

Werk

Titel: 1. Kommentar zu Riemanns "Theorie der Abelschen Funktionen".

Jahr: 1975

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?301416052_0004|log24

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

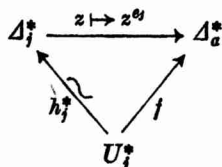
I. Einleitung und Beispiele

1. Kommentar zu Riemanns „Theorie der Abelschen Funktionen“

Die ersten Betrachtungen über Modulprobleme gehen auf RIEMANN zurück, der in seiner berühmten Arbeit „Theorie der Abelschen Funktionen“ 1857 formulierte: „... und es hängt also eine Klasse von Systemen gleichverzweigter $(2p + 1)$ -facher zusammenhängender Funktionen (= Isomorphieklasse Riemannscher Flächen vom Geschlecht p in der heutigen Terminologie) und die zu ihr gehörende Klasse algebraischer Gleichungen von $3p - 3$ stetig veränderlichen Größen ab, welche die Moduln der Klasse genannt werden sollen.“ (Ges. Werke S. 120.) (Dabei ist $p \geq 2$.) Es bedurfte allerdings noch einer langen Entwicklung, um diese Feststellung RIEMANNS zu präzisieren, und diese Bestrebungen haben einen entscheidenden Einfluß auf die Entwicklung der algebraischen Geometrie, der mehrdimensionalen Funktionentheorie, Garbentheorie usw. ausgeübt.

Im folgenden wollen wir den heutigen Stand der Theorie und sich abzeichnende Entwicklungstendenzen darstellen. Wir beginnen jedoch damit, daß wir versuchen, RIEMANNS Gedankengang aus heutiger Sicht nachzuvollziehen.

Eine zusammenhängende kompakte orientierbare Fläche M erhält durch eine stetige Abbildung $f: M \rightarrow \mathbf{P}^1_{\mathbb{C}}$, die außerhalb einer endlichen Menge $S \subset \mathbf{P}^1_{\mathbb{C}}$ eine unverzweigte n -blättrige Überlagerung $M - f^{-1}(S) \rightarrow \mathbf{P}^1_{\mathbb{C}} - S$ induziert, die Struktur einer Riemannschen Fläche aufgeprägt, und für jede kompakte komplexe Mannigfaltigkeit M der Dimension 1 gibt es eine solche holomorphe Abbildung $f: M \rightarrow \mathbf{P}^1_{\mathbb{C}}$ (die Existenz solcher Abbildungen folgert RIEMANN aus dem Dirichletschen Prinzip). Die komplexe Struktur ist außerhalb $f^{-1}(S)$ durch den lokalen Homöomorphismus f induziert. Für $a \in S$ sei Δ_a eine offene Kreisscheibe um a , die keinen weiteren Punkt von S enthält. Es sei $f^{-1}(\Delta_a^*) = U_1^* \cup \dots \cup U_s^*$ die Zerlegung in Zusammenhangskomponenten. Dann ist $U_j^* \rightarrow \Delta_a^*$ eine endliche unverzweigte Überlagerung der punktierten Kreisscheibe, und daher gibt es holomorphe Abbildungen h_j^* .



$(\Delta_j^*$ punktierte Kreisscheibe). h_j^* besitzt nach dem Satz über hebbare Unstetigkeiten eine eindeutig bestimmte Fortsetzung $h: f^{-1}(\Delta_a) \xrightarrow{\sim} \Delta_1 \sqcup \dots \sqcup \Delta_s$, und $f^{-1}(\Delta_a)$ erhält die durch h induzierte komplexe Struktur. Die natürliche Zahl $e_j - 1 = e(P_j) - 1$ heißt die Ordnung der Verzweigung des über a gelegenen Punktes $P_j \in U_j = h^{-1}(\Delta_j)$. RIEMANN benutzt die Konfiguration der endlichen Menge S in $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1$, durch die die komplexe Struktur auf M bis auf endlich viele Möglichkeiten festgelegt ist, zur Untersuchung der Anzahl der Parameter, von denen die komplexe Struktur abhängt. Dazu beschränkt er sich auf einfach verzweigte Überlagerungen, d. h. solche, bei denen über jedem $a \in S$ nur ein Verzweigungspunkt liegt, in dem nur zwei Blätter der Überlagerung zusammentreffen (d. h. $e(P) = 2$).

