I. Einleitung und Beispiele

1. Kommentar zu Riemanns „Theorie der Abelschen Funktionen“

Die ersten Betrachtungen über Modulprobleme gehen auf Riemann zurück, der in seiner berühmten Arbeit „Theorie der Abelschen Funktionen“ 1857 formulierte: „... und es hängt also eine Klasse von Systemen gleichverzweigter $(2p + 1)$-facher zusammenhängender Funktionen (= Isomorphieklasse Riemannscher Flächen vom Geschlecht p in der heutigen Terminologie) und die zu ihr gehörende Klasse algebraischer Gleichungen von $3p - 3$ stetig veränderlichen Größen ab, welche die Moduln der Klasse genannt werden sollen.“ (Ges. Werke S. 120.) (Dabei ist $p \geqq 2$.) Es bedurfte allerdings noch einer langen Entwicklung, um diese Feststellung Riemanns zu präzisieren, und diese Bestrebungen haben einen entscheidenden Einfluß auf die Entwicklung der algebraischen Geometrie, der mehrdimensionalen Funktionentheorie, Garbentheorie usw. ausgeübt.

Im folgenden wollen wir den heutigen Stand der Theorie und sich abzeichnende Entwicklungstendenzen darstellen. Wir beginnen jedoch damit, daß wir versuchen, Riemanns Gedankengang aus heutiger Sicht nachzuvollziehen.

Eine zusammenhängende kompakte orientierbare Fläche M erhält durch eine stetige Abbildung $f\colon M \to \mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}$, die außerhalb einer endlichen Menge $S \subset \mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}$ eine unverzweigte n-blättrige Überlagerung $M - f^{-1}(S) \to \mathbf{P}^1_{\mathbf{C}} - S$ induziert, die Struktur einer Riemannschen Fläche aufgeprägt, und für jede kompakte komplexe Mannigfaltigkeit M der Dimension 1 gibt es eine solche holomorphe Abbildung $f\colon M \to \mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}$ (die Existenz solcher Abbildungen folgert Riemann aus dem Dirichletschen Prinzip). Die komplexe Struktur ist außerhalb $f^{-1}(S)$ durch den lokalen Homöomorphismus f induziert. Für $a \in S$ sei Δ_a eine offene Kreisscheibe um a, die keinen weiteren Punkt von S enthält. Es sei $f^{-1}(\Delta_a^*) = U_1^* \cup \cdots \cup U_s^*$ die Zerlegung in Zusammenhangskomponenten. Dann ist $U_j^* \to \Delta_a^*$ eine endliche unverzweigte Überlagerung der punktierten Kreisscheibe, und daher gibt es holomorphe Abbildungen h_j^*.

$$\begin{tikzcd}
\Delta_j^* \arrow[rr, "z \mapsto z^{e_j}"] & & \Delta_a^* \\
& U_j^* \arrow[ul, "h_j^*", "\sim"'] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

(Δ_j^* punktierte Kreisscheibe). h_j^* besitzt nach dem Satz über hebbare Unstetigkeiten eine eindeutig bestimmte Fortsetzung $h\colon f^{-1}(\Delta_a) \xrightarrow{\sim} \Delta_1 \sqcup \cdots \sqcup \Delta_S$, und $f^{-1}(\Delta_a)$ erhält die durch h induzierte komplexe Struktur. Die natürliche Zahl $e_j - 1 = e(P_j) - 1$ heißt die Ordnung der Verzweigung des über a gelegenen Punktes $P_j \in U_j = h^{-1}(\Delta_j)$. Riemann benutzt die Konfiguration der endlichen Menge S in $\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}$, durch die die komplexe Struktur auf M bis auf endlich viele Möglichkeiten festgelegt ist, zur Untersuchung der Anzahl der Parameter, von denen die komplexe Struktur abhängt. Dazu beschränkt er sich auf einfach verzweigte Überlagerungen, d. h. solche, bei denen über jedem $a \in S$ nur ein Verzweigungspunkt liegt, in dem nur zwei Blätter der Überlagerung zusammentreffen (d. h. $e(P) = 2$).

Beispiele

1. *Sechs Verzweigungspunkte $a_1, \ldots, a_6$ und zweiblättrige Überlagerungen* (Abb. 1). Man verbinde jeweils zwei Punkte durch einen Weg und verhefte zwei Exemplare von $\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}$ kreuzweise längs dieser Wege. Topologisch erhält man das in Abb. 3 dargestellte Bild. Man betrachte eine 2-Zelle um jeden dieser Wege. Die Verheftung zweier solcher Zellen längs des Weges ergibt das in Abb. 2 dargestellte topologische Bild (gegenüberliegende Seiten des Weges verheften!).

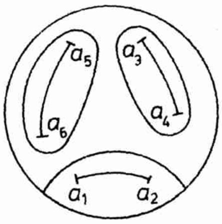

Abb. 1

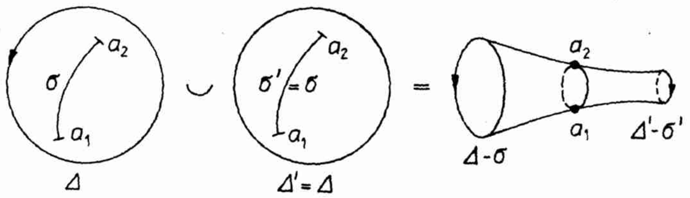

Abb. 2

An die Randkomponente hat man jeweils ein Exemplar $S^2 - \Delta$ anzuheften (in naheliegender Weise). Das ergibt topologisch zwei zusammengeheftete Tori (Abb. 3).

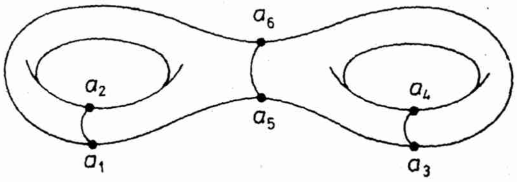

Abb. 3

2. *Dreiblättrige Überlagerung mit acht Verzweigungspunkten (topologisches Bild)* (vgl. Abb. 4). Die Rechtfertigung, daß man sich auf einfach verzweigte Überlagerungen beschränken kann, ergibt sich daraus, daß es für $n < p$ (p Geschlecht von M)

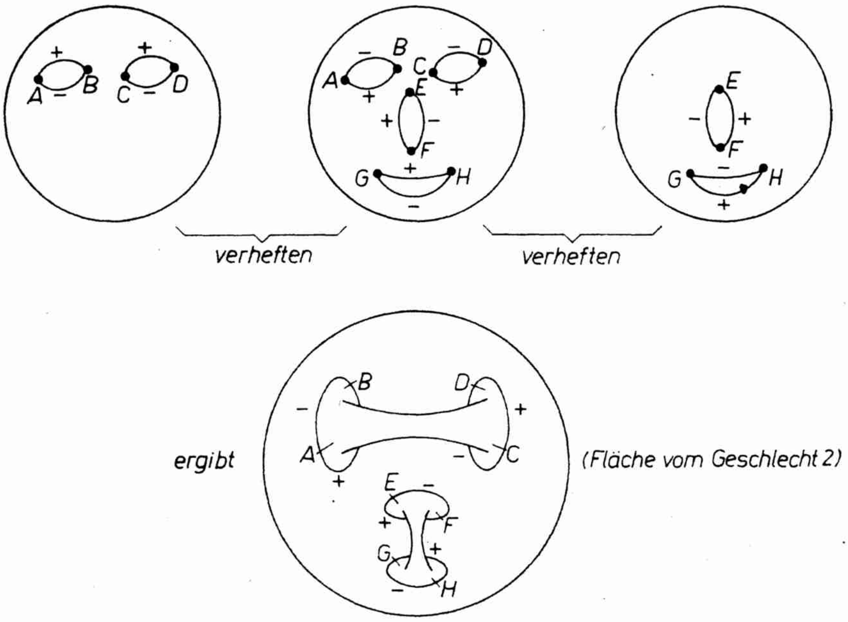

Abb. 4

stets eine einfach verzweigte n-blättrige Überlagerung $f\colon M \to \mathbf{P}^1$ gibt; die Anzahl der Verzweigungspunkte ergibt sich aus der Hurwitzschen Geschlechterformel, nach welcher für eine n-blättrige verzweigte Überlagerung $f\colon M \to N$

$$\chi(M) = n\chi(N) - \deg(D_f)$$

gilt, wobei $D_f \subset M$ der Differentendivisor und $\chi(M) = 2 - 2g$ (g Geschlecht von M) ist.
Im Fall einfacher Verzweigung ist $\deg D_f = m$ die Anzahl der Verzweigungspunkte; für $N = \mathbf{P}^1$ ist $\chi(N) = 2$, also

$$m = 2(n + p - 1).$$

Hat man umgekehrt $m = 2\,(n + p - 1)$ Punkte auf $\mathbf{P}^1$, verbindet sie paarweise durch einen Weg und verheftet n Exemplare von $\mathbf{P}^1$, und zwar jeweils zwei Exemplare längs eines dieser Wege, so erhält man nach dem oben beschriebenen Verfahren eine Fläche M, die aus p miteinander verhefteten Tori besteht, und eine einfach verzweigte Überlagerung $f\colon M \to \mathbf{P}^1$.
Wir wollen zeigen, daß es für jede Riemannsche Fläche vom Geschlecht p z. B. $(p + 1)$-blättrige einfach verzweigte Überlagerungen $f\colon M \to \mathbf{P}^1$ gibt (der Fall n-blättriger *einfach* verzweigter Überlagerungen mit $n > p + 1$ ist analog). Dazu sei $(w_1, \ldots, w_p)$ eine Basis des Raumes $H^0(M, \Omega^1_M)$ der abelschen Differentiale. Es sei

$M^{(p)}$ das p-fache symmetrische Produkt ($M^{(p)} = M^p/S_p$) von M; für die Abbildung $M^p \to M^{(p)}$ schreiben wir $(P_1, \ldots, P_p) \mapsto P_1 + \cdots + P_p$ ($M^{(p)}$ ist isomorph zur Menge aller Divisoren vom Grade p). Wir zeigen zunächst

Hilfssatz 1. *Es sei P_0 ein fester Punkt auf M. Im $M^{(p)}$ gibt es eine offene Menge $U_0 \neq \emptyset$ mit folgenden Eigenschaften:*

1. $\dim |P_0 + \cdots + P_p| = 1$, *und die Elemente aus $|P_0 + \cdots + P_p|$ haben höchstens eine zweifache Komponente. für $P_1 + \cdots + P_p \in U_0$.*
2. $P_1 + \cdots + P_p \in U_0 \Rightarrow P_0 \neq P_i \neq P_j$, $\dim |P_1 + \cdots + P_p| = 0$.

Es ist $\dim |P_1 + \cdots + P_p| \geqq 0$, und die Menge $U \subset M^{(p)}$ mit $\dim |P_1 + \cdots + P_p| = 0$ ist offen und nicht leer. (Ist t eine Funktion auf M, die in gegebenen nicht notwendig verschiedenen Punkten $P_1, \ldots, P_p$ regulär ist und von erster Ordnung verschwindet, $w_i = f_i dt$ und $P_1 + \cdots + P_p = e_1 P_1 + \cdots + e_s P_s$, $\sum_{i=1}^{s} e_i = p$, dann ist $P_1 + \cdots + P_p \in U$ gleichbedeutend damit, daß

$$\begin{vmatrix} f_1(P_1) & f_1'(P_1) & \ldots & f_1^{(e_1-1)}(P_1) & f_1(P_2) & \ldots & f_1^{(e_s-1)}(P_s) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_p(P_1) & f_p'(P_1) & \ldots & f_p^{(e_1-1)}(P_1) & f_p(P_2) & \ldots & f_p^{(e_s-1)}(P_s) \end{vmatrix} \neq 0$$

ist, da in diesem Fall

$$H^0(M, \Omega_M \otimes \mathcal{O}_M(-P_1 - \cdots - P_p)) = \left\{ \sum_{i=1}^{p} \xi_i w_i = w \mid P_j \text{ ist } e_j\text{-fache Nullstelle von } w \right\} = 0$$

und nach dem Riemann-Rochschen Satz
$\dim |P_1 + \cdots + P_p|$
$= \deg(P_1 + \cdots + P_p) - p + \dim H^0(M, \Omega_M \otimes \mathcal{O}_M(-P_1 - \cdots - P_p))$ gilt.)
Es sei $P_0 \in M$ ein fester Punkt; wie oben zeigt man: Die Menge V aller $Q_0 + \cdots + Q_p \in M^{(p+1)}$ mit $\dim |Q_0 + \cdots + Q_p| = 1$, $\dim |Q_0 + \cdots + Q_p - P_0| = 0$ ist offen;
$\Phi\colon V \to U$, $\Phi(Q_0 + \cdots + Q_p) = P_1 + \cdots + P_p$ mit $P_1 + \cdots + P_p \in |Q_0 + \cdots + Q_p - P_0|$ ist ein Morphismus von V auf U mit den Fasern

$$\Phi^{-1}(P_1 + \cdots + P_p) = |P_0 + \cdots + P_p| \cong \mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}.$$

Die Menge $W \subset M^{(p+1)}$ aller $Q_0 + \cdots + Q_p$, die eine mindestens dreifache oder mindestens zwei zweifache Komponenten enthalten, ist abgeschlossen von der Kodimension 2 in V. (W ist Vereinigung der Bilder der Abbildungen $M^{p-1} \to M^{(p+1)}$, $(Q_1 \ldots, Q_{p-1}) \mapsto 2Q_1 + 2Q_2 + Q_3 + \cdots + Q_{p-1}$ bzw. $\mapsto 3Q_1 + Q_2 + Q_3 + \cdots + Q_{p-1}$.) $\Phi(W \cap V)$ hat also mindestens die Kodimension 1; $U_0 = U - \Phi(W - V)$ erfüllt also die Forderungen unseres Hilfssatzes.
Ist f eine nichtkonstante meromorphe Funktion aus $H^0(M, \mathcal{O}_M(P_0 + \cdots + P_p))$ mit $P_1 + \cdots + P_p \in U_0$, so ist $f\colon M \to \mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}$ eine einfach verzweigte $(p+1)$-blättrige Überlagerung.
Die Anzahl der Verzweigungspunkte ist hierbei $2(p + 1 + p - 1) = 4p$. Das Bild S der Menge der Verzweigungspunkte auf $\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}$ bestimmt bis auf endliche viele Möglichkeiten die komplexe Struktur von M (siehe unten), S ist aber durch M nicht eindeutig bestimmt. Denn man hat erstens die Möglichkeit, den Divisor $P_1 + \cdots + P_p$ in U_0 beliebig zu variieren, zweitens kann man auf f eine beliebige lineare Transformation von $\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}$ anwenden, d. h., f (und damit S) ist durch die komplexe Struktur

von M bis auf $p + 3$ Parameter bestimmt, die man beliebig variieren kann, ohne die komplexe Struktur zu ändern. Damit erhält man $4p - (p + 3) = 3p - 3$ Parameter, von denen die komplexe Struktur von M abhängt. Das ist RIEMANNS Argumentation, die wir im folgenden etwas näher ausführen wollen.

