rechnet, erhält man

$$a = c = \frac{\vartheta(0)^2 \cdot \vartheta\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\vartheta\left(\frac{\tau}{2}\right)^4}, \qquad b = \frac{\vartheta(0)^4 + \vartheta\left(\frac{1}{2}\right)^4}{\vartheta\left(\frac{\tau}{2}\right)^4}.$$

Die Wurzeln von $ax^3 + bx^2 + cx = 0$ sind daher

$$e_1 = 0, \quad e_2 = \frac{\vartheta(0)^2}{\vartheta\left(\frac{1}{2}\right)^2}, \qquad e_3 = \frac{\vartheta\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\vartheta(0)^2}.$$

Hieraus folgt, daß die absolute Invariante durch

$$j(\tau) = 2^8 \frac{\left[\vartheta(0,\tau)^8 + \vartheta\left(\frac{1}{2},\tau\right)^8 - \vartheta(0,\tau)^4 \cdot \vartheta\left(\frac{1}{2},\tau\right)^4\right]^3}{\vartheta(0,\tau)^8\, \vartheta\left(\frac{1}{2},\tau\right)^8 \cdot \left[\vartheta\left(\frac{1}{2},\tau\right)^4 - \vartheta(0,\tau)^4\right]^2}$$

gegeben ist.

Daher ist $j(\tau)$ Quotient der Nullwerte zweier Thetafunktionen der Ordnung 24 zu dem Gitter $\Gamma = \mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau$.

Es sei umgekehrt eine Kurve E durch $y^2 = x^3 - ax - b$ gegeben (d. h. als zweiblättrige Überlagerung von $\mathbf{P}^1$ mit den Verzweigungspunkten e_1, e_2, e_3, ∞).

Indem man $\dfrac{dx}{y}$ auf der zugehörigen Riemannschen Fläche längs der Fundamentalzyklen γ_1, γ_2 integriert, erhält man Perioden w_1, w_2, und $E \xrightarrow{u} (\mathbf{Z}w_1 + \mathbf{Z}w_2)$ wird durch

$$(x, y) \mapsto \left(\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \frac{dx}{y}\right) \bmod (\mathbf{Z}\omega_1 + \mathbf{Z}\omega_2)$$

gegeben. Das topologische Bild zeigt Abb. 5 (vgl. S. 106).
Insbesondere sind die Perioden (lokal) stetig von dem Doppelverhältnis
$\lambda = (e_1 : e_2 : e_3 : \infty)$ abhängig.

2.2. Kurven vom Geschlecht 2 (vgl. J. Igusa [1] und P. Samuel [1])

Für singularitätenfreie komplette Kurven $\mathbf{C}$ vom Geschlecht 2 sind die Verhältnisse besonders einfach; zu jeder solchen Kurve gibt es nämlich eine kanonische Überlagerung $f: \mathbf{C} \to \mathbf{P}^1$, da es genau zwei linear unabhängige Abelsche Differentiale w_1, w_2 auf $\mathbf{C}$ gibt; es ist $f(x) = (w_1(x) : w_2(x))$, und f hat sechs Verzweigungspunkte. Bezüglich der kanonischen Abbildung gilt allgemein folgendes: Wir setzen wieder der Einfachheit halber voraus, daß die Charakteristik des Grundkörpers $\neq 2$ ist.

2.2.1. Satz. *Ist C eine singularitätenfreie Kurve vom Geschlecht $p \geqq 2$ und ω_C die Garbe der 1-Formen, so hat das lineare System $|\omega_C|$ keine Basispunkte, und die zugehörige* *kanonische Abbildung f: $C \dashrightarrow \mathbf{P}^1$ ist entweder eine abgeschlossene Einbettung oder $f(C) \cong \mathbf{P}^1$ und $C \to f(C)$ ist eine zweiblättrige Überlagerung mit $2p + 2$ Verzweigungspunkten (hyperelliptischer Fall).*