Beispiele

1. Sechs Verzweigungspunkte $a_1, \dots, a_6$ und zweiblättrige Überlagerungen (Abb. 1). Man verbinde jeweils zwei Punkte durch einen Weg und verhefte zwei Exemplare von $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1$ kreuzweise längs dieser Wege. Topologisch erhält man das in Abb. 3 dargestellte Bild. Man betrachte eine 2-Zelle um jeden dieser Wege. Die Verheftung zweier solcher Zellen längs des Weges ergibt das in Abb. 2 dargestellte topologische Bild (gegenüberliegende Seiten des Weges verheften!).

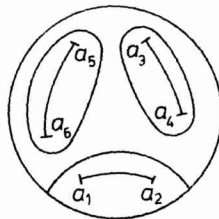


Abb. 1

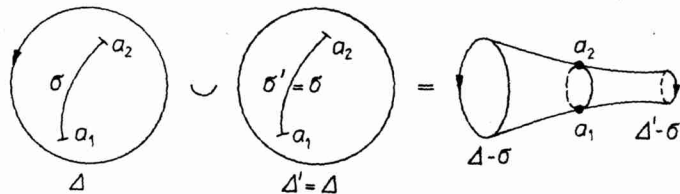


Abb. 2

An die Randkomponente hat man jeweils ein Exemplar $S^2 - \Delta$ anzuheften (in nahe-
 liegender Weise). Das ergibt topologisch zwei zusammengeheftete Tori (Abb. 3).

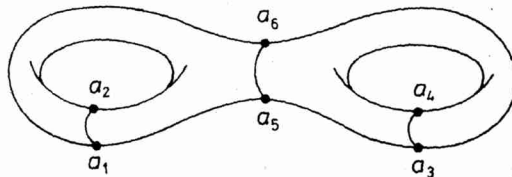


Abb. 3

2. Dreiblättrige Überlagerung mit acht Verzweigungspunkten (topologisches Bild) (vgl. Abb. 4). Die Rechtfertigung, daß man sich auf einfach verzweigte Überlagerungen beschränken kann, ergibt sich daraus, daß es für $n < p$ (p Geschlecht von M)