Daß durch S die komplexe Struktur von M bis auf endlich viele Möglichkeiten bestimmt ist, ist eine elementare topologische Tatsache:

Hilfssatz 2. *Die n-blättrigen verzweigten Überlagerungen von $\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}$ mit Verzweigungsort in S entsprechen umkehrbar eindeutig den n-blättrigen unverzweigten Überlagerungen von $\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}} - S$ durch die natürliche Zuordnung*

$$(f\colon M \to \mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}) \mapsto (f\colon M - f^{-1}(S) \to \mathbf{P}^1_{\mathbf{C}} - S),$$

und die Menge dieser Abbildungen ist endlich.

Beweis. Ist $U \to \mathbf{P}^1 - S$ eine unverzweigte n-blättrige Überlagerung, $t\colon T \to \mathbf{P}^1 - S$ die universelle Überlagerung, so operiert $\pi_1(\mathbf{P}^1 - S, a)$ transitiv auf $\mathrm{Hom}_{\mathbf{P}^1 - S}(T, U)$[1]) (durch die Operation auf T); der Stabilisator eines beliebigen $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{P}^1 - S}(T, U)$ ist die zu U gehörige Untergruppe.
Da $\mathrm{Hom}_{\mathbf{P}^1 - S}(T, U)$ aus n Elementen besteht, erhält man eine Äquivalenz

$$\left\{\begin{matrix}\text{n-blättrige verzweigte}\\ \text{Überlagerungen } M \to \mathbf{P}^1\\ \text{mit Verzweigung in } S\end{matrix}\right\} \cong \mathrm{Hom}\,(\pi_1(\mathbf{P}^1 - S, a), S_n)/\mathrm{Int}\,(S_n).^{2)}$$

Da $\pi_1(\mathbf{P}^1 - S, a)$ endlich erzeugt ist, ist diese Menge endlich. U bestimmt auf folgende Weise eine Riemannsche Fläche M mit einer Überlagerung $f\colon M \to \mathbf{P}^1$, so daß $M - f^{-1}(S) \cong U$ ist: Für jedes $a \in S$ wähle man wie weiter oben beschrieben Kreisscheiben Δ_a^* sowie U_j^*, Δ_j^*, h_j^* und verhefte U im Urbild von Δ_a^* mit Hilfe der h_j^* mit den Δ_j. Auf diese Weise erhält man aus U eine Fläche M und eine Fortsetzung $f\colon M \to \mathbf{P}^1$ von $U \to \mathbf{P}^1 - S$ zu einer eigentlichen stetigen Abbildung, q. e. d.
Ist $H_{n,m}$ die Menge aller stetigen n-blättrigen Überlagerungen $f\colon M \to \mathbf{P}^1$ mit m einfachen Verzweigungspunkten, so daß ∞ kein Verzweigungspunkt ist, so erhält man also:

(i) eine Abbildung $v\colon H_{n,m} \to \mathbf{C}^m$ mit endlichen Fasern, $v(f) =: m$-Tupel der Werte der elementarsymmetrischen Funktionen in den Verzweigungspunkten $a_1, \ldots, a_m$ von f,

(ii) eine Abbildung $\sigma\colon H_{n,m} \to \Sigma$ (=: Menge aller konformen Strukturen auf M), und es gilt:

a) $v(H_{n,m}) = \{(z_1, \ldots, z_m), \Delta(z_1, \ldots, z_m) \neq 0\}$ (Δ =: Diskriminante des Polynoms $F = T^m + z_1T^{m-1} + \cdots + z_m$),

b) $v^{-1}(z_1, \ldots, z_m)$ ist endlich,

c) σ ist surjektiv.

---

[1]) $\mathrm{Hom}_{\mathbf{P}^1 - S}(T, U)$ bezeichnet dabei die Menge aller stetigen Abbildungen $h\colon T \to U$, die mit $U \to \mathbf{P}^1 - S$ komponiert die Überlagerungsabbildung ergeben.

[2]) Mit $\mathrm{Int}\,(S_n)$ bezeichnen wir die durch innere Automorphismen von S_n auf $\mathrm{Hom}\,(-, S_n)$ induzierte Operation.

Auf Grund von v kann man zeigen, daß $H_{n,m}$ eine komplexe Struktur der Dimension m besitzt (so daß v eine analytische Abbildung ist) (vgl. W. FULTON [1]). Die Fasern von σ, d. h. die Menge aller f, die auf M dieselbe konforme Struktur induzieren, sind $(2n + p - 1)$-dimensionale Mannigfaltigkeiten, da man erstens den Polardivisor $(f)_\infty = f^{-1}(\infty) = P_1 + \cdots + P_n$ beliebig verschieben kann (bis auf eine dünne Menge im Raum $M^{(m)}$ aller Divisoren vom Grade m, in der $P_1 + \cdots + P_n$ nicht liegen darf) und zweitens bei gegebenem Polardivisor $P_1 + \cdots + P_n$ die zugehörigen Funktionen f einen $(n + p - 1)$-dimensionalen Vektorraum $L = L(P_1 + \cdots + P_n)$ bilden (Satz von RIEMANN-ROCH). Alle Funktionen f aus L (bis auf eine dünne Menge) sind in $H_{n,m}$ enthalten. Also ist die Faser von σ ein offener Unterraum von $M^{(m)} \times \mathbf{C}^{n+p-1}$. Da

$$\begin{aligned}\dim H_{n,m} - \dim (M^{(n)} \times \mathbf{C}^{n+p-1}) &= 2(n + p - 1) - (n + n + p - 1)\\ &= 3p - 3\end{aligned}$$

ist, schließt RIEMANN, daß es $3p - 3$ Parameter gibt, die die konformen Strukturen auf M festlegen.

2. Elliptische und hyperelliptische Kurven

2.1. Elliptische Kurven

Zur weiteren Illustration der Problematik betrachten wir den oben ausgeschlossenen Fall $p = 1$ (elliptische Kurven) und im Anschluß daran hyperelliptische Kurven, da hier die Verhältnisse eine explizite Beschreibung gestatten. Wir betrachten alles über einem beliebigen algebraisch abgeschlossenen Grundkörper k der Charakteristik $p \neq 2$.

Ist E eine elliptische Kurve, Q ein Punkt, so definiert das lineare System $|3Q|$ eine Einbettung $E \to \mathbf{P}^2$ (da $0 = \dim |3Q - P_1 - P_2| < \dim |3Q - P_1| < \dim |3Q| = 2$ ist für alle $P_1, P_2 \in E$); also ist E eine singularitätenfreie kubische Kurve. Projiziert man von Q aus auf eine beliebige Gerade, so erhält man eine zweiblättrige Überlagerung $f\colon E \to \mathbf{P}^1$ (da die Projektionsgerade außer Q noch zwei weitere Schnittpunkte mit E hat), und nach der Hurwitzschen Geschlechterformel erhält man außer Q noch drei weitere Verzweigungspunkte P_0, P_1, P_2. Man wähle auf $\mathbf{P}^1$ die Koordinaten so, daß $f(Q) = \infty$, $f(P_0) = 0$, $f(P_1) = 1$, $f(P_2) = \lambda$ (Doppelverhältnis auf $\mathbf{P}^1$) ist. Die komplexe Struktur wird also durch einen Parameter beschrieben. Hierbei ist zu beachten, daß λ nicht eindeutig der komplexen Struktur entspricht. Man kann z. B. noch eine Permutation der drei Punkte $f(P_0)$, $f(P_1)$, $f(P_2)$ betrachten. Entsprechend dem Transformationsverhalten des Doppelverhältnisses erhält man bei der Transposition $(0, 1)$ den Wert $1 - \lambda$ und bei der Transposition $(0, 2)$ den Wert $\dfrac{\lambda}{\lambda - 1}$.

Der Ring der Invarianten von $\mathbf{Z}\left[\lambda, \dfrac{1}{\lambda}, \dfrac{1}{1-\lambda}\right]$ bezüglich S_3 ist $\mathbf{Z}\left[\dfrac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{(\lambda - 1)^2 \lambda^2}\right]$, und die Größe

$$j(E) =: 2^8 \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2(1 - \lambda)^2}$$

heißt die *absolute Invariante* von E.

Wählt man die Koordinaten X, Y, Z in $\mathbf{P}^2$ so, daß Q der Punkt $(0:1:0)$ und $Z = 0$ die Tangente im Punkt Q ist, so genügt E der Gleichung

$$\begin{aligned} F(X, Y, Z) &= Y^2Z + 2(aX + bZ)\,YZ + G(X, Z) \\ &= (Y + aX + bZ)^2\,Z + H(X, Z) = 0; \end{aligned}$$

also hat E nach einer Koordinatentransformation die Gleichung

$$Y^2Z = aX^3 + bX^2Z + cXZ^2 + dZ^3, \qquad a \neq 0. \tag{1}$$

Eine leichte Rechnung zeigt

$$j(E) = 2^8 \frac{(b^2 - 3ac)^3}{a^2 \cdot \Delta}, \tag{2}$$

wobei Δ die Diskriminante von $aX^3 + bX^2 + cX + d$ ist.

Es gilt

2.1.1. Satz

(i) *$E \mapsto j(E)$ ist eine Bijektion zwischen der Menge aller Isomorphieklassen elliptischer Kurven und den Punkten von $M =$* Spec $k[t]$.

(ii) *Ist $(E_s)_{s \in S}$ eine algebraische Familie elliptischer Kurven, so daß ein Schnitt $\varepsilon\colon S \to E$, $\varepsilon(s) \in E_s$, existiert, dann wird $s \mapsto j(s)$ durch einen Morphismus $S \to M$ induziert.*

(iii) *(j, M) ist universell mit den Eigenschaften* (i), (ii).

Zu (i). Bekanntlich erhält die Kurve E durch Auszeichnung eines Punktes Q eine Gruppenstruktur (mit Q als Nullelement, drei Punkte haben die Summe 0, wenn sie bei der oben betrachteten Einbettung kollinear sind, der Punkt $-(X : Y : Z)$ hat die Koordinaten $(X : -Y : Z)$).
Ist $\sigma\colon (E, Q) \xrightarrow{\sim} (E', Q')$ ein Isomorphismus, so induzieren $|3Q|$ und $|3Q'|$ Einbettungen derart, daß

$$\begin{tikzcd} E \arrow[dr] \arrow[d, "\sigma"', "\wr"] & \\ E' \arrow[r] & \mathbf{P}^2 \end{tikzcd}$$

kommutativ ist, also ist $j(E) = j(E')$; nimmt man insbesondere $E = E'$, und $\sigma(P) = P + Q'$, so sieht man, daß j nicht von Q' abhängt.
Ist j gegeben, so kann man daraus λ und damit eine zu j gehörige Kurve bestimmen. Ist $\chi(k) \neq 3$, so ist

$$y^2 = x^3 - 3j(j - 12^3)c^2x - 2j(j - 12^3)^2c^3 \quad (c \in k^\times)$$

die affine Gleichung einer zu j gehörigen Kurve, falls $j \neq 0, \neq 12^3$ ist, und

$$\begin{aligned} y^2 &= x^3 + c \qquad (c \in k^\times) \qquad \text{für } j = 0, \\ y^2 &= x^3 + cx \qquad (c \in k^\times) \qquad \text{für } j = 12^3. \end{aligned}$$

Damit ist (i) bewiesen.

Zu (ii). Diese Behauptung ist unmittelbar klar, wenn die Familie durch eine Gleichung von der Form (1) gegeben ist, wobei a, b, c, d reguläre Funktionen auf S sind und a und Δ keine Nullstellen haben. Die Frage ist außerdem lokal bezüglich S. Der Schnitt $\varepsilon(S) = D$ ist ein relativer Cartierdivisor über S, und für hinreichend kleine S sind $p_*\mathcal{O}_E(D)$, $p_*\mathcal{O}_E(2D)$, $p_*\mathcal{O}_E(3D)$ frei vom Rang 1, 2 bzw. 3 über S (Basiswechsel, vgl. Kap. III).
Dann definiert $\mathcal{O}_E(3D)$ eine Einbettung $E \to \mathbf{P}^2 \times S$, die genau wie oben beschrieben bei geeigneter Wahl der Koordinaten durch eine Gleichung vom Typ (1) bestimmt ist, q. e. d.