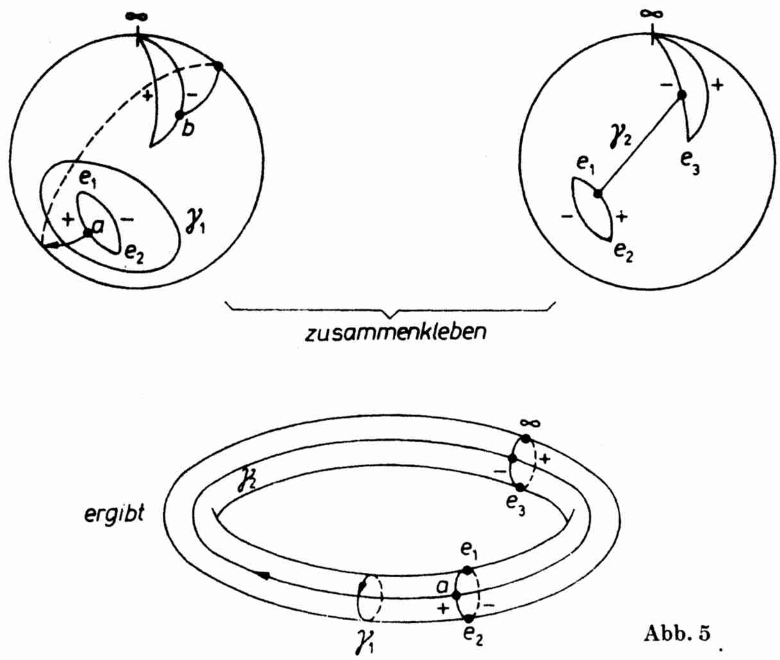

Abb. 5

Beweis. Ist $|\omega_C \otimes \mathcal{O}_C(-P)| = |\omega_C|$ (d. h. P Basispunkt), so ist $\dim |\mathcal{O}(P)| = 1$ (Satz von RIEMANN-ROCH), d. h., es gibt eine rationale Funktion f mit einem einfachen Pol in P, d. h., C ist vom Geschlecht 0. Also hat $|\omega_C|$ für $p \geqq 2$ keine Basispunkte.

Wenn f keine Einbettung ist, gibt es zwei (nicht notwendig verschiedene) Punkte P, Q, so daß $|\omega_C(-P - Q)| = |\omega_C(P)|$, also

$$|\mathcal{O}_C(P)| \subsetneqq |\mathcal{O}_C(P + Q)|$$

ist, und es gibt eine rationale Funktion g mit dem Poldivisor $P + Q$; g ist daher eine zweiblättrige Überlagerung g: $C \to \mathbf{P}^1$. Bei geeigneter Wahl von y ist dann C in affinen Koordinaten durch

$$y^2 = F(x), \qquad \deg F(x) = 2p + 1 \text{ oder } 2p + 2 \tag{3}$$

definiert, wobei $F(x)$ nur einfache Nullstellen hat. Man rechnet für jede durch eine Gleichung (3) definierte Kurve direkt nach:

a) $\dfrac{dx}{y}, x\dfrac{dx}{y}, \ldots, x^{p-1}\dfrac{dx}{y}$ ist eine Basis der abelschen Differentiale (also ist $g(x, y) = x$ bis auf Isomorphie die kanonische Abbildung).

b) Die Verzweigungspunkte liegen über den Nullstellen von $F(x)$ (und über ∞, wenn $\deg F = 2p + 1$ ist).

Wir kehren jetzt zu Kurven C vom Geschlecht 2 und der kanonischen Überlagerung $f: C \to \mathbf{P}^1$ zurück; offensichtlich ist $f: C \to \mathbf{P}^1$ durch die Bilder der sechs Verzweigungspunkte auf $\mathbf{P}^1$, d. h. durch eine Form sechsten Grades (binäre Sextik)

$$u_0X^6 + u_1X^5Y + u_2X^4Y^2 + \cdots + u_6Y^6 = u(X, Y)$$

eindeutig bestimmt, und die Isomorphieklassen der Kurven vom Geschlecht 2 entsprechen den Punkten des Orbitraums

$$M = U/PGL(2), \ (u\sigma)(X, Y) = u(aX + bY, cX + dY) \text{ für } \sigma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in PGL(2).$$