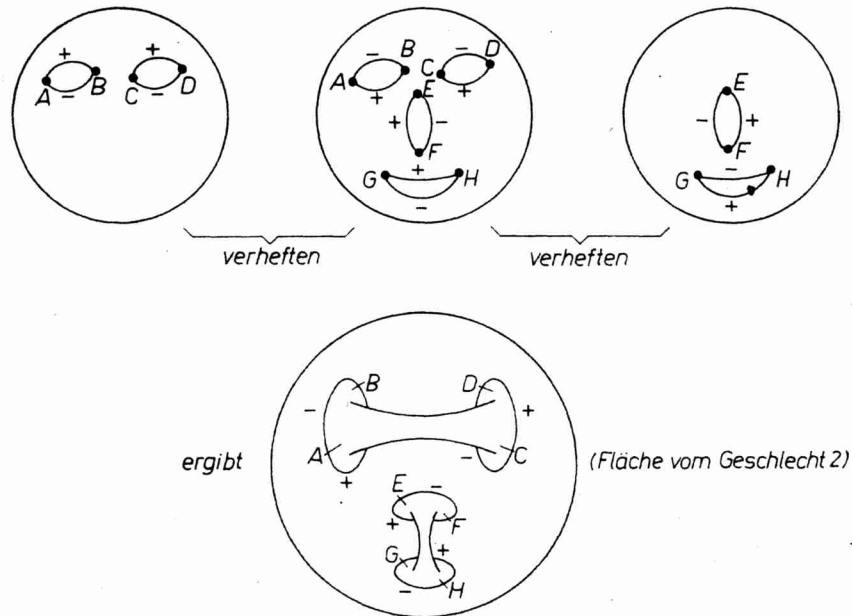


Abb. 4

stets eine einfach verzweigte n -blättrige Überlagerung $f: M \rightarrow \mathbf{P}^1$ gibt; die Anzahl der Verzweigungspunkte ergibt sich aus der Hurwitzschen Geschlechterformel, nach welcher für eine n -blättrige verzweigte Überlagerung $f: M \rightarrow N$

$$\chi(M) = n\chi(N) - \deg(D_f)$$

gilt, wobei $D_f \subset M$ der Differentendivisor und $\chi(M) = 2 - 2g$ (g Geschlecht von M) ist.

Im Fall einfacher Verzweigung ist $\deg D_f = m$ die Anzahl der Verzweigungspunkte; für $N = \mathbf{P}^1$ ist $\chi(N) = 2$, also

$$m = 2(n + p - 1).$$

Hat man umgekehrt $m = 2(n + p - 1)$ Punkte auf $\mathbf{P}^1$, verbindet sie paarweise durch einen Weg und verheftet n Exemplare von $\mathbf{P}^1$, und zwar jeweils zwei Exemplare längs eines dieser Wege, so erhält man nach dem oben beschriebenen Verfahren eine Fläche M , die aus p miteinander verhefteten Tori besteht, und eine einfach verzweigte Überlagerung $f: M \rightarrow \mathbf{P}^1$.

Wir wollen zeigen, daß es für jede Riemannsche Fläche vom Geschlecht p z. B. $(p + 1)$ -blättrige einfach verzweigte Überlagerungen $f: M \rightarrow \mathbf{P}^1$ gibt (der Fall n -blättriger einfach verzweigter Überlagerungen mit $n > p + 1$ ist analog). Dazu sei $(w_1, \dots, w_p)$ eine Basis des Raumes $H^0(M, \Omega_M^1)$ der abelschen Differentiale. Es sei

$M^{(p)}$ das p -fache symmetrische Produkt ($M^{(p)} = M^p/S_p$) von M ; für die Abbildung $M^p \rightarrow M^{(p)}$ schreiben wir $(P_1, \dots, P_p) \mapsto P_1 + \dots + P_p$ ($M^{(p)}$ ist isomorph zur Menge aller Divisoren vom Grade p). Wir zeigen zunächst

Hilfssatz 1. Es sei P_0 ein fester Punkt auf M . Im $M^{(p)}$ gibt es eine offene Menge $U_0 \neq \emptyset$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\dim |P_0 + \dots + P_p| = 1$, und die Elemente aus $|P_0 + \dots + P_p|$ haben höchstens eine zweifache Komponente, für $P_1 + \dots + P_p \in U_0$.

2. $P_1 + \dots + P_p \in U_0 \Rightarrow P_0 \neq P_i \neq P_j$, $\dim |P_1 + \dots + P_p| = 0$.

Es ist $\dim |P_1 + \dots + P_p| \geq 0$, und die Menge $U \subset M^{(p)}$ mit $\dim |P_1 + \dots + P_p| = 0$ ist offen und nicht leer. (Ist t eine Funktion auf M , die in gegebenen nicht notwendig verschiedenen Punkten $P_1, \dots, P_p$ regulär ist und von erster Ordnung ver-

schwindet, $w_i = f_i dt$ und $P_1 + \dots + P_p = e_1 P_1 + \dots + e_s P_s$, $\sum_{i=1}^s e_i = p$, dann ist $P_1 + \dots + P_p \in U$ gleichbedeutend damit, daß

$$\left| \begin{array}{cccccc} f_1(P_1) & f_1'(P_1) & \dots & f_1^{(e_1-1)}(P_1) & f_1(P_2) & \dots & f_1^{(e_s-1)}(P_s) \\ f_p(P_1) & f_p'(P_1) & \dots & f_p^{(e_1-1)}(P_1) & f_p(P_2) & \dots & f_p^{(e_s-1)}(P_s) \end{array} \right| \neq 0$$