Im folgenden nehmen wir $k = \mathbf{C}$ an; in diesem Fall entsprechen die elliptischen Kurven den komplexen Tori $\mathbf{C}/(\mathbf{Z}w_1 + \mathbf{Z}w_2)$ (w_1, w_2 Fundamentalperioden), da jede kompakte komplexe Liesche Gruppe ein komplexer Torus (man betrachte die Liesche Algebra und die Exponentialabbildung als universelle Überlagerung) und da jeder eindimensionale komplexe Torus algebraisch ist (vgl. D. Mumford [6]).
Konkreter läßt sich die Situation wie folgt beschreiben: Gegeben sei ein Periodengitter Γ, das bis auf Isomorphie durch die Fundamentalperioden 1 und $\tau \left(=: \pm \frac{w_2}{w_1}\right)$ erzeugt werde, wobei τ in der oberen Halbebene von $\mathbf{C}$ liegt.
Die elliptischen Funktionen mit den Perioden $1, \tau$ bilden einen eindimensionalen Funktionenkörper, und $\mathbf{C}/\Gamma$ ist komplex isomorph zu der zugehörigen singularitätenfreien kompletten Kurve.
Eine projektive Einbettung von $\mathbf{C}/\Gamma$ erhält man durch die Thetafunktionen. Unter einer Thetafunktion der Ordnung m mit dem Periodengitter Γ versteht man eine ganze Funktion f auf $\mathbf{C}$ mit den Eigenschaften

$$f(z+1) = f(z),$$
$$f(z+\tau) = \varepsilon\left(-m\left(z + \frac{\tau}{2}\right)\right) f(z) \qquad (\varepsilon(t) \underset{\text{def}}{=:} \exp(2\pi i t)).$$

Diese bilden einen Vektorraum der Dimension m, eine Basis bilden die durch Fourierreihen dargestellten Funktionen

$$\theta_m[n](z, \tau) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \varepsilon\left(\frac{\tau}{2m}(m\nu + n)^2\right) \varepsilon((m\nu + n) z) \qquad (0 \leqq n < m).$$

(Gleichmäßige Konvergenz auf jeder kompakten Menge ergibt sich aus der Voraussetzung, daß τ in der oberen Halbebene liegt.)
Insbesondere ist folgende Bezeichnung üblich:

$$\vartheta(z, t) = \theta_1[0](z, \tau) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \varepsilon\left(\frac{\tau\nu^2}{2}\right) \varepsilon(\nu z).$$

Dann gilt (Koeffizientenvergleich!)

$$\theta_m[n](z, \tau) = \varepsilon\left(n\left(z + \frac{n\tau}{m}\right)\right) \vartheta(mz + n\tau, m\tau).$$

Integration der logarithmischen Ableitung um eine Grundmasche des Gitters Γ ergibt, daß eine Thetafunktion $f(z)$ modulo Γ genau m (= Ordnung (f)) Nullstellen hat (entsprechend den Vielfachheiten gezählt). Sind f, g Thetafunktionen der Ordnung m, die $m - 1$ gemeinsame Nullstellen haben, so folgt aus dem Residuensatz

(Residuen von $\frac{f}{g}$ in einer Grundmasche haben die Summe 0), daß auch die letzten Nullstellen beider Funktionen übereinstimmen; insbesondere ist $\frac{f}{g} = c$ konstant, $f = gc$.
Mit diesen Bemerkungen erhält man leicht den folgenden

2.1.2. Satz. *Sind f_0, f_1, f_2 drei linear unabhängige Thetafunktionen der Ordnung* 3, *so liefert*

$$z \mapsto (f_0(z) : f_1(z) : f_2(z)) \in \mathbf{P}^2$$

eine komplexe Einbettung $\mathbf{C}/\Gamma \to \mathbf{P}^2$ auf eine kubische Kurve.

(Eine kubische Relation gilt wegen der Tatsache, daß es höchstens neun linear unabhängige Monome $f_0(z)^{i_0} f_1(z)^{i_1} f_2(z)^{i_2}$, $i_0 + i_1 + i_2 = 3$ (Thetafunktionen der Ordnung 9) gibt.)

Beispiel.

$$f_0 = \vartheta\left(z + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}\right)^3,$$

$$f_1 = \vartheta\left(z + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}\right) \cdot \vartheta\left(z + \frac{\tau}{2}\right)^2,$$

$$f_2 = \varepsilon(-z) \cdot \vartheta(z) \cdot \vartheta\left(z + \frac{1}{2}\right) \cdot \vartheta\left(z + \frac{\tau}{2}\right) \qquad (\vartheta(z) =: \vartheta(z, \tau)).$$

(Ersetzt man z durch $z + \tau$, so multiplizieren sich die drei Funktionswerte mit $-\varepsilon(-3(z + \tau))$; um Thetafunktionen im obigen Sinne zu erhalten, muß man noch eine unwesentliche Verschiebung der Variablen z durchführen.)

Man sieht leicht, daß $\frac{1 + \tau}{2}$ Nullstelle von ϑ ist (indem man in der Fourierentwicklung jeweils das i-te und $(-(i + 1))$-te Glied zusammenfaßt für $i = 0, 1, 2, \ldots$).
Also haben f_0, f_1, f_2 die Nullstellen $0, \left(0, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{\tau + 1}{2}, \frac{\tau}{2}, \frac{1}{2}\right)$, und F ist überall definiert; man erkennt ferner leicht, daß f_0, f_1, f_2 linear unabhängig sind und hieraus, daß F injektiv ist.

Weiterhin ist $\frac{f_1}{f_0}(z)$ eine gerade Funktion von z mit einem zweifachen Pol in $z = 0$; $\frac{f_2}{f_0}(z)$ ist ungerade und hat einen dreifachen Pol in $z = 0$. Somit genügen die Funktionen einer kubischen Relation

$$\left(\frac{f_2}{f_0}\right)^2 = a\left(\frac{f_1}{f_0}\right)^3 + b\left(\frac{f_1}{f_0}\right)^2 + c\left(\frac{f_1}{f_0}\right), \quad a \neq 0,$$

bzw. homogen:

$$f_2^2 f_0 = a f_1^3 + b f_1^2 f_0 + c f_1 f_0^2$$

(das konstante Glied ist Null, da $\frac{1}{2}$ eine gemeinsame Nullstelle von f_2 und f_1 ist).
Indem man durch f_0 bzw. f_1 dividiert und beide Seiten für $z = 0$ bzw. $z = \frac{1}{2}$ aus-

rechnet, erhält man

$$a = c = \frac{\vartheta(0)^2 \cdot \vartheta\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\vartheta\left(\frac{\tau}{2}\right)^4}, \qquad b = \frac{\vartheta(0)^4 + \vartheta\left(\frac{1}{2}\right)^4}{\vartheta\left(\frac{\tau}{2}\right)^4}.$$

Die Wurzeln von $ax^3 + bx^2 + cx = 0$ sind daher

$$e_1 = 0, \quad e_2 = \frac{\vartheta(0)^2}{\vartheta\left(\frac{1}{2}\right)^2}, \qquad e_3 = \frac{\vartheta\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\vartheta(0)^2}.$$

Hieraus folgt, daß die absolute Invariante durch

$$j(\tau) = 2^8 \frac{\left[\vartheta(0,\tau)^8 + \vartheta\left(\frac{1}{2},\tau\right)^8 - \vartheta(0,\tau)^4 \cdot \vartheta\left(\frac{1}{2},\tau\right)^4\right]^3}{\vartheta(0,\tau)^8\, \vartheta\left(\frac{1}{2},\tau\right)^8 \cdot \left[\vartheta\left(\frac{1}{2},\tau\right)^4 - \vartheta(0,\tau)^4\right]^2}$$

gegeben ist.

Daher ist $j(\tau)$ Quotient der Nullwerte zweier Thetafunktionen der Ordnung 24 *zu dem Gitter $\Gamma = \mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau$.*

Es sei umgekehrt eine Kurve E durch $y^2 = x^3 - ax - b$ gegeben (d. h. als zweiblättrige Überlagerung von $\mathbf{P}^1$ mit den Verzweigungspunkten e_1, e_2, e_3, ∞).

Indem man $\frac{dx}{y}$ auf der zugehörigen Riemannschen Fläche längs der Fundamentalzyklen γ_1, γ_2 integriert, erhält man Perioden w_1, w_2, und $E \xrightarrow{u} (\mathbf{Z}w_1 + \mathbf{Z}w_2)$ wird durch

$$(x, y) \mapsto \left(\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \frac{dx}{y}\right) \bmod (\mathbf{Z}\omega_1 + \mathbf{Z}\omega_2)$$

gegeben. Das topologische Bild zeigt Abb. 5 (vgl. S. 106).
Insbesondere sind die Perioden (lokal) stetig von dem Doppelverhältnis
$\lambda = (e_1 : e_2 : e_3 : \infty)$ abhängig.

2.2. Kurven vom Geschlecht 2 (vgl. J. Igusa [1] und P. Samuel [1])

Für singularitätenfreie komplette Kurven $\mathbf{C}$ vom Geschlecht 2 sind die Verhältnisse besonders einfach; zu jeder solchen Kurve gibt es nämlich eine kanonische Überlagerung $f: \mathbf{C} \to \mathbf{P}^1$, da es genau zwei linear unabhängige Abelsche Differentiale w_1, w_2 auf $\mathbf{C}$ gibt; es ist $f(x) = (w_1(x) : w_2(x))$, und f hat sechs Verzweigungspunkte.
Bezüglich der kanonischen Abbildung gilt allgemein folgendes: Wir setzen wieder der Einfachheit halber voraus, daß die Charakteristik des Grundkörpers $\neq 2$ ist.

2.2.1. Satz. *Ist C eine singularitätenfreie Kurve vom Geschlecht $p \geqq 2$ und ω_C die Garbe der 1-Formen, so hat das lineare System $|\omega_C|$ keine Basispunkte, und die zugehörige* *kanonische Abbildung f: $C \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}^1$ ist entweder eine abgeschlossene Einbettung oder $f(C) \cong \mathbf{P}^1$ und $C \to f(C)$ ist eine zweiblättrige Überlagerung mit $2p + 2$ Verzweigungspunkten (hyperelliptischer Fall).*

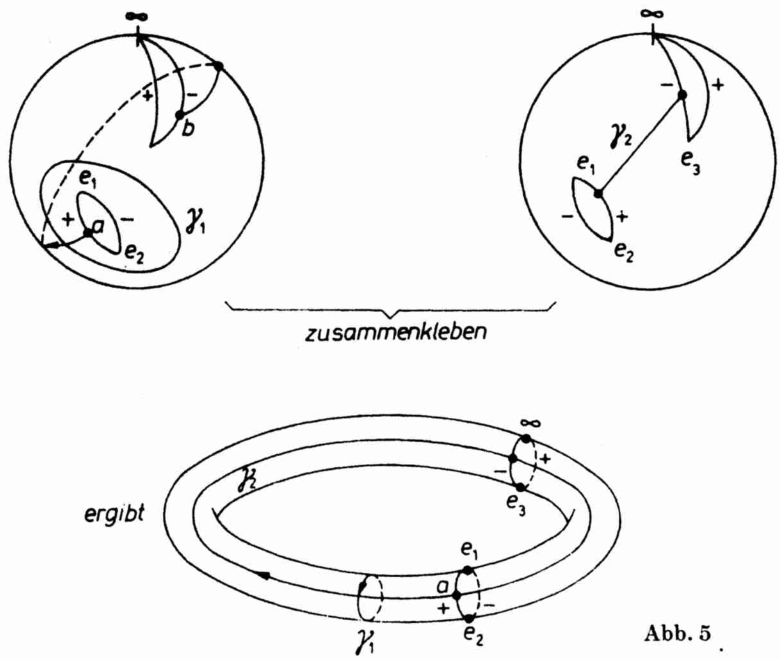

Abb. 5

Beweis. Ist $|\omega_C \otimes \mathcal{O}_C(-P)| = |\omega_C|$ (d. h. P Basispunkt), so ist $\dim |\mathcal{O}(P)| = 1$ (Satz von RIEMANN-ROCH), d. h., es gibt eine rationale Funktion f mit einem einfachen Pol in P, d. h., C ist vom Geschlecht 0. Also hat $|\omega_C|$ für $p \geqq 2$ keine Basispunkte.

Wenn f keine Einbettung ist, gibt es zwei (nicht notwendig verschiedene) Punkte P, Q, so daß $|\omega_C(-P - Q)| = |\omega_C(P)|$, also

$$|\mathcal{O}_C(P)| \subsetneqq |\mathcal{O}_C(P + Q)|$$

ist, und es gibt eine rationale Funktion g mit dem Poldivisor $P + Q$; g ist daher eine zweiblättrige Überlagerung g: $C \to \mathbf{P}^1$. Bei geeigneter Wahl von y ist dann C in affinen Koordinaten durch

$$y^2 = F(x), \qquad \deg F(x) = 2p + 1 \text{ oder } 2p + 2 \tag{3}$$

definiert, wobei $F(x)$ nur einfache Nullstellen hat. Man rechnet für jede durch eine Gleichung (3) definierte Kurve direkt nach:

a) $\dfrac{dx}{y}, x\dfrac{dx}{y}, \ldots, x^{p-1}\dfrac{dx}{y}$ ist eine Basis der abelschen Differentiale (also ist $g(x, y) = x$ bis auf Isomorphie die kanonische Abbildung).

b) Die Verzweigungspunkte liegen über den Nullstellen von $F(x)$ (und über ∞, wenn $\deg F = 2p + 1$ ist).

