenen Kreisscheiben $\Delta_1 \times \cdots \times \Delta_q$; $\Delta_j \subseteq \mathbf{C}$, Koordinaten $z_1, \ldots, z_q$. Der Beweis der Trivialität von $V \to T$ erfolgt durch Induktion über q, und zwar zeigen wir, daß nach eventueller Verkleinerung der Kreisscheiben gilt, daß $V \to T$ isomorph zu $V' \times \Delta_q \to T' \times \Delta_q$ ist mit $T' = \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_{q-1}$, $V' = p^{-1}(\Delta_1 \times \cdots \times \Delta_{q-1} \times \{0\}) \subseteq V$. Da $\theta_V \cong p_*\theta_T \oplus \Theta_{V|T}$ ist, läßt sich das Vektorfeld $\partial/\partial z_q$ auf T zu einem Vektorfeld ξ auf V liften. Wir benutzen zum Beweis, daß es zu jedem holomorphen Vektorfeld auf einer komplexen Mannigfaltigkeit eine holomorphe „Integralkurve" gibt, die holomorph vom Anfangswert abhängt, d. h. den folgenden

Hilfssatz. *Es sei V eine komplexe Mannigfaltigkeit,* ξ *ein Vektorfeld auf* V; *dann gibt es eine Umgebung* $W \subseteq V \times \mathbf{C}$ *von* $V \times \{o\}$ *und eine holomorphe Abbildung* φ: $W \to V$ *derart, daß folgendes gilt:*

1. $\partial\varphi/\partial z(x, z) = \xi(\varphi(x, z))$ *für alle* $(x, z) \in W \subseteq V \times \mathbf{C}$,

2. $\varphi(x, 0) = x$.

Schritt 2. Es ist klar, daß wir im Fall eines kompakten V die Umgebung W von der Form $V \times \Delta$ wählen können (Δ eine hinreichend kleine offene Kreisscheibe). Für den uns interessierenden Fall ist V nicht kompakt, wohl aber die Fasern von $V \to T$. Wählen wir nun eine relativ kompakte Umgebung U von 0 in T, so ist $p^{-1}(\overline{U}) \subset V$ kompakt (da p eigentlich ist!), also ist die Projektion $p^{-1}(\overline{U}) \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ eigentlich und daher das Bild der abgeschlossenen Menge $(p^{-1}(\overline{U}) \times \mathbf{C})$ in $\mathbf{C}$ abgeschlossen und disjunkt zum Nullpunkt. Daher können wir in $\mathbf{C}$ eine zu dieser Menge disjunkte Kreisscheibe Δ' wählen, die den Nullpunkt enthält, so daß also $p^{-1}(U) \times \Delta' \subseteq W$ ist.

Wir müssen also T durch die eventuell kleinere offene Menge U ersetzen, V durch $p^{-1}(V)$, so daß φ aus dem Lemma dann auf $V \times \Delta$ definiert ist.

Schritt 3. Es sei also jetzt $T = \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_q$ und o. B. d. A. der Radius von Δ_q nicht größer als der Radius von Δ. Die „Kurve" $z \mapsto p\varphi(x, z)$ in $T \subseteq \mathbf{C}^q$ ist Integral-