ist, da in diesem Fall

$$\begin{aligned} & H^0(M, \Omega_M \otimes \mathcal{O}_M(-P_1 - \dots - P_p)) \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^p \xi_i w_i = w \mid P_j \text{ ist } e_j\text{-fache Nullstelle von } w \right\} = 0 \end{aligned}$$

und nach dem Riemann-Rochschen Satz

$$\dim |P_1 + \dots + P_p|$$

$$= \deg(P_1 + \dots + P_p) - p + \dim H^0(M, \Omega_M \otimes \mathcal{O}_M(-P_1 - \dots - P_p)) \text{ gilt.}$$

Es sei $P_0 \in M$ ein fester Punkt; wie oben zeigt man: Die Menge V aller

$Q_0 + \dots + Q_p \in M^{(p+1)}$ mit $\dim |Q_0 + \dots + Q_p| = 1$, $\dim |Q_0 + \dots + Q_p - P_0| = 0$ ist offen;

$\Phi: V \rightarrow U$, $\Phi(Q_0 + \dots + Q_p) = P_1 + \dots + P_p$ mit

$P_1 + \dots + P_p \in |Q_0 + \dots + Q_p - P_0|$ ist ein Morphismus von V auf U mit den Fasern

$$\Phi^{-1}(P_1 + \dots + P_p) = |P_0 + \dots + P_p| \cong \mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1.$$

Die Menge $W \subset M^{(p+1)}$ aller $Q_0 + \dots + Q_p$, die eine mindestens dreifache oder mindestens zwei zweifache Komponenten enthalten, ist abgeschlossen von der Kodimension 2 in V . (W ist Vereinigung der Bilder der Abbildungen $M^{p-1} \rightarrow M^{(p+1)}$, $(Q_1, \dots, Q_{p-1}) \mapsto 2Q_1 + 2Q_2 + Q_3 + \dots + Q_{p-1}$ bzw. $\mapsto 3Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_{p-1}$.) $\Phi(W \cap V)$ hat also mindestens die Kodimension 1; $U_0 = U - \Phi(W \cap V)$ erfüllt also die Forderungen unseres Hilfssatzes.

Ist f eine nichtkonstante meromorphe Funktion aus $H^0(M, \mathcal{O}_M(P_0 + \dots + P_p))$ mit $P_1 + \dots + P_p \in U_0$, so ist $f: M \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1$ eine einfach verzweigte $(p+1)$ -blättrige Überlagerung.

Die Anzahl der Verzweigungspunkte ist hierbei $2(p+1+p-1) = 4p$. Das Bild S der Menge der Verzweigungspunkte auf $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1$ bestimmt bis auf endliche viele Möglichkeiten die komplexe Struktur von M (siehe unten), S ist aber durch M nicht eindeutig bestimmt. Denn man hat erstens die Möglichkeit, den Divisor $P_1 + \dots + P_p$ in U_0 beliebig zu variieren, zweitens kann man auf f eine beliebige lineare Transformation von $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1$ anwenden, d. h., f (und damit S) ist durch die komplexe Struktur

von M bis auf $p + 3$ Parameter bestimmt, die man beliebig variieren kann, ohne die komplexe Struktur zu ändern. Damit erhält man $4p - (p + 3) = 3p - 3$ Parameter, von denen die komplexe Struktur von M abhängt. Das ist RIEMANN'S Argumentation, die wir im folgenden etwas näher ausführen wollen.