Wir kehren jetzt zu Kurven C vom Geschlecht 2 und der kanonischen Überlagerung $f: C \to \mathbf{P}^1$ zurück; offensichtlich ist $f: C \to \mathbf{P}^1$ durch die Bilder der sechs Verzweigungspunkte auf $\mathbf{P}^1$, d. h. durch eine Form sechsten Grades (binäre Sextik)

$$u_0X^6 + u_1X^5Y + u_2X^4Y^2 + \cdots + u_6Y^6 = u(X, Y)$$

eindeutig bestimmt, und die Isomorphieklassen der Kurven vom Geschlecht 2 entsprechen den Punkten des Orbitraums

$$M = U/PGL(2), \ (u\sigma)(X, Y) = u(aX + bY, cX + dY) \text{ für } \sigma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in PGL(2).$$

($U \subset \mathbf{P}^6$ Unterraum der binären Sextiken, Menge aller $(u_0 : u_1 : \ldots : u_6)$, deren Diskriminate $D(u_0, \ldots, u_6) \neq 0$ ist).
Ist $j(C)$ der entsprechende Punkt aus M, so gilt wieder:

2.2.2. Satz

(i) *Ist $\mathfrak{M}$ die Menge aller Isomorphieklassen von Kurven vom Geschlecht 2, so ist $\mathfrak{M} \to M$, $C \mapsto j(C)$ eine Bijektion.*

(ii) *Ist $(C_s)_{s \in S}$ eine beliebige algebraische Familie von Kurven vom Geschlecht 2, so wird $s \mapsto j(s)$ durch einen Morphismus $S \to M$ induziert, der durch $C|S$ eindeutig bestimmt ist. (Dabei wird vorausgesetzt, daß 2 auf S umkehrbar ist.)*

(iii) *(j, M) mit den Eigenschaften (i) und (ii) ist universell.*

Die Konstruktion des Raumes der Invarianten der binären Sextiken über C als Grundkörper ist seit dem vorigen Jahrhundert bekannt (A. Clebsch [1]). Eine Beschreibung von M erhält man z. B. wie folgt:
Es sei $\tilde{\mathfrak{M}}$ das System aller Isomorphieklassen von 7-Tupeln $(C, P_1, \ldots, P_6)$, C eine Kurve vom Geschlecht 2, $P_i \in \mathbf{P}^1$ seien die Bildpunkte der Verzweigungspunkte der kanonischen Abbildung. Es sei $\tilde{M} \subset \mathbf{A}^3$ die Menge aller Punkte $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbf{A}^3$, $\lambda_i \neq 0, 1$; dann erhält man eine Bijektion $\tilde{j}: \tilde{\mathfrak{M}} \to \tilde{M}$ durch

$$(C, P_1, \ldots, P_6) \to (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad \text{mit} \quad \lambda_i = (P_4 : P_5 : P_6 : P_i)$$

(Doppelverhältnis).
Die symmetrische Gruppe S_6 operiert in kanonische Weise auf $\tilde{\mathfrak{M}}$, und diese Operation überträgt sich auf $\tilde{M}$, so daß S_6 algebraisch auf $\tilde{M}$ operiert. Daher induziert $\tilde{j}$ eine Bijektion

$$j: \mathfrak{M} = \tilde{\mathfrak{M}}/S_6 \to \tilde{M} = M/S_6;$$

insbesondere ist M ein dreidimensionales normales affines Schema.
Es ist klar, wie man algebraische Familien $(C|S, \sigma_1, \ldots, \sigma_6)$, $\sigma_i: S \to \mathbf{P}^1 \times S$ aus $\tilde{\mathfrak{M}}$ zu definieren hat. Für algebraische Familien aus $\tilde{\mathfrak{M}}$ mit dem Parameterschema S induziert die Abbildung

$$S \to \tilde{\mathfrak{M}} \xrightarrow{\tilde{j}} \tilde{M}, \quad s \to \tilde{j}(s)$$

einen Morphismus $S \to M$.
Ist $C|S$ eine algebraische Familie, so wollen wir zeigen, daß $s \mapsto j(s)$ einen Morphismus $S \to M$ induziert. Da die Frage lokal bezüglich S ist, können wir annehmen, daß S zusammenhängend und $p_*\omega_{C|S}$ frei ist ($p: C \to S$ Strukturmorphismus); durch die globalen Schnitte wird also ein S-Morphismus $C \to \mathbf{P}^1 \times S$ induziert. Es sei $D = D_{C|S} \subset C$ der Verzweigungsdivisor (Differente) von $C|S$ über $\mathbf{P}^1 \times S/S$; dann ist $D \to S$ eine sechsblättrige Etalüberlagerung, die eventuell in mehrere Zusammenhangskomponenten zerfällt. Ist $S' = D \times_S \cdots \times_S D$ (6mal), so ist $S' \to S$ ebenfalls eine Etalüberlagerung und $S'/S_6 \cong S$.

Die induzierte Familie $C' = C \times_S S'$ besitzt sechs Schnitte $S' \to D \times_S S' \subset C'$; durch Festlegung einer Reihenfolge dieser Schnitte erhält man also einen Morphismus $\tilde{j}: S' \to \tilde{M}$ mit $\tilde{j}(s') = j(C'_{s'}) = j(C_s)$ (wenn s' über $s \in S$ liegt), und $S' \xrightarrow{\tilde{j}} \tilde{M} \to M$ ist ein S_6-äquivarianter Morphismus (triviale Operation auf M). Also induziert $\tilde{j}$ einen eindeutig durch $C|S$ bestimmten Morphismus $j: S \to M$ mit $j(s) = j(C_s)$.
Zur genaueren Bestimmung von M müssen wir ein Erzeugendensystem für die Invarianten binärer Sextiken ausrechnen. Das ist mit erheblichem Rechenaufwand verbunden und war einer der Höhepunkte der klassischen Invariantentheorie.
Wir betrachten die kanonische Abbildung

$$(\mathbf{P}^1)^6 \to (\mathbf{P}^1)^6/S_6 = \mathbf{P}^6,$$

$$((u_1 : v_1), \ldots, (u_6 : v_6)) \mapsto \prod_{i=1}^{6} (u_i X + v_i Y);$$

eine rationale Invariante auf $\mathbf{P}^6$ bezüglich $GL(2)$ ist umkehrbar eindeutig durch eine *symmetrische* rationale Funktion $f(P_1, \ldots, P_6)$ auf $(\mathbf{P}^1)^6$ bestimmt, so daß $f(\sigma P_1, \ldots, \sigma P_6) = \det(\sigma)\, g f(P_1, \ldots, P_6)$ (g Gewicht der Invarianten) für alle $\sigma \in GL(2)$ gilt.
Die Funktion f ist Quotient zweier eindeutig bestimmter 6-homogener Formen $F = F(u_1, v_1, \ldots, u_6, v_6)$ und $G = G(u_1, \ldots)$, die symmetrisch in den (u_i, v_i) sind, also insbesondere denselben Grad m bezüglich jeder Variablenreihe $w_i = (u_i, v_i)$ haben.
Wenn die Charakteristik 0 ist, gilt:
Ist m der Grad von F in jeder Variablenreihe w_i, so ist F von der Form $P(w_1, w_2, \ldots, w_6; w_1, \ldots, w_6; w_1, \ldots, w_6)$ (m-mal), wobei I eine symmetrische $(6m)$-Linearform in $w_1, \ldots, w_6, w_7, \ldots, w_{6m}$ ist (P gewinnt man durch m-fache Polarisierung von F).
Wir bezeichnen mit $[w_i, w_j]$ die Determinante von w_i, w_j. Nach dem ersten Hauptsatz der klassischen Invariantentheorie gilt (vgl. etwa J. B. CARRELL und J. DIEUDONNÉ [1]): Es sei p eine natürliche Zahl. Es gibt p-lineare Invarianten $P(w_1, \ldots, w_p)$ bezüglich der Operation von $GL(2)$ auf dem Raum $\otimes^p E$ ($E = C^2$) nur dann, wenn $p = 2g$ ($2 = \dim E$) ist; jede solche Invariante ist eine Linearkombination von Invarianten der Form

$$[\omega_{\pi(1)}, \omega_{\pi(2)}]\,[\omega_{\pi(3)}, \omega_{\pi(4)}] \cdots [\omega_{\pi(2g-1)}, \omega_{\pi(2g)}], \quad \pi \in S_p.$$

Wir müssen für unser Problem unter diesen Invarianten P die symmetrischen aussuchen ($p = 6m$) und dann $w_1 = w_7 = w_{13} = \cdots$, $w_2 = w_8 = w_{14} = \cdots$ usw. einsetzen; auf diese Weise erhält man alle Invarianten $F(w_1, \ldots, w_6)$ vom Grade m in jedem w_i. Da die Formen $[w_i, w_j]^2$ Faktoren sind, die in die Diskriminante derjenigen binären Formen $F(x, y)$ eingehen, die w_i, w_j als Nullstellen besitzen, erhält man z. B. für

$$F = u_0 x^6 + u_1 x^5 y + u_2 x^4 y^2 + \cdots + u_6 y^6$$

die folgenden Invarianten:

Gewicht 6. $A(u) = \sum\limits_{\substack{G_1 G_2 G_3 = F \\ \deg G_i = 2}} \Delta_2(G_1)\, \Delta_2(G_2)\, \Delta_2(G_3)$

($\Delta_2(ax^2 + bxy + cy^2) = b^2 - 4ac$, Diskriminante für Formen zweiten Grades. Summiert wird über alle 15 wesentlich verschiedenen Zerlegungen von F in drei quadratische Formen).

Gewicht 12. $B(u) = \sum_{\substack{F=H_1H_2\\ \deg H_i=3}} \Delta_3(H_1)\,\Delta_3(H_2)$

(10 Summanden, $\Delta_3(ax^3 + bx^2y + cxy^2 + fy^3) = (bc)^2 - 4ac^3 - 4b^3d - 27(ad)^2 + 18abcd$, Diskriminante kubischer Formen).

Gewicht 18. $C(u) = \sum_{\substack{F=H_1H_2=G_1G_2G_3\\ G_i \nmid H_j}} \Delta_3(H_1)\,\Delta_3(H_2)\,\Delta_2(G_1)\,\Delta_2(G_2)\,\Delta_2(G_3)$

(60 Summanden, H_i kubische Formen, G_j quadratische Formen).

Gewicht 30. $D(u) = \Delta_6(F)$
Diskriminante von F).

Igusa hat gezeigt, daß man mittels dieser vier Invarianten die Mannigfaltigkeit M und die Abbildung j beschreiben kann (vgl. auch P. Samuel [1]).

Wir wollen hier eine andere Methode zur Herleitung dieser Resultate angeben, wir schließen dabei der Einfachheit halber die Fälle der Charakteristik 2, 3, 5 aus, die einige gesonderte Betrachtungen erfordern.
Eine andere Möglichkeit, Invarianten $J(u_0, \ldots, u_6) = J(u)$ direkt auszurechnen, besteht darin, daß man die Eigenschaften

$$\left.\begin{aligned} &J(h^6u_0, h^6u_1, \ldots, h^6u_6) = h^{2g}J(u_0, \ldots, u_6), \\ &J(u_6, u_5, \ldots, u_0) = (-1)^g J(u_0, u_1, \ldots, u_6), \\ &J(h^6u_0, h^5u_1, \ldots, hu_5, u_6) \doteq h^g J(u_0, \ldots, u_6) \end{aligned}\right\} \quad (g \text{ Gewicht von } J)$$

benutzt (die aus der Invarianz bezüglich $\begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ folgen), und die Differentialgleichung

$$6u_0 \frac{\partial J}{\partial u_1} + 5u_1 \frac{\partial J}{\partial u_2} + 4u_2 \frac{\partial J}{\partial u_3} + \cdots + u_5 \frac{\partial J}{\partial u_6} = 0$$

(die aus der Invarianz von J bezüglich $\begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ folgt) benutzt. Das liefert z. B. für $g = 6$

$$A(u) = -2(120u_0u_6 - 20u_1u_5 + 8u_2u_4 - 3u_3^2).$$

Hilfssatz 1. *$A(u) = B(u) = C(u) = D(u) = 0$ gilt genau dann, wenn F eine mindestens vierfache Nullstelle hat, d. h. auf den Orbits der Formen x^6, x^5y, x^4y^2, $x^4y(x-y)$. Ferner gilt $A = B = D = 0$ außer auf den obigen Formen noch genau auf den Orbits von $F = xy^2(x-y)(x^2 - 3xy + 3y^2)$ und $xy^2(x^3 - y^3)$.*

Beweis. Daß die Invarianten auf den angegebenen Formen verschwinden, rechnet man unmittelbar nach.