($U \subset \mathbf{P}^6$ Unterraum der binären Sextiken, Menge aller $(u_0 : u_1 : \ldots : u_6)$, deren Diskriminate $D(u_0, \ldots, u_6) \neq 0$ ist).
Ist $j(C)$ der entsprechende Punkt aus M, so gilt wieder:

2.2.2. Satz

(i) *Ist $\mathfrak{M}$ die Menge aller Isomorphieklassen von Kurven vom Geschlecht* 2, *so ist* $\mathfrak{M} \to M$, $C \mapsto j(C)$ *eine Bijektion.*

(ii) *Ist $(C_s)_{s \in S}$ eine beliebige algebraische Familie von Kurven vom Geschlecht* 2, *so wird $s \mapsto j(s)$ durch einen Morphismus $S \to M$ induziert, der durch $C|S$ eindeutig bestimmt ist.* (*Dabei wird vorausgesetzt, daß* 2 *auf S umkehrbar ist.*)

(iii) (j, M) *mit den Eigenschaften* (i) *und* (ii) *ist universell.*

Die Konstruktion des Raumes der Invarianten der binären Sextiken über C als Grundkörper ist seit dem vorigen Jahrhundert bekannt (A. Clebsch [1]). Eine Beschreibung von M erhält man z. B. wie folgt:
Es sei $\tilde{\mathfrak{M}}$ das System aller Isomorphieklassen von 7-Tupeln $(C, P_1, \ldots, P_6)$, C eine Kurve vom Geschlecht 2, $P_i \in \mathbf{P}^1$ seien die Bildpunkte der Verzweigungspunkte der kanonischen Abbildung. Es sei $\tilde{M} \subset \mathbf{A}^3$ die Menge aller Punkte $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbf{A}^3$, $\lambda_i \neq 0, 1$; dann erhält man eine Bijektion $\tilde{j}: \tilde{\mathfrak{M}} \to \tilde{M}$ durch

$$(C, P_1, \ldots, P_6) \to (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad \text{mit} \quad \lambda_i = (P_4 : P_5 : P_6 : P_i)$$

(Doppelverhältnis).
Die symmetrische Gruppe S_6 operiert in kanonische Weise auf $\tilde{\mathfrak{M}}$, und diese Operation überträgt sich auf $\tilde{M}$, so daß S_6 algebraisch auf $\tilde{M}$ operiert. Daher induziert $\tilde{j}$ eine Bijektion

$$j: \mathfrak{M} = \tilde{\mathfrak{M}}/S_6 \to \tilde{M} = M/S_6;$$

insbesondere ist M ein dreidimensionales normales affines Schema.
Es ist klar, wie man algebraische Familien $(C|S, \sigma_1, \ldots, \sigma_6)$, $\sigma_i: S \to \mathbf{P}^1 \times S$ aus $\tilde{\mathfrak{M}}$ zu definieren hat. Für algebraische Familien aus $\tilde{\mathfrak{M}}$ mit dem Parameterschema S induziert die Abbildung

$$S \to \tilde{\mathfrak{M}} \xrightarrow{\tilde{j}} \tilde{M}, \quad s \to \tilde{j}(s)$$

einen Morphismus $S \to M$.
Ist $C|S$ eine algebraische Familie, so wollen wir zeigen, daß $s \mapsto j(s)$ einen Morphismus $S \to M$ induziert. Da die Frage lokal bezüglich S ist, können wir annehmen, daß S zusammenhängend und $p_*\omega_{C|S}$ frei ist ($p: C \to S$ Strukturmorphismus); durch die globalen Schnitte wird also ein S-Morphismus $C \to \mathbf{P}^1 \times S$ induziert. Es sei $D = D_{C|S} \subset C$ der Verzweigungsdivisor (Differente) von $C|S$ über $\mathbf{P}^1 \times S/S$; dann ist $D \to S$ eine sechsblättrige Etalüberlagerung, die eventuell in mehrere Zusammenhangskomponenten zerfällt. Ist $S' = D \times_S \cdots \times_S D$ (6mal), so ist $S' \to S$ ebenfalls eine Etalüberlagerung und $S'/S_6 \cong S$.