Daß durch S die komplexe Struktur von M bis auf endlich viele Möglichkeiten bestimmt ist, ist eine elementäre topologische Tatsache:

Hilfssatz 2. Die n -blättrigen verzweigten Überlagerungen von $\mathbf{P}^1_{\mathbb{C}}$ mit Verzweigungsort in S entsprechen umkehrbar eindeutig den n -blättrigen unverzweigten Überlagerungen von $\mathbf{P}^1_{\mathbb{C}} - S$ durch die natürliche Zuordnung

$$(f: M \rightarrow \mathbf{P}^1_{\mathbb{C}}) \mapsto (f: M - f^{-1}(S) \rightarrow \mathbf{P}^1_{\mathbb{C}} - S),$$

und die Menge dieser Abbildungen ist endlich.

Beweis. Ist $U \rightarrow \mathbf{P}^1 - S$ eine unverzweigte n -blättrige Überlagerung, $t: T \rightarrow \mathbf{P}^1 - S$ die universelle Überlagerung, so operiert $\pi_1(\mathbf{P}^1 - S, a)$ transitiv auf $\text{Hom}_{\mathbf{P}^1 - S}(T, U)^1$ (durch die Operation auf T); der Stabilisator eines beliebigen $h \in \text{Hom}_{\mathbf{P}^1 - S}(T, U)$ ist die zu U gehörige Untergruppe.

Da $\text{Hom}_{\mathbf{P}^1 - S}(T, U)$ aus n Elementen besteht, erhält man eine Äquivalenz

$$\left\{ \begin{array}{l} n\text{-blättrige verzweigte} \\ \text{Überlagerungen } M \rightarrow \mathbf{P}^1 \\ \text{mit Verzweigung in } S \end{array} \right\} \cong \text{Hom}(\pi_1(\mathbf{P}^1 - S, a), S_n) / \text{Int}(S_n).^2$$

Da $\pi_1(\mathbf{P}^1 - S, a)$ endlich erzeugt ist, ist diese Menge endlich. U bestimmt auf folgende Weise eine Riemannsche Fläche M mit einer Überlagerung $f: M \rightarrow \mathbf{P}^1$, so daß $M - f^{-1}(S) \cong U$ ist: Für jedes $a \in S$ wähle man wie weiter oben beschrieben Kreisscheiben Δ_a^* sowie U_j^*, Δ_j^*, h_j^* und verhefte U im Urbild von Δ_a^* mit Hilfe der h_j^* mit den Δ_j . Auf diese Weise erhält man aus U eine Fläche M und eine Fortsetzung $f: M \rightarrow \mathbf{P}^1$ von $U \rightarrow \mathbf{P}^1 - S$ zu einer eigentlichen stetigen Abbildung, q. e. d.

Ist $H_{n,m}$ die Menge aller stetigen n -blättrigen Überlagerungen $f: M \rightarrow \mathbf{P}^1$ mit m einfachen Verzweigungspunkten, so daß ∞ kein Verzweigungspunkt ist, so erhält man also:

- (i) eine Abbildung $v: H_{n,m} \rightarrow \mathbf{C}^m$ mit endlichen Fasern, $v(f) =: m$ -Tupel der Werte der elementarsymmetrischen Funktionen in den Verzweigungspunkten $a_1, \dots, a_m$ von f ,
- (ii) eine Abbildung $\sigma: H_{n,m} \rightarrow \Sigma$ ($=$: Menge aller konformen Strukturen auf M), und es gilt:

a) $v(H_{n,m}) = \{(z_1, \dots, z_m), \Delta(z_1, \dots, z_m) \neq 0\}$ (Δ =: Diskriminante des Polynoms

$$F = T^m + z_1 T^{m-1} + \dots + z_m),$$

b) $v^{-1}(z_1, \dots, z_m)$ ist endlich,

c) σ ist surjektiv.

¹⁾ $\text{Hom}_{\mathbf{P}^1 - S}(T, U)$ bezeichnet dabei die Menge aller stetigen Abbildungen $h: T \rightarrow U$, die mit $U \rightarrow \mathbf{P}^1 - S$ komponiert die Überlagerungsabbildung ergeben.

²⁾ Mit $\text{Int}(S_n)$ bezeichnen wir die durch innere Automorphismen von S_n auf $\text{Hom}(-, S_n)$ induzierte Operation.