Es sei jetzt umgekehrt $F = u_0x^6 + u_1x^5y + \cdots$ eine Form, für die $D(u) = 0$ ist (F hat also eine zweifache Wurzel); wir nehmen o. B. d. A. an, daß F mindestens zwei verschiedene Wurzeln hat, so daß man F in die Gestalt

$$F = xy^2G, \qquad G \text{ eine kubische Form,}$$

bringen kann (also $u_0 = u_1 = u_6 = 0$). Eine leichte Rechnung zeigt, daß in diesem Fall

$$B = (u_4^2 - 3u_3u_5)\,u_2^2, \qquad A = 3u_3^2 - 8u_2u_4$$

gilt (bis auf den Faktor 2).
Die Gleichungen $A = B = 0$ haben die folgenden Lösungen:

1. $u_2 = u_3 = 0$, entspricht den Formen xy^4L, L linear (also o. B. d. A. $L = x$, $L = y$ oder $L = x - y$).

2. $u_2 = 1$, $u_3 = u_4 = 0$, entspricht den Formen $xy^2(x^3 - \alpha y^3)$.

3. $u_2 = 1$, $u_3 \neq 0$, dann ist die allgemeine Lösung von $A = B = 0$ gleich $(u_3, u_4, u_5) = (4\alpha, 6\alpha^2, 3\alpha^3)$, $\alpha \neq 0$; diese entsprechen den Formen

$$xy^2(x^3 + 4\alpha x^2y + 6\alpha^2xy^2 + 3\alpha^3y^3) = xy^2(x + y)\,(x^2 + 3\alpha xy + 3\alpha^2y^2).$$

Der Rest der Behauptung ist klar.

Folgerung. *Sind A, B, C, D Unbestimmte vom Grad* 1, 2, 3, 5, *so ist*

$$\mathbf{P}^6 \to \overline{M} =: \operatorname{Proj}(k[A, B, C, D]),$$
$$(u_0 : \ldots : u_6) \mapsto [A(u), B(u), C(u), D(u)]$$

eine rationale Abbildung von $\mathbf{P}^6$ auf $\overline{M}$. Das Schema M ist normal.

Beweis. Es ist $\dim \overline{M} = 3$ und z. B. die Dimension der Faser $[A, B, C, D] = [0, 0, 1, 0]$ gleich 3; also hat die allgemeine Faser ebenfalls die Dimension 3, und die Abbildung ist rational. Da A, B, C, D algebraisch unabhängig sind, ist $\overline{M}$ normal.

Ist M_D bzw. $(\mathbf{P}^6)_D$ die offene Menge mit $D \neq 0$, so erhält man einen Morphismus

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{P}^6)_D \arrow[rr] \arrow[dr, "j"'] & & \overline{M}_D \\
& M \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

und wir wollen zeigen, daß $M \cong \overline{M}_D$ ist, d. h.

$$M = \operatorname{Spec}\,(k[x^5, xy, x^2z, xy^2, yz, y^5, xz^3, z^5])$$
$$\text{mit } x^5D = A^5,\; x^3yD = A^3B,\; x^2zD = A^2C, \ldots, z^5D = C^5.$$

Hilfssatz 2. *Es gibt eine $PGL(2)$-stabile offene Menge $U \subseteq (\mathbf{P}^6)_D$, auf der $PGL(2)$ frei operiert (d. h., für die $U \times PGL(2) \to U \times U$, $(u, \sigma) \mapsto (u\sigma, u)$ eine abgeschlossene Einbettung ist).*

Beweis. Wir haben ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{P}^1)^6_D \arrow[r] \arrow[d] & (\mathbf{P}^6)_D \arrow[d, "j"] \\
(\mathbf{P}^1)^3_D \arrow[r] & M
\end{tikzcd}$$

wobei die vertikalen Pfeile Quotienten bezüglich $PGL(2)$ sind ($(\mathbf{P}^1)^6_D \to (\mathbf{P}^1)^3_D$ ist die Abbildung

$$(x_1, \ldots, x_6) \mapsto ((x_4 : x_5 : x_6 : x_1), (x_4 : x_5 : x_6 : x_2), (x_4 : x_5 : x_6 : x_3))^{1)},$$

und $(\mathbf{P}^1)^3_D$ ist die Menge aller Tripel (y_1, y_2, y_3) mit $y_i \neq y_j \neq 0, 1, \infty$).
Die horizontalen Pfeile sind Quotienten bezüglich S_6, und $(\mathbf{P}^1)^3_D \to M$ ist etal über einer offenen Menge $U_0 \subset M$ (die Zerlegungsgruppe

$$\mathrm{Stab}\,(y_1, y_2, y_3) = \{s \in S_6 ; s(y_1, y_2, y_3) = (y_1, y_2, y_3)\}$$

ist nur auf einer abgeschlossenen Teilmenge von Eins verschieden). Die Fasern von j über U_0 sind dann reduzierte Schemata, und in $j^{-1}(U_0)$ gibt es eine nichtleere, stabile offene Menge U, so daß für $u \in U$ gilt:

$$PGL(2) \to U, \quad \sigma \mapsto u\sigma \text{ ist injektiv.}$$

(Denn ist $u\sigma = u$ für ein $\sigma \in PGL(2)$, so permutiert σ die sechs Wurzeln der zu u gehörigen Form sechsten Grades, hat also endliche Ordnung, und daher ist bei geeigneten Koordinaten σ die Abbildung $(x : y) \to (\varepsilon x : y)$, ε eine zweite, dritte, vierte, fünfte oder sechste Einheitswurzel. Die Formen, die bei diesen Transformationen invariant bleiben, sind in einer echten abgeschlossenen Teilmenge von $(\mathbf{P}^6)_D$ enthalten.)
Man erhält dann

$$PGL(2) \times U \xrightarrow{\sim} U \times_{U_0} U,$$
$$(\sigma, u) \mapsto (u\sigma, u),$$

q. e. d.

Es sei jetzt $L \subset \mathbf{P}^6$ der Unterraum der Formen vom Grade 6, die in $(1 : 0)$, $(0 : 1)$ und $(1 : 1)$ verschwinden, d. h., L ist der durch $F(1, 0) = F(0, 1) = F(1, 1) = 0$ definierte lineare Unterraum der Formen sechsten Grades.
Jedes $PGL(2)$-Orbit von Punkten aus $(\mathbf{P}^6)_D$ schneidet L (da man durch eine projektive Transformation drei der sechs Nullstellen der Form F, die dem Punkt aus $(\mathbf{P}^6)_D$ entspricht, in die Punkte $\infty, 0, 1$ überführen kann).
Da es 120 Möglichkeiten gibt, unter sechs verschiedenen Punkten drei auszuwählen, und da durch drei Punkte und ihre Bilder genau eine projektive Transformation bestimmt wird, schneiden die Fasern von $j: U \to j(U) \subseteq M$ den Unterraum L in genau 120 Punkten.

Hilfssatz 3. *$L_D \to \overline{M}_D$, $u \mapsto (A(u), B(u), C(u), D(u))$ ist ein ganzer Morphismus vom Grade* 120, *und $M \to M_D$ ist ein Isomorphismus.*

Beweis. Die Einschränkung von $\mathbf{P}^6 \to \overline{M}$ auf L ist in den endlich vielen Punkten, die den Formen $xy(x - y)\,G$, $G = x^3$, y^3 oder $(x - y)^3$ entsprechen, nicht definiert. Hieraus folgt leicht, daß $L_D \to \overline{M}_D$ ein eigentlicher, rationaler Morphismus ist, also insbesondere endlich (da L_D offen ist).
Die Faser in einem Punkt aus $\overline{M}_D$, in dem $B = t_1A^2$, $C = t_2A^3$, $D = t_3A^5$ gilt, ist im Schnittprodukt der drei Flächen in L mit den Gleichungen

$$B(u) - t_1A^2(u) = C(u) - t_2A^3(u) = D(u) - t_3A^5(u) = 0$$

[1]) Mit $(a{:}b{:}c{:}d)$ wird das Doppelverhältnis der Punkte a, b, c, d auf $\mathbf{P}^1$ bezeichnet.

enthalten, und nach dem Satz von BÉZOUT ist (für allgemeine t_1, t_2, t_3) dieses Schnittprodukt ein Zyklus vom Grad $4 \cdot 6 \cdot 10 = 240$.
Da beispielsweise $x^4y(x - y)$ ein Punkt dieses Zyklus ist, der nicht zur Faser gehört, hat der Morphismus $L_D \to \overline{M}_D$ einen Grad $d < 240$, und wegen der Faktorisierung $L_D \to M \to \overline{M}_D$ ist der Grad $[L_D : M]$ ein Teiler von d.
Es genügt zu zeigen, daß $[L_D : M] = 120$ ist, denn dann ist $d = 120$ und $M \to \overline{M}_D$ birational (und endlich, also biregulär, da M_D normal ist).
Da jede Faser von $U \to j(U) \subset M$ den Unterraum in 120 Punkten schneidet und isomorph zu $PGL(2)$ ist, genügt zu zeigen, daß L diese Fasern transversal schneidet, bzw. folgenden

Hilfssatz 4. *Für* $u \in (\mathbf{P})^6_D$ *ist*

$$PGL(2) \times_{\mathbf{P}^6} L = \{(\sigma, v) \mid \sigma \in PGL(2),\, v \in L,\, u\sigma = v\}$$

reduziert und diskret.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $u \in L$, $(\sigma, v) = (\mathrm{id}, u)$. Ist $F = \sum_{\nu=0}^{6} u\, x^{6-\nu} y^{\nu}$, dann ist $PGL(2) \times_{\mathbf{P}^6} L$ im wesentlichen das algebraische Schema

$$\left\{\sigma = \begin{bmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{bmatrix} \in PGL(2) \mid F^\sigma(1, 0) = F^\sigma(0, 1) = F^\sigma(1, 1) = 0\right\},$$

d. h. das durch

$$F(\xi_1, \xi_2) = F(\eta_1, \eta_2) = F(\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2) = 0, \quad \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 = 1$$

definierte Schema.

Berechnung der Funktionaldeterminante Δ in $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ergibt

$$\Delta = 2 \frac{\partial F}{\partial x}(1, 0) \frac{\partial F}{\partial y}(0, 1) \frac{\partial F}{\partial x}(1, 1) \neq 0$$

(da F keine mehrfachen Wurzeln hat), q. e. d.

Alle diese Funktionen sind definiert über dem Ring $\Lambda = \mathbf{Z}\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right]$, und alle Betrachtungen gelten über diesem Ring. Zusammenfassend gilt also:

2.2.3. Satz. *Es sei* M *das* Λ*-Schema*

$$\operatorname{Spec}\,(\Lambda[x^5, x^3y, x^2z, xy^2, yz, y^5, xz^3, z^5]).$$

(a) *Die geometrischen Punkte* $M(k)$ *(k ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik* $\neq 2, 3, 5$) *entsprechen umkehrbar eindeutig den Isomorphieklassen von Kurven vom Geschlecht 2 über* k.

(b) *Ist* S *ein* Λ*-Schema,* $(C_s)_{s \in S}$ *eine algebraische Familie von Kurven vom Geschlecht* 2, *so gibt es einen eindeutig bestimmten* Λ*-Morphismus* $j\colon S \to M$, *so daß* $j(s)$ *der zu* C_s *gehörige Punkt ist.*

(c) (j, M) *ist universell mit* (a) *und* (b).

(d) *Sind die Verzweigungswerte der kanonischen Überlagerung* $C_s \to \mathbf{P}^1$ *die Nullstellen von* $u_0x^6 + u_1x^5y + \cdots$, *so ist* $j(s)$ *durch die Funktion von Hilfssatz 3 definiert.*

(e) *Die geometrischen Fasern von $M \mid \dot{\Lambda}$ sind dreidimensionale rationale, normale affine Mannigfaltigkeiten $\subseteq \mathbf{A}^8$ mit einer Singularität im Nullpunkt. Die Einbettungsdimension in diesem Punkt ist* 8.

Wir werden später sehen, daß dem singulären Punkt die Kurve $y^2 = x^5 - 1$ entspricht.

3. Präzisierung der Problemstellung

3.1. Globale Moduln

Nach diesen Beispielen wollen wir die allgemeine Problemstellung genauer formulieren. Es ist erst seit ca. 15 Jahren klar, wie Modulprobleme genau zu formulieren sind.
Zunächst sei eine Klasse $\mathfrak{M}$ von algebraischen Mannigfaltigkeiten (z. B. die Klasse aller kompletten singularitätenfreien algebraischen Flächen V mit gegebenen Plurigeschlechtern $P_n = \dim H^0(V, (\Omega_V^2)^{\otimes n})$ oder die Klasse aller kompletten singularitätenfreien Kurven vom Geschlecht p) oder von anderen algebraisch-geometrischen Objekten (z. B. Vektorbündel, Gruppenschemata, Raumkeime). Ferner muß präzisiert werden, welche Typen von Schemata als Parameterräume zugelassen werden, meist wird das die Kategorie der lokal Noetherschen oder der algebraischen Schemata sein, evtl. mit Ausschluß gewisser Restklassencharakteristiken.
Unter einer algebraischen Familie von Mannigfaltigkeiten aus $\mathfrak{M}$ versteht man dann gewöhnlich einen Morphismus $X \to S$, wobei S ein zugelassenes Parameterschema ist, so daß gilt:

1. p ist flach und lokal von endlicher Darstellung,
2. die geometrischen Fasern von $X \xrightarrow{p} S$ sind Mannigfaltigkeiten der Klasse $\mathfrak{M}$.