Die induzierte Familie $C' = C \times_S S'$ besitzt sechs Schnitte $S' \to D \times_S S' \subset C'$; durch Festlegung einer Reihenfolge dieser Schnitte erhält man also einen Morphismus $\tilde{j}: S' \to \tilde{M}$ mit $\tilde{j}(s') = j(C'_{s'}) = j(C_s)$ (wenn s' über $s \in S$ liegt), und $S' \xrightarrow{\tilde{j}} \tilde{M} \to M$ ist ein S_6-äquivarianter Morphismus (triviale Operation auf M). Also induziert $\tilde{j}$ einen eindeutig durch $C|S$ bestimmten Morphismus $j: S \to M$ mit $j(s) = j(C_s)$.
Zur genaueren Bestimmung von M müssen wir ein Erzeugendensystem für die Invarianten binärer Sextiken ausrechnen. Das ist mit erheblichem Rechenaufwand verbunden und war einer der Höhepunkte der klassischen Invariantentheorie.
Wir betrachten die kanonische Abbildung

$$(\mathbf{P}^1)^6 \to (\mathbf{P}^1)^6/S_6 = \mathbf{P}^6,$$

$$((u_1 : v_1), \ldots, (u_6 : v_6)) \mapsto \prod_{i=1}^{6} (u_i X + v_i Y);$$

eine rationale Invariante auf $\mathbf{P}^6$ bezüglich $GL(2)$ ist umkehrbar eindeutig durch eine *symmetrische* rationale Funktion $f(P_1, \ldots, P_6)$ auf $(\mathbf{P}^1)^6$ bestimmt, so daß $f(\sigma P_1, \ldots, \sigma P_6) = \det(\sigma)^g f(P_1, \ldots, P_6)$ (g Gewicht der Invarianten) für alle $\sigma \in GL(2)$ gilt.
Die Funktion f ist Quotient zweier eindeutig bestimmter 6-homogener Formen $F = F(u_1, v_1, \ldots, u_6, v_6)$ und $G = G(u_1, \ldots)$, die symmetrisch in den (u_i, v_i) sind, also insbesondere denselben Grad m bezüglich jeder Variablenreihe $w_i = (u_i, v_i)$ haben.
Wenn die Charakteristik 0 ist, gilt:
Ist m der Grad von F in jeder Variablenreihe w_i, so ist F von der Form $P(w_1, w_2, \ldots, w_6; w_1, \ldots, w_6; w_1, \ldots, w_6)$ (m-mal), wobei I eine symmetrische $(6m)$-Linearform in $w_1, \ldots, w_6, w_7, \ldots, w_{6m}$ ist (P gewinnt man durch m-fache Polarisierung von F).
Wir bezeichen mit $[w_i, w_j]$ die Determinante von w_i, w_j. Nach dem ersten Hauptsatz der klassischen Invariantentheorie gilt (vgl. etwa J. B. CARRELL und J. DIEUDONNÉ [1]): Es sei p eine natürliche Zahl. Es gibt p-lineare Invarianten $P(w_1, \ldots, w_p)$ bezüglich der Operation von $GL(2)$ auf dem Raum $\otimes^p E$ ($E = C^2$) nur dann, wenn $p = 2g$ ($2 = \dim E$) ist; jede solche Invariante ist eine Linearkombination von Invarianten der Form

$$[\omega_{\pi(1)}, \omega_{\pi(2)}]\,[\omega_{\pi(3)}, \omega_{\pi(4)}] \cdots [\omega_{\pi(2g-1)}, \omega_{\pi(2g)}], \quad \pi \in S_p.$$

Wir müssen für unser Problem unter diesen Invarianten P die symmetrischen aussuchen ($p = 6m$) und dann $w_1 = w_7 = w_{13} = \cdots$, $w_2 = w_8 = w_{14} = \cdots$ usw. einsetzen; auf diese Weise erhält man alle Invarianten $F(w_1, \ldots, w_6)$ vom Grade m in jedem w_i. Da die Formen $[w_i, w_j]^2$ Faktoren sind, die in die Diskriminante derjenigen binären Formen $F(x, y)$ eingehen, die w_i, w_j als Nullstellen besitzen, erhält man z. B. für

$$F = u_0 x^6 + u_1 x^5 y + u_2 x^4 y^2 + \cdots + u_6 y^6$$

die folgenden Invarianten:

Gewicht 6. $A(u) = \sum\limits_{\substack{G_1 G_2 G_3 = F \\ \deg G_i = 2}} \Delta_2(G_1)\, \Delta_2(G_2)\, \Delta_2(G_3)$

($\Delta_2(ax^2 + bxy + cy^2) = b^2 - 4ac$, Diskriminante für Formen zweiten Grades. Summiert wird über alle 15 wesentlich verschiedenen Zerlegungen von F in drei quadratische Formen).

Gewicht 12. $B(u) = \sum_{\substack{F=H_1H_2\\ \deg H_i = 3}} \Delta_3(H_1)\,\Delta_3(H_2)$

(10 Summanden, $\Delta_3(ax^3 + bx^2y + cxy^2 + fy^3) = (bc)^2 - 4ac^3 - 4b^3d - 27(ad)^2 + 18abcd$, Diskriminante kubischer Formen).

Gewicht 18. $C(u) = \sum_{\substack{F=H_1H_2=G_1G_2G_3\\ G_i \nmid H_j}} \Delta_3(H_1)\,\Delta_3(H_2)\,\Delta_2(G_1)\,\Delta_2(G_2)\,\Delta_2(G_3)$

(60 Summanden, H_i kubische Formen, G_j quadratische Formen).

Gewicht 30. $D(u) = \Delta_6(F)$
Diskriminante von F).

Igusa hat gezeigt, daß man mittels dieser vier Invarianten die Mannigfaltigkeit M und die Abbildung j beschreiben kann (vgl. auch P. Samuel [1]).

Wir wollen hier eine andere Methode zur Herleitung dieser Resultate angeben, wir schließen dabei der Einfachheit halber die Fälle der Charakteristik 2, 3, 5 aus, die einige gesonderte Betrachtungen erfordern.
Eine andere Möglichkeit, Invarianten $J(u_0, \ldots, u_6) = J(u)$ direkt auszurechnen, besteht darin, daß man die Eigenschaften

$$\left.\begin{aligned} &J(h^6u_0, h^6u_1, \ldots, h^6u_6) = h^{2g}J(u_0, \ldots, u_6),\\ &J(u_6, u_5, \ldots, u_0) = (-1)^g J(u_0, u_1, \ldots, u_6),\\ &J(h^6u_0, h^5u_1, \ldots, hu_5, u_6) \doteq h^g J(u_0, \ldots, u_6) \end{aligned}\right\} \quad (g \text{ Gewicht von } J)$$

benutzt (die aus der Invarianz bezüglich $\begin{bmatrix} h & 0\\ 0 & h\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} h & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ folgen), und die Differentialgleichung

$$6u_0\frac{\partial J}{\partial u_1} + 5u_1\frac{\partial J}{\partial u_2} + 4u_2\frac{\partial J}{\partial u_3} + \cdots + u_5\frac{\partial J}{\partial u_6} = 0$$

(die aus der Invarianz von J bezüglich $\begin{bmatrix} 1 & h\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ folgt) benutzt. Das liefert z. B. für $g = 6$

$$A(u) = -2(120u_0u_6 - 20u_1u_5 + 8u_2u_4 - 3u_3^2).$$

Hilfssatz 1. *$A(u) = B(u) = C(u) = D(u) = 0$ gilt genau dann, wenn F eine mindestens vierfache Nullstelle hat, d. h. auf den Orbits der Formen x^6, x^5y, x^4y^2, $x^4y(x-y)$. Ferner gilt $A = B = D = 0$ außer auf den obigen Formen noch genau auf den Orbits von $F = xy^2(x-y)(x^2 - 3xy + 3y^2)$ und $xy^2(x^3 - y^3)$.*

Beweis. Daß die Invarianten auf den angegebenen Formen verschwinden, rechnet man unmittelbar nach.