Es ist klar, daß für einen Morphismus $T \to S$ von Parameterschemata die Familie $X \xrightarrow{p} S$ eine Familie $X_T \to T$ induziert, $X_T = X \times_S T$, p_T Projektion.
Unter einem Morphismus algebraischer Familien $X' \to S'$, $X \to S$ versteht man ein Faserproduktdiagramm

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ S' & \longrightarrow & S \end{array}$$

Auf diese Weise erhält man die Kategorie $\mathcal{F}$ der algebraischen Familien von Objekten aus $\mathfrak{M}$ sowie einen kanonischen Funktor $\mathcal{F} \to \mathcal{C}$ =: Kategorie der Parameterschemata (der jeder Familie das Parameterschema und jedem Morphismus von Familien den unteren Pfeil zuordnet).
In der Sprache der Kategorien ausgedrückt ist $\mathcal{F} \to \mathcal{C}$ ein gefasertes Gruppoid. Dieses gefaserte Gruppoid ist dann der Gegenstand der weiteren Untersuchungen. Ist $\mathfrak{X} \to M$ ein Objekt aus $\mathcal{F}$, so induziert dieses einen Funktor gefaserter Gruppoide über $\mathcal{C}$

$$\mathcal{C} \mid M \to \mathcal{F}$$

(wobei $\mathscr{C} \mid M$ die Kategorie der Morphismen aus $\mathscr{C}$ mit dem „Ziel" M ist, $\mathscr{C} \mid M \to \mathscr{C}$ der Funktor „Start") durch

$$(S \to M) \mapsto (\mathscr{X} \times_M S \xrightarrow{\text{Projektion}} S).$$

Die Untersuchung von $\mathscr{F}$ wäre dann auf das Studium der Morphismen in $\mathscr{C}$ mit dem Ziel M zurückgeführt, wenn man $\mathscr{X} \to M$ als Endobjekt in $\mathscr{F}$ wählen könnte; dann ist nämlich

$$\mathscr{C} \mid M \to \mathscr{F}$$

eine Äquivalenz von Kategorien.
Das grundlegende Existenzproblem lautet deshalb:

(0) Gibt es in $\mathscr{F}$ ein Endpobjekt?

Das wird im allgemeinen nicht der Fall sein, da die Gruppe der S-Automorphismen einer Familie $V \to S$ im allgemeinen nicht trivial ist.
Eine etwas schwächere Formulierung des obigen Problems ist die Frage:

(I) *Strenges* (*oder feines*) *Modulproblem.* Gibt es eine *universelle Familie* in $\mathscr{F}$, d. h., ist der Funktor

$\mathscr{C}^{\text{opp}} \to \text{Ens}, \quad S \mapsto \mathscr{M}(S)$

(wobei $\mathscr{M}(S)$ die Menge aller Isomorphieklassen von Familien aus $\mathfrak{M}$ über S ist) darstellbar?

Wenn eine solche Familie $\mathscr{X} \to M$ existiert, würden insbesondere den geometrischen Punkten von M mit Werten in einem algebraisch abgeschlossenen Körper k (mit Spec $(k) \in \mathscr{C}$) die Isomorphieklassen von Mannigfaltigkeiten aus $\mathfrak{M}$ entsprechen, die über k definiert sind.

(II) *Schwaches* (*oder grobes*) *Modulproblem.* Gibt es ein Schema M sowie eine natürliche Transformation $j\colon \mathscr{M} \to M$ (M aufgefaßt als Kofunktor auf $\mathscr{C}$, $M(S) = \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(S, M)$), so daß gilt:

1. Für jeden algebraisch abgeschlossenen Körper k (mit Spec $(k) \in \mathscr{C}$) ist $j_k\colon \mathscr{M}(k) \to M(k)$ bijektiv (d. h., $M(k)$ ist isomorph zur Menge aller Isomorphieklassen von Mannigfaltigkeiten aus $\mathfrak{M}$, die über k definiert sind).

2. $j\colon \mathscr{M} \to M$ ist eine *universelle natürliche Transformation* in einem darstellbaren Kofunktor auf $\mathscr{C}$, d. h., ist $\mathscr{J}\colon \mathscr{M} \to N$ eine natürliche Transformation in einen darstellbaren Kofunktor N (= Schema aus $\mathscr{C}$), so gibt es genau einen Morphismus

$h\colon M \to N \quad \text{mit} \quad \mathscr{J} = h \cdot j.$

Ausführlich besagt 2.: Für jede Familie $\mathscr{X} \to S$ ist $j_{\mathscr{X}|S}$ ein Morphismus $S \to M$, so daß $j_{\mathscr{X}|S}(t)$ für $t \in S(k)$ der Punkt aus $M(k)$ ist, der der Isomorphieklasse von X_t entspricht, und (j, M) ist universell mit dieser Eigenschaft. M heißt der *Modulraum* und j die *absolute Invariante* für die Mannigfaltigkeiten aus $\mathfrak{M}$.

Folgende Tatsachen sind unmittelbar klar:

1. Wenn die Existenzprobleme (I) bzw. (II) eine Lösung $\mathscr{X} \to M$ bzw. (j, M) besitzen, ist diese (bis auf kanonische Isomorphie) eindeutig bestimmt.

2. Ist $\mathscr{X} \to M$ eine Lösung des Problems (I), so daß wir also M als Funktor mit $\mathscr{M}$ identifizieren können, so ist (id_M, M) auch eine Lösung von (II).

Daher ist (II) eine Abschwächung von (I), und wenn (j, M) eine Lösung von (II) und (I) überhaupt lösbar ist, dann ist j ein Isomorphismus $\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} M$, und der identischen Abbildung von M entspricht ein Element aus $\mathcal{M}(M)$, was natürlich die universelle Familie $\mathfrak{X} \to M$ ist.

Die in Abschnitt 2 betrachteten Beispiele sind Lösungen des schwachen Modulproblems ($\mathfrak{M}$ Klasse aller Kurven vom Geschlecht 1 bzw. 2). Wir werden gleich sehen, daß das strenge Modulproblem im allgemeinen keine Lösung hat.

3.2. Lokale Modulprobleme

Die im vorigen Abschnitt betrachteten Probleme waren globaler Natur: Es sollte die Menge aller Isomorphieklassen von Mannigfaltigkeiten aus $\mathfrak{M}$ parametrisiert werden und möglichst noch eine universelle Familie konstruiert werden. Eine Abschwächung des Problems besteht darin, die Abhängigkeit der Isomorphieklassen nur lokal, d. h. für kleine Änderungen von Parameterwerten, zu untersuchen. Anstelle der oben betrachteten Kategorie $\mathcal{C}$ von Parameterräumen S wird man hier also nur *Raumkeime* (S, o) betrachten, d. h. Paare, bestehend aus einem Schema S und einem ausgezeichneten Punkt $o \in S$, modulo folgender Äquivalenzrelation: (S, o) und (S', o') werden als äquivalent betrachtet, wenn es eine gemeinsame Umgebung (S'', o'') von o in S und von o' in S' gibt:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & (S, o) \\ (S'', o'') \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & (S', o') \end{tikzcd}$$

Es ist sinnvoll, unter „Umgebung" hier „Etalumgebungen" zu verstehen.

Das führt also dazu, Schemata über lokalen Henselschen Algebren von endlichem Typ über einem Henselschen Grundring Λ zu betrachten (d. h. Algebren der Form $\Lambda\langle\langle z_1, \ldots, z_n\rangle\rangle/(f_1, \ldots, f_r)$, wobei $\Lambda\langle\langle z_1, \ldots, z_n\rangle\rangle$ den Ring aller über $\Lambda[z_1, \ldots, z_n]$ *algebraischen* Potenzreihen bezeichnet) bzw. über beliebigen Noetherschen lokalen Henselschen Λ-Algebren z. B. der Form $\Lambda[[z_1, \ldots, z_n]]/(f_1, \ldots, f_r)$ Mit m_A bezeichnen wir im folgenden das Maximalideal eines lokalen Ringes A. Dabei wird vorausgesetzt, daß alle Algebren A den gleichen Restklassenkörper wie Λ haben.

Es sei k der Restklassenkörper von Λ, V eine Mannigfaltigkeit über k. Unter einer Deformation von V versteht man dann ein Tripel (A, X, θ), wobei A eine zur Konkurrenz zugelassene lokale Λ-Algebra ist, X ein flaches A-Schema und θ ein Isomorphismus von V auf die spezielle Faser von X über A.

Es ist klar, was man unter Morphismen von Deformationen zu verstehen hat und wie die durch einen Λ-Morphismus $A \to B$ induzierte Deformation definiert ist, für die wir einfach $(A, X, \theta) \otimes_A B$ schreiben werden.

Das lokale Modulproblem ist die folgende Frage:

(III) Gibt es zu gegebenem V eine Deformation $(\mathcal{A}, \mathfrak{X}, \Theta)$ von V mit den folgenden Eigenschaften?

(1) Jede Deformation (A, X, θ) von V wird bis auf Isomorphie durch einen Λ-Morphismus $\mathcal{A} \xrightarrow{\alpha} A$ induziert, der bis zu einer beliebig hohen Ordnung n vorgegeben sein kann (d. h., wenn die Deformation $(A, X, \theta) \otimes_A A/m_A^{n+1}$ durch ein $\beta_n \colon \mathcal{A} \to A/m_A^{n+1}$ induziert wird, kann man α so wählen, daß $\alpha \bmod m_A^{n+1} = \beta$ gilt).

(2) Die in den Zariskischen Tangentialräumen über Λ induzierte Abbildung $d\alpha$: $T_\Lambda(A) \to T_\Lambda(\mathcal{A})$ ist eindeutig durch (A, X, θ) bestimmt $(T_\Lambda(A) = \mathrm{Hom}\,(A, k[[t]]/(t^2)))$.

(3) $\mathcal{A}$ ist eine Henselsche Λ-Algebra von endlichem Typ.

Man nennt $(\mathcal{A}, \mathcal{X}, \Theta)$ eine *semiuniverselle Deformation von* V. Zu dieser Definition ist folgendes zu bemerken:

1. Es sei $D(A)$ die Menge aller *Isomorphieklassen* von Deformationen (A, X, θ) von V *über* A; dann ist $A \to D(A)$ ein Funktor, und (1), (2) kann man wie folgt formulieren:

(1') $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{A}, -) \to D(-)$ ist surjektiv, und für alle A und $n \geqq 0$ ist der kanonische Morphismus

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{A}, A) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{A}, A/m_A^{n+1}) \times_{D(A/m_A^{n+1})} D(A)$$

ebenfalls surjektiv (d. h., $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{A}, -) \to D(-)$ ist formal glatt).

(2') $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{A}, k[[t]]/(t^2)) \to D(k[[t]]/(t^2))$ ist bijektiv.

2. Diese beiden Bedingungen sind eine Abschwächung der Bedingung der Darstellbarkeit von D; damit D durch $(\mathcal{A}, \mathcal{X}, \Theta)$ dargestellt wird, dürfte nicht nur $d\alpha$, sondern α selbst *eindeutig* durch (A, X, θ) bestimmt sein. Die zweite Forderung in (1) bzw. (1') besagt, daß im Fall der Darstellbarkeit von D der Morphismus Spec $(\mathcal{A}) \to D$ glatt ist (d. h., das Differential ist von konstantem Rang), und aus (2) folgt dann, daß Spec $(\mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} D$ ist. Wenn also D überhaupt darstellbar ist, so durch $(\mathcal{A}, \mathcal{X}, \Theta)$. Wenn $(\mathcal{A}, \mathcal{X}, \Theta)$ nur Forderung (1) und (3) erfüllt, wollen wir $(\mathcal{A}, \mathcal{X}, \Theta)$ eine *verselle Deformation* von V nennen. Wenn $(\mathcal{A}, \mathcal{X}, \Theta)$ eine Darstellung von D liefert, nennen wir $(\mathcal{A}, \mathcal{X}, \Theta)$ eine *universelle Deformation* von V.

3. Durch die Bedingungen (1), (2), (3) ist $(\mathcal{A}, \mathcal{X}, \Theta)$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt (vgl. Kap. II), wobei jedoch diese Isomorphie, falls D nicht darstellbar ist, nicht kanonisch ist (d. h., im allgemeinen hat $(\mathcal{A}, \mathcal{X}, \Theta)$ nichttriviale Automorphismen).

4. Wir können den Funktor D einschränken auf die Unterkategorie der „infinitesimalen Raumkeime" über Λ, d. h. der lokalen *Artinschen* Λ-Algebren. Wenn dann $(\mathcal{A}, \mathcal{X}, \Theta)$ die Forderung (1) bzw. (1) und (2) erfüllt, wobei $\mathcal{A}$ eine komplette lokale Noethersche Λ-Algebra ist, so heißt $(\mathcal{A}, \mathcal{X}, \Theta)$ eine *effektive formale verselle* bzw. *semiuniverselle Deformation* von V. Ebenso induziert D einen Funktor auf der Kategorie der endlichdimensionalen Vektorräume, $V \mapsto D(k \otimes V)$, wobei mit $k \otimes V \underset{\mathrm{def}}{=} I_V$ die Artinalgebra $k \otimes V$, $V^2 = 0$, $(x, v)\,(y, w) = (xy, xw + yv)$ bezeichnet wird. Mit diesen Bezeichnungen gilt:

(A) Wenn es eine semiuniverselle Deformation (für D) gibt, ist $V \to D(I_V)$ ein linksexakter Funktor auf der Kategorie der endlichdimensionalen Vektorräume, d. h., $D(k)$ enthält genau ein Element,

$$D(I_V \times_{I_W} I_{V'}) = D(I_V) \times_{D(I_W)} D(I_{V'})$$

für jedes Diagramm $V \to W \leftarrow V'$ (es ist $I_V \times_{I_W} I_{V'} = I_V \times_W V'$).