Es sei jetzt umgekehrt $F = u_0x^6 + u_1x^5y + \cdots$ eine Form, für die $D(u) = 0$ ist (F hat also eine zweifache Wurzel); wir nehmen o. B. d. A. an, daß F mindestens zwei verschiedene Wurzeln hat, so daß man F in die Gestalt

$$F = xy^2G, \qquad G \text{ eine kubische Form},$$

bringen kann (also $u_0 = u_1 = u_6 = 0$). Eine leichte Rechnung zeigt, daß in diesem Fall

$$B = (u_4^2 - 3u_3u_5)\,u_2^2, \qquad A = 3u_3^2 - 8u_2u_4$$

gilt (bis auf den Faktor 2).

Die Gleichungen $A = B = 0$ haben die folgenden Lösungen:

1. $u_2 = u_3 = 0$, entspricht den Formen xy^4L, L linear (also o. B. d. A. $L = x$, $L = y$ oder $L = x - y$).

2. $u_2 = 1$, $u_3 = u_4 = 0$, entspricht den Formen $xy^2(x^3 - \alpha y^3)$.

3. $u_2 = 1$, $u_3 \neq 0$, dann ist die allgemeine Lösung von $A = B = 0$ gleich $(u_3, u_4, u_5) = (4\alpha, 6\alpha^2, 3\alpha^3)$, $\alpha \neq 0$; diese entsprechen den Formen

$$xy^2(x^3 + 4\alpha x^2y + 6\alpha^2xy^2 + 3\alpha^3y^3) = xy^2(x + y)\,(x^2 + 3\alpha xy + 3\alpha^2y^2).$$

Der Rest der Behauptung ist klar.

Folgerung. *Sind A, B, C, D Unbestimmte vom Grad* 1, 2, 3, 5, *so ist*

$$\mathbf{P}^6 \to \overline{M} =: \operatorname{Proj}(k[A, B, C, D]),$$
$$(u_0 : \ldots : u_6) \mapsto [A(u), B(u), C(u), D(u)]$$

eine rationale Abbildung von $\mathbf{P}^6$ auf $\overline{M}$. Das Schema M ist normal.

Beweis. Es ist $\dim \overline{M} = 3$ und z. B. die Dimension der Faser $[A, B, C, D] = [0, 0, 1, 0]$ gleich 3; also hat die allgemeine Faser ebenfalls die Dimension 3, und die Abbildung ist rational. Da A, B, C, D algebraisch unabhängig sind, ist $\overline{M}$ normal.

Ist M_D bzw. $(\mathbf{P}^6)_D$ die offene Menge mit $D \neq 0$, so erhält man einen Morphismus

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{P}^6)_D \arrow[rr] \arrow[dr, "j"'] & & \overline{M}_D \\
& M \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

und wir wollen zeigen, daß $M \cong \overline{M}_D$ ist, d. h.

$$M = \operatorname{Spec}\,(k[x^5, xy, x^2z, xy^2, yz, y^5, xz^3, z^5])$$
$$\text{mit } x^5D = A^5,\ x^3yD = A^3B, x^2zD = A^2C, \ldots, z^5D = C^5.$$

Hilfssatz 2. *Es gibt eine $PGL(2)$-stabile offene Menge $U \subseteq (\mathbf{P}^6)_D$, auf der $PGL(2)$ frei operiert (d. h., für die $U \times PGL(2) \to U \times U$, $(u, \sigma) \mapsto (u\sigma, u)$ eine abgeschlossene Einbettung ist).*