(A*) Ist $V \mapsto D(I_V)$ linksexakt, so ist $D(I_V)$ ein Vektorraum über k und

$$D(I_V) = D(I_1) \otimes_k V \quad (I_1 = k[[t]]/(t^2)).$$

Beweis. $V \times V \to V$ (Addition) induziert wegen der Linksexaktheit eine Addition $D(V) \times D(V) \to D(V)$ $(D(V) \underset{\mathrm{def}}{=} D(I_V))$. Für $\lambda \in k$ induziert $V \xrightarrow{\lambda} V$ eine Multiplikation $D(\lambda): D(V) \to D(V)$.

Damit wird $D(V) = D(I_V)$ ein Vektorraum und $V \mapsto D(I_V)$ ein linksexakter Funktor in die Kategorie der Vektorräume. Ist $V = V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ (dim $V_i = 1$), so ist

$$D(I_V) = D(I_{V_1}) \otimes \cdots \otimes D(I_{V_n}) = D(I_1) \otimes V$$

(Basis $e_i \in V_i$ auswählen!), q. e. d.

Damit ergibt sich als erste notwendige Bedingung für die Lösbarkeit von (III):

Forderung 1. $V \mapsto D(I_V)$ ist linksexakt und dim $D(I_1) < \infty$.

Falls eine semiuniverselle Deformation existiert, ist $D(I_1)$ der Tangentialraum $T_\Lambda(\mathcal{A})$.

Ist also dim $D(I_1) = m$, so müßte das gesuchte $\mathcal{A}$ Quotient von $\Lambda\langle\langle x_1, \ldots, x_m\rangle\rangle$ sein. Gewöhnlich kann man $D(I_1)$ als eine geeignete erste Kohomologiegruppe ausdrücken (vgl. etwa 3.3. sowie Kap. II).

(B) Wenn es eine semiuniverselle Deformation (für D) gibt, muß für jedes Diagramm lokaler Artinalgebren $A' \to A/I \leftarrow A$ folgendes gelten:

$$D(A \times_{A/I} A') \to D(A) \times_{D(A/I)} D(A') \text{ ist surjektiv.}$$

Das ist eine Abschwächung der Bedingung „linksexakt“.

Für die Lösbarkeit von (III) ergibt sich also als zweite notwendige Bedingung

Forderung 2. Für jedes Diagramm lokaler Artinalgebren $A' \to A/I \leftarrow A$ ist

$$D(A \times_{A/I} A') \to D(A) \times_{D(A/I)} D(A')$$

surjektiv.

Nach einem Kriterium von Schlessinger (vgl. Kap. II) sind diese beiden Forderungen auch hinreichend, um das Problem auf *formaler* Ebene zu lösen. Schließlich folgt aus der *stärkeren*

Forderung 3. D ist linksexakt,

daß der Funktor S prorepräsentierbar in der Kategorie der Artinschen Λ-Algebren ist (vgl. Kap. II).

Wir werden in Abschnitt 4 Beispiele bringen, aus denen folgt, daß hieraus noch nicht die Lösung von (III) folgt.

3.3. Kodaira-Spencer-Abbildung

Beim lokalen Studium von algebraischen oder analytischen Familien spielt eine von Kodaira und Spencer eingeführte Abbildung eine wichtige Rolle, die in gewisser Weise die Abweichung dieser Familie in jedem Punkt von der universellen Familie mißt.

Wir geben hier eine Variante dieser Betrachtungen; eine für Zwecke der Deformationstheorie nützliche Verallgemeinerung geben wir in Kap. II.

Betrachtet werden Familien $V \to T$ von kompletten singularitätenfreien Mannigfaltigkeiten V_t, $t \in T$.

Mit Ω_V bzw. $\Omega_{V|T}$ bezeichnen wir die Garbe der holomorphen 1-Formen bzw. relativen holomorphen 1-Formen, mit Θ_V bzw. $\Theta_{V|T}$ die dazu duale Garbe der Vektorfelder bzw. Vektorfelder längs der Fasern.

Da nach Voraussetzung $V \to T$ glatt ist, haben wir eine exakte Folge

$$0 \to p^*\Omega_T \to \Omega_V \to \Omega_{V|T} \to 0,$$

und dieser entspricht eine kanonische Kohomologieklasse

$$C(V \mid T) \in \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}_V}(\Omega^1_{V|T}, p^*\Omega^1_T)$$

(z. B. auf Grund der Yoneda-Interpretation von Ext oder mittels des Verbindungsmorphismus $\delta(\mathrm{id}_{\Omega_{V|T}})$ bezüglich der Kohomologiefolge zu $\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_V}(\Omega_{V|T}, -)$ definiert!). Da $\Omega_{V|T}$ lokal frei sind, ist

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_V}(\Omega_{V|T}, -) = \Theta_{V|T} \otimes_{\mathcal{O}_V} [-] \quad \text{und}$$

$$\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_V}(\Omega_{V|T}, -) = 0,$$

also

$$\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}_V}(\Omega^1_{V|T}, p^*\Omega^1_T) = H^1(V, \Theta_{V|T} \otimes_T \Omega^1_T).$$

Durch Einschränkung der Betrachtung auf offene Teilmengen von T (bzw. Etalüberdeckungen) erhält man eine lokale Variante von C, d. h. ein Element aus $H^0(T, R^1p_*(\Theta_{V|T} \otimes_T \Omega_T))$. Insgesamt haben wir also erhalten:

A. eine Fundamentalklasse $C(V \mid T) \in H^1(V, \Theta_{V|T} \otimes_T \Omega^1_T)$,

B. eine Fundamentalklasse $c(V \mid T) \in H^0(T, R^1p_*(\Theta_{V|T} \otimes_T \Omega^1_T))$.

Beide werden *Kodaira-Spencer-Klasse* genannt.
Bei der kanonischen Abbildung

$$H^1(V, \Theta_{V|T} \otimes_T \Omega^1_T) \to H^0(T, R^1p_*(\Theta_{V|T} \otimes_T \Omega^1_T))$$

geht C in c über.
Diese Klassen lassen sich auch (zumindest für singularitätenfreie T) wie folgt beschreiben: Wir haben eine kanonische Abbildung

$$R^1p_*(\Theta_{V|T} \otimes_T \Omega_T) \otimes_{\mathcal{O}_V} \Theta_T \to R^1p_*\Theta_{V|T},$$

$$a \otimes \xi \mapsto \xi_*(a).$$

(Ein Vektorfeld ξ auf T ist ein Homomorphismus $\xi\colon \Omega_T \to \mathcal{O}_T$ und induziert also einen Homomorphismus

$$\mathrm{id} \otimes \xi\colon \Theta_{V|T} \otimes_T \Omega_T \to \Theta_{V|T}$$

bzw. in der ersten Kohomologie eine mit ξ_* bezeichnete Abbildung.) Wenn wir für a stets $c(V \mid T)$ einsetzen, erhalten wir also eine Abbildung

$$\varrho'_{V|T}\colon \Theta_T \to R^1p_*\Theta_{V|T},$$

durch die (wenn T singularitätenfrei, also Ω_T lokal frei ist) $c(V \mid T)$ eindeutig bestimmt ist. $\varrho'_{V|T}$ heißt *Kodaira-Spencer-Abbildung*; die globale Version

$$\varrho_{V|T}\colon H^0(T, \Theta_T) \to H^1(V, \Theta_{V|T})$$

ist entsprechend definiert.
„Explizit" ist z. B. $\varrho'_{V|T}(\xi)$ wie folgt definiert: ξ sei über $U \subset T$ definiert; man überdecke $p^{-1}(U) \subset V$ mit hinreichend kleinen offenen Mengen U_α, so daß sich ξ zu einem Vektorfeld ξ_α auf U_α liften läßt. ($0 \to \Theta_{V|T} \to \Theta_V \to p^*\Theta_T \to 0$ ist eine exakte Folge von Garben!). Dann ist $\varphi_{\alpha\beta} = \xi_\alpha - \xi_\beta \in \Theta_{V|T}(U_{\alpha\beta})$ und $(\varphi_{\alpha\beta})$ ein 1-Kozyklus mit Koeffizienten aus $\Theta_{V|T}$, dessen Klasse in $R^1p_*\Theta_{V|T}$ das Bild $\varrho'_{V|T}(\xi)$ repräsentiert.

Anwendung 1. Es sei $T = \operatorname{Spec}(I_1)$; dann ist also (V, I_1, θ) ($\theta\colon V_0 \to V$ Einbettung der Faser von V im abgeschlossenen Punkt O von T) eine Deformation von V_0. Es ist ferner $\Omega_T = k\,dt$ ($I_1 = k[[t]]/(t^2)$, dt Differential von t und (t^2)) und $t\,dt = 0$. Man rechnet direkt nach:

$$\Theta_{V|T} \otimes_T \Omega_T \xrightarrow{\sim} \Theta_{V_0},$$

$$\xi \otimes dt \mapsto \bar{\xi} \quad (=: \text{Einschränkung auf } V_0).$$

Somit hat man also jeder Deformation von V_0, (V, I_1, θ), eine Klasse $c(V \mid I_1) \in H^1(V_0, \Theta_{V_0})$ zugeordnet, d. h., die Kodaira-Spencer-Klasse liefert eine kanonische Abbildung

$$D(I_1) \to H^1(V_0, \Theta_{V_0}),$$

$$(V, I_1, \theta) \mapsto c(V \mid I_1),$$

und analog erhält man für jeden endlichdimensionalen Vektorraum W eine kanonische Abbildung

$$D(I_W) \to H^1(V_0, \Theta_{V_0}) \otimes W = H^1(V, \Theta_{V|T\times W})$$

($W \cong \operatorname{Spec}(I_W)$). Diese Abbildung ist stets bijektiv. Ein Kozyklus $\{\varphi_{ij}\}$ mit Werten in $\Theta_{V_0} \otimes W$ bezüglich einer offenen Überdeckung U_i von V_0 ist nichts weiter als eine Vorschrift, wie die Garben $\mathcal{O}_{V_0} \mid U_i \otimes_k I_W = \mathcal{O}_{U_i}$ auf U_i miteinander zu verheften sind zu einer Garbe $\mathcal{O}_V$, die zu einer Deformation (V, I_W, θ) gehört. Die Verheftung ist wie folgt (φ_{ij} ist eine Derivation $\mathcal{O}_{V_0} \mid U_{ij} \to \mathcal{O}_{V_0} \mid U_{ij} \otimes_k W$):

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{O}_{U_i} \mid U_{ij} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{U_j} \mid U_{ij} \\
\| & & \| \\
\mathcal{O}_{V_0} \mid U_{ij} \oplus (W \otimes \mathcal{O}_{V_0} \mid U_{ij}) & & \mathcal{O}_{V_0} \mid U_{ij} \oplus (W \otimes \mathcal{O}_{V_0} \mid U_{ij}), \\
(f, w \otimes g) & \longrightarrow & (f, \varphi_{ij}(w \otimes g)).
\end{array}$$

Kohomologe Kozyklen liefern isomorphe Deformationen, so daß also für alle singularitätenfreien V_0

$$D(I_1) \xrightarrow{\sim} H^1(V_0, \Theta_{V_0}),$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Menge aller} \\ \text{infinitesimalen Deformationen} \\ (V, I_1, \theta)\end{array}\right\} \mapsto c(V \mid I_1)$$

gilt; insbesondere gilt also:

Korollar 1. *Der Parameterraum der semiuniversellen Deformation singularitätenfreier eigentlicher Mannigfaltigkeiten V_0 hat die Einbettungsdimension $m = \dim H^1(V_0, \Theta_{V_0})$.*

Beispiel. Ist V_0 eine Kurve vom Geschlecht p, dann ist $\Theta_{V_0} = \omega_{V_0}^{-1}$ und $H^1(V_0, \Theta_V)$ nach dem Satz von Riemann-Roch (bzw. dem Dualitätssatz von Serre) dual zu $H^0(V_0, \omega_V^{\otimes 2})$, also von der Dimension $3p - 3$.

Korollar 2. *Eine notwendige Bedingung dafür, daß $V \to T$ in einem Punkt $o \in T$ eine semiuniverselle Deformation von V_0 ist, ist die Bedingung, daß die durch $\varrho'_{V|T}$ induzierte Abbildung*

$$T_0(T) \to H^1(V_0, \Theta_{V_0})$$

bijektiv ist. ($T_0(T) =: \Theta_{T,o} \otimes_{\mathcal{O}_{T,o}} k =:$ *Tangentialraum an* T *in* o; *die Abbildung wird durch*

$$\theta_{T,O} \otimes_{\mathcal{O}_{T,o}} k \xrightarrow{\varrho'\otimes k} (R^1 p_* \Theta_{V|T}) \otimes_{\mathcal{O}_{T,o}} k \xrightarrow{\text{Basiswechsel}} H^1(V_0, \Theta_{V_*})$$

induziert, $\Theta_{V_*} = (\Theta_{V|T})_O \otimes_{\mathcal{O}_{V,o}} k$.)

„Explizit" ist die obige Abbildung wie folgt definiert: Wenn $\varrho'_{V|T}(\xi)$ über einer Umgebung von o durch den Kozyklus $\varphi_{\alpha\beta}(\xi) \in \Theta_{V|T}(U_{\alpha\beta})$ repräsentiert wird, erhält man durch Spezialisierung von t zu o aus den Vektorfeldern $\varphi_{\alpha\beta}(\xi)$ Vektorfelder $\varphi_{\alpha\beta}(\xi)_0$ auf $V_0 \cap U_{\alpha\beta}$, die einen Kozyklus auf V_0 mit Werten in Θ_{V_*} bilden. Dessen Klasse ist das Bild von $\bar{\xi}_0$.