Beweis. Wir haben ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{P}^1)^6_D \arrow[r] \arrow[d] & (\mathbf{P}^6)_D \arrow[d, "j"] \\
(\mathbf{P}^1)^3_D \arrow[r] & M
\end{tikzcd}$$

wobei die vertikalen Pfeile Quotienten bezüglich $PGL(2)$ sind $((\mathbf{P}^1)^6_D \to (\mathbf{P}^1)^3_D$ ist die Abbildung

$$(x_1, \ldots, x_6) \mapsto ((x_4 : x_5 : x_6 : x_1), (x_4 : x_5 : x_6 : x_2), (x_4 : x_5 : x_6 : x_3))^{1)},$$

und $(\mathbf{P}^1)^3_D$ ist die Menge aller Tripel (y_1, y_2, y_3) mit $y_i \neq y_j \neq 0, 1, \infty$).
Die horizontalen Pfeile sind Quotienten bezüglich S_6, und $(\mathbf{P}^1)^3_D \to M$ ist etal über einer offenen Menge $U_0 \subset M$ (die Zerlegungsgruppe

$$\mathrm{Stab}\,(y_1, y_2, y_3) = \{s \in S_6 ; s(y_1, y_2, y_3) = (y_1, y_2, y_3)\}$$

ist nur auf einer abgeschlossenen Teilmenge von Eins verschieden). Die Fasern von j über U_0 sind dann reduzierte Schemata, und in $j^{-1}(U_0)$ gibt es eine nichtleere, stabile offene Menge U, so daß für $u \in U$ gilt:

$$PGL(2) \to U, \quad \sigma \mapsto u\sigma \text{ ist injektiv.}$$

(Denn ist $u\sigma = u$ für ein $\sigma \in PGL(2)$, so permutiert σ die sechs Wurzeln der zu u gehörigen Form sechsten Grades, hat also endliche Ordnung, und daher ist bei geeigneten Koordinaten σ die Abbildung $(x : y) \to (\varepsilon x : y)$, ε eine zweite, dritte, vierte, fünfte oder sechste Einheitswurzel. Die Formen, die bei diesen Transformationen invariant bleiben, sind in einer echten abgeschlossenen Teilmenge von $(\mathbf{P}^6)_D$ enthalten.)
Man erhält dann

$$PGL(2) \times U \xrightarrow{\sim} U \times_{U_0} U,$$
$$(\sigma, u) \mapsto (u\sigma, u),$$

q. e. d.

Es sei jetzt $L \subset \mathbf{P}^6$ der Unterraum der Formen vom Grade 6, die in $(1:0)$, $(0:1)$ und $(1:1)$ verschwinden, d. h., L ist der durch $F(1,0) = F(0,1) = F(1,1) = 0$ definierte lineare Unterraum der Formen sechsten Grades.
Jedes $PGL(2)$-Orbit von Punkten aus $(\mathbf{P}^6)_D$ schneidet L (da man durch eine projektive Transformation drei der sechs Nullstellen der Form F, die dem Punkt aus $(\mathbf{P}^6)_D$ entspricht, in die Punkte $\infty, 0, 1$ überführen kann).
Da es 120 Möglichkeiten gibt, unter sechs verschiedenen Punkten drei auszuwählen, und da durch drei Punkte und ihre Bilder genau eine projektive Transformation bestimmt wird, schneiden die Fasern von $j : U \to j(U) \subseteq M$ den Unterraum L in genau 120 Punkten.

Hilfssatz 3. *$L_D \to \overline{M}_D$, $u \mapsto (A(u), B(u), C(u), D(u))$ ist ein ganzer Morphismus vom Grade 120, und $M \to M_D$ ist ein Isomorphismus.*

Beweis. Die Einschränkung von $\mathbf{P}^6 \to \overline{M}$ auf L ist in den endlich vielen Punkten, die den Formen $xy(x-y)\,G$, $G = x^3$, y^3 oder $(x-y)^3$ entsprechen, nicht definiert. Hieraus folgt leicht, daß $L_D \to \overline{M}_D$ ein eigentlicher, rationaler Morphismus ist, also insbesondere endlich (da L_D offen ist).
Die Faser in einem Punkt aus $\overline{M}_D$, in dem $B = t_1 A^2$, $C = t_2 A^3$, $D = t_3 A^5$ gilt, ist im Schnittprodukt der drei Flächen in L mit den Gleichungen

$$B(u) - t_1 A^2(u) = C(u) - t_2 A^3(u) = D(u) - t_3 A^5(u) = 0$$

---

[1]) Mit $(a{:}b{:}c{:}d)$ wird das Doppelverhältnis der Punkte a, b, c, d auf $\mathbf{P}^1$ bezeichnet.

enthalten, und nach dem Satz von BÉZOUT ist (für allgemeine t_1, t_2, t_3) dieses Schnittprodukt ein Zyklus vom Grad $4 \cdot 6 \cdot 10 = 240$.
Da beispielsweise $x^4y(x - y)$ ein Punkt dieses Zyklus ist, der nicht zur Faser gehört, hat der Morphismus $L_D \to \overline{M}_D$ einen Grad $d < 240$, und wegen der Faktorisierung $L_D \to M \to \overline{M}_D$ ist der Grad $[L_D : M]$ ein Teiler von d.
Es genügt zu zeigen, daß $[L_D : M] = 120$ ist, denn dann ist $d = 120$ und $M \to \overline{M}_D$ birational (und endlich, also biregulär, da M_D normal ist).
Da jede Faser von $U \to j(U) \subset M$ den Unterraum in 120 Punkten schneidet und isomorph zu $PGL(2)$ ist, genügt zu zeigen, daß L diese Fasern transversal schneidet, bzw. folgenden

Hilfssatz 4. *Für $u \in (\mathbf{P})^6_D$ ist*

$$PGL(2) \times_{\mathbf{P}^6} L = \{(\sigma, v) \mid \sigma \in PGL(2),\ v \in L,\ u\sigma = v\}$$

reduziert und diskret.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $u \in L$, $(\sigma, v) = (\mathrm{id}, u)$. Ist $F = \sum_{\nu=0}^{6} u\, x^{6-\nu} y^\nu$, dann ist $PGL(2) \times_{\mathbf{P}^6} L$ im wesentlichen das algebraische Schema

$$\left\{\sigma = \begin{bmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{bmatrix} \in PGL(2) \mid F^\sigma(1, 0) = F^\sigma(0, 1) = F^\sigma(1, 1) = 0\right\},$$

d. h. das durch

$$F(\xi_1, \xi_2) = F(\eta_1, \eta_2) = F(\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2) = 0, \quad \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 = 1$$

definierte Schema.

Berechnung der Funktionaldeterminante Δ in $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ergibt

$$\Delta = 2\, \frac{\partial F}{\partial x}(1, 0)\, \frac{\partial F}{\partial y}(0, 1)\, \frac{\partial F}{\partial x}(1, 1) \neq 0$$

(da F keine mehrfachen Wurzeln hat), q. e. d.

Alle diese Funktionen sind definiert über dem Ring $\Lambda = \mathbf{Z}\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right]$, und alle Betrachtungen gelten über diesem Ring. Zusammenfassend gilt also:

2.2.3. Satz. *Es sei M das Λ-Schema*

$$\mathrm{Spec}\,(\Lambda[x^5, x^3y, x^2z, xy^2, yz, y^5, xz^3, z^5]).$$

(a) *Die geometrischen Punkte $M(k)$ (k ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik $\neq 2, 3, 5$) entsprechen umkehrbar eindeutig den Isomorphieklassen von Kurven vom Geschlecht 2 über k.*

(b) *Ist S ein Λ-Schema, $(C_s)_{s \in S}$ eine algebraische Familie von Kurven vom Geschlecht 2, so gibt es einen eindeutig bestimmten Λ-Morphismus $j\colon S \to M$, so daß $j(s)$ der zu C_s gehörige Punkt ist.*

(c) *(j, M) ist universell mit* (a) *und* (b).

(d) *Sind die Verzweigungswerte der kanonischen Überlagerung $C_s \to \mathbf{P}^1$ die Nullstellen von $u_0x^6 + u_1x^5y + \cdots$, so ist $j(s)$ durch die Funktion von Hilfssatz 3 definiert.*