Anwendung 2 (über $\mathbf{C}$). Ist T singularitätenfrei und $\varrho'(V \mid T)\colon \Theta_T \to R^1 p_* \Theta_{V|T}$ die Nullabbildung, so ist $V \to T$ eine analytisch lokal triviale Faserung.

Der Beweis erfolgt in mehreren Schritten:

Schritt 1. Das Verschwinden von ϱ' bedeutet, daß die Folge

$$0 \to p^*\Omega_T^1 \to \Omega_V^1 \to \Omega_{V|T}^1 \to 0$$

lokal über T zerfällt; also gilt für hinreichend kleine T

$$\Omega_V^1 \cong p^*\Omega_T \oplus \Omega_{V|T}.$$

Außerdem sei o. B. d. A. T analytisch isomorph zum Produkt von q offenen Kreisscheiben $\Delta_1 \times \cdots \times \Delta_q$; $\Delta_j \subseteq \mathbf{C}$, Koordinaten $z_1, \ldots, z_q$. Der Beweis der Trivialität von $V \to T$ erfolgt durch Induktion über q, und zwar zeigen wir, daß nach eventueller Verkleinerung der Kreisscheiben gilt, daß $V \to T$ isomorph zu $V' \times \Delta_q \to T' \times \Delta_q$ ist mit $T' = \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_{q-1}$, $V' = p^{-1}(\Delta_1 \times \cdots \times \Delta_{q-1} \times \{0\}) \subseteq V$. Da $\theta_V \cong p_*\theta_T \oplus \Theta_{V|T}$ ist, läßt sich das Vektorfeld $\partial/\partial z_q$ auf T zu einem Vektorfeld ξ auf V liften. Wir benutzen zum Beweis, daß es zu jedem holomorphen Vektorfeld auf einer komplexen Mannigfaltigkeit eine holomorphe „Integralkurve" gibt, die holomorph vom Anfangswert abhängt, d. h. den folgenden

Hilfssatz. *Es sei V eine komplexe Mannigfaltigkeit, ξ ein Vektorfeld auf V; dann gibt es eine Umgebung $W \subseteq V \times \mathbf{C}$ von $V \times \{o\}$ und eine holomorphe Abbildung $\varphi\colon W \to V$ derart, daß folgendes gilt:*

1. $\partial\varphi/\partial z(x, z) = \xi(\varphi(x, z))$ *für alle* $(x, z) \in W \subseteq V \times \mathbf{C}$,

2. $\varphi(x, 0) = x$.

Schritt 2. Es ist klar, daß wir im Fall eines kompakten V die Umgebung W von der Form $V \times \Delta$ wählen können (Δ eine hinreichend kleine offene Kreisscheibe). Für den uns interessierenden Fall ist V nicht kompakt, wohl aber die Fasern von $V \to T$. Wählen wir nun eine relativ kompakte Umgebung U von 0 in T, so ist $p^{-1}(\bar{U}) \subset V$ kompakt (da p eigentlich ist!), also ist die Projektion $p^{-1}(\bar{U}) \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ eigentlich und daher das Bild der abgeschlossenen Menge $(p^{-1}(\bar{U}) \times \mathbf{C})$ in $\mathbf{C}$ abgeschlossen und disjunkt zum Nullpunkt. Daher können wir in $\mathbf{C}$ eine zu dieser Menge disjunkte Kreisscheibe Δ' wählen, die den Nullpunkt enthält, so daß also $p^{-1}(U) \times \Delta' \subseteq W$ ist.

Wir müssen also T durch die eventuell kleinere offene Menge U ersetzen, V durch $p^{-1}(V)$, so daß φ aus dem Lemma dann auf $V \times \Delta$ definiert ist.

Schritt 3. Es sei also jetzt $T = \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_q$ und o. B. d. A. der Radius von Δ_q nicht größer als der Radius von Δ. Die „Kurve" $z \mapsto p\varphi(x, z)$ in $T \subseteq \mathbf{C}^q$ ist Integralkurve zu $\partial/\partial z_q$ mit dem Anfangswert

$$p\varphi(x, 0) = p(x);$$

also ist

$$p\varphi(x, z) = p(x) + (0, \dots, 0, z) \quad \text{in } \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_q$$

(Parallele zur „z_q-Achse"). Setzen wir

$$\psi(x) \underset{\text{def}}{=} \varphi(x, -z_q(p(x))),$$

so ist $p\psi(x) \in \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_q \times \{0\}$ (d. h., $\psi(x)$ liegt über der „Ebene" $z_q = 0$); ψ liefert also eine holomorphe Abbildung

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\quad\psi\quad} & V' = p^{-1}(\Delta_1 \times \cdots \times \Delta_{q-1} \times \{0\}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_q & \xrightarrow[\text{Projektion}]{} & \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_{q-1} \times \{0\} \end{array}$$

Durch $x \mapsto (\psi(x), Z_q(p(x))$ erhält man also einen T-Morphismus $V \to V' \times \Delta_q$; das ist ein Isomorphismus (Umkehrung: $(x', z_q) \mapsto \varphi(x', z_q)$).
$V' \to \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_{q-1}$ erfüllt wieder die Voraussetzung und ist daher nach Induktionsvoraussetzung lokal trivial.

4. Beispiele für semiuniverselle Deformationen

4.1. Starre Mannigfaltigkeiten

Ist V eine singularitätenfreie komplette Mannigfaltigkeit, so daß $H^1(V, \Theta_V) = 0$, so gibt es keine infinitesimalen Deformationen erster Ordnung und folglich nur triviale lokale Deformationen.
Beispiele für solche Mannigfaltigkeiten sind die projektiven Räume $\mathbf{P}^n$ bzw. multiprojektiven Räume $\mathbf{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbf{P}^{n_r}$. Die Garbe Θ der Vektorfelder ist hier die folgende Garbe: Es gibt eine kanonische exakte Folge von Vektorbündeln über $V = \mathbf{P}^n = \mathbf{P}(W)$

$$0 \to N \to V \times W \to M \to 0, \quad M = V \times W/N,$$

wobei N dasjenige Unterbündel des trivialen Bündels $V \times W$ ist, dessen Faser im Punkt $p \in V$ die entsprechende Gerade von W ist. Dann ist

$$\Omega_V^1 \cong \mathcal{H}om\,(M, N), \quad \Theta_V \cong \mathcal{H}om\,(N, M) \cong \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1) \otimes \mathcal{O}(M);$$

also ist

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n} \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1)^{n+1} \to \Theta_{\mathbf{P}^n} \to 0$$

exakt. Hieraus folgt unmittelbar die Behauptung.

4.2. Rationale Flächen

Beispiele für rationale Flächen sind $V = \mathbf{P}^2$, $V = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ und die zu den Vektorbündeln $L^{\otimes m} \oplus I \to \mathbf{P}^1$ ($L \subset \mathbf{P}^1 \times \mathbf{A}^2$ kanonisches Unterbündel des trivialen Bündels, I eindimensionales triviales Bündel) assoziierten projektiven Bündel $\mathbf{P}(L^{\otimes m} \oplus I)$

$= V^{(m)}$, die man auch wie folgt beschreiben kann:

$$V^{(m)} \subset \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^2 =: \text{Menge aller } (x : y,\ u : v : w) \text{ mit}$$

$$x^m v - y^m u = 0. \tag{1}$$

Bekanntlich erhält man auf diese Weise alle relativ minimalen rationalen Flächen; $V^{(1)}$ ist nicht minimal (sondern Aufblasung der projektiven Ebene in einem Punkt). (Vgl. hierzu I. R. SCHAFAREWITSCH u. a. [1].)

Wir zeigen jetzt an einem auf HIRZEBRUCH zurückgehenden Beispiel, daß die Flächen $V^{(m)}$ und $V^{(m-2k)}$ $(2k \leq m)$ in ein und derselben algebraischen Familie vorkommen, und zwar in folgender:

$$V \subseteq \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^2 \times \mathbf{A}^1 \text{ über } \mathbf{A}^1,$$

definiert durch

$$x^m v - y^m u = t x^k y^{m-k} w. \tag{2}$$

Für $T \neq 0$ sind die Flächen V_t isomorph zu V_1, die definiert ist durch die Gleichung

$$x^m v - y^m u = x^k y^{m-k} w$$

(indem man $(x : y,\ u : v : w) \mapsto (x : y,\ u : v : tw)$, $V_t \xrightarrow{\sim} V_1$ definiert). Also ist über der offenen Menge $U = \mathbf{A}^1 - \{0\}$ die Familie trivial.

Für $t = 0$ erhält man $V_0 \cong V^{(m)}$, d. h., die V_t sind Deformationen von V_0.

4.2.1. Hilfssatz. $V_1 \cong V^{(m-2k)}$.

Wir geben dazu einen Isomorphismus $V^{(m-2k)} \xrightarrow{\Phi} V_1$ an. Wir definieren nun für $(x : y, u : v : w) \in V^{(m-2k)}$

$$\Phi(x : y,\ u : v : w) = (x : y,\ -(x^m v w + x^k y^{m-k} w^2) :$$
$$(x^k y^{m-k} u v + y^m v w) : (x^m u v + x^k y^{m-k} u w + x^{m-k} y^k v w + y^m w^2)). \tag{3}$$

Man rechnet direkt nach (am einfachsten, indem man inhomogene Koordinaten benutzt), daß dadurch ein Isomorphismus (über $\mathbf{P}^1$) definiert wird, q. e. d.

Es seien $0, \infty$ die Punkte $(0 : 1)$, $(1 : 0)$ auf $\mathbf{P}^1$ und $U_1, U_2 \subseteq V^{(m)}$ die Urbilder der offenen Mengen $\mathbf{P}^1 - \{0\} = \Delta_1$, $\mathbf{P}^1 - \{\infty\} = \Delta_2$ bezüglich der Projektion $V^{(m)} \to \mathbf{P}^1$. Auf Δ_1 benutzen wir die Koordinate $z = x/y$, auf Δ_2 die Koordinate $z' = y/x = 1/z$; wir wollen $H^0(V^{(m)}, \Theta)$, $H^1(V^{(m)}, \Theta)$ sowie die Kodaira-Spencer-Abbildung, die zu der Familie $(V_t)_{t \in \mathbf{A}^1}$ gehört, berechnen.

Aus

$$U_1 \cong \mathbf{P}^1 \times \Delta_1,\quad U_2 \cong \mathbf{P}^1 \times \Delta_2,\quad U_{12} \cong \mathbf{P}^1 \times \Delta_{12}$$
$$(U_{12} =: U_1 \cap U_2,\quad \Delta_{12} =: \Delta_1 \cap \Delta_2)$$

und aus

$$\Theta_{\mathbf{P}^1} \cong \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(2)$$

folgt

$$H^1(U_i, \Theta) = 0;\ i = 1, 2, 12;$$

und daher liefert die Meyer-Vietoris-Sequenz, daß die Folge

$$0 \to H^0(V) \to H^0(U_1) \oplus H^0(U_2) \to H^0(U_{12}) \to H^1(V) \to 0$$

exakt ist (die Koeffizientengarbe Θ in diesen Kohomologiegruppen haben wir in der Schreibweise weggelassen).

Wir benutzen folgende Koordinaten:

$$\text{auf } U_1: z = \frac{x}{y},\ \xi_2 = \frac{v}{w},$$

$$\text{auf } U_2: z' = \frac{y}{x},\ \xi_1 = \frac{u}{w};$$

dann gilt

$$z' = \frac{1}{z} \quad \text{und} \quad \xi_1 = z^m \xi_2,$$

und somit gilt auf $U_1 \cap U_2$

$$\frac{\partial}{\partial z} = -z'^2 \frac{\partial}{\partial z'} + mz' \left(\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1}\right),$$

$$z \frac{\partial}{\partial z} = -z' \frac{\partial}{\partial z'} + m \left(\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1}\right),$$

$$z^2 \frac{\partial}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z'} + m \frac{1}{z'} \left(\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_2} = z'^{-m} \frac{\partial}{\partial \xi_1},$$

$$\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} = \xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1}$$

und

$$\xi_2^2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} = z'^m \left(\xi_1^2 \frac{\partial}{\partial \xi_1}\right).$$

Hieraus folgt (für $m > 0$)

4.2.2. Hilfssatz.

$$H^0(V^{(m)} \Theta) = k \frac{\partial}{\partial z} + k \left(z \frac{\partial}{\partial z}\right) + k \left(z^2 \frac{\partial}{\partial z} - mz\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2}\right) + k \left(\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2}\right) + \sum_{i=0}^{m} kz^i \left(\xi_2^2 \frac{\partial}{\partial \xi_2}\right),$$

$$H^1(V^{(m)}, \Theta) = (kz + \cdots + kz^{m-1}) \frac{\partial}{\partial \xi_1} \pmod{H^0(U_1) \oplus H^0(U_2)},$$

also

$$\dim H^0(V^{(m)}, \Theta) = m + 5,$$

$$\dim H^1(V^{(m)}, \Theta) = m - 1.$$

Auf ähnliche Weise berechnet man $p_* \Theta_{V|\mathbf{A}^1}$ und $R^1 p_* \Theta_{V|\mathbf{A}^1}$. Dazu seien W_1, W_2 die offenen Mengen in V, in denen $x \neq 0$ bzw. $y \neq 0$ ist und $W_{12} = W_1 \cap W_2$.
Mit denselben Koordinaten wie oben ist

$$z' = \frac{1}{z},\ \xi_1 = z^m \xi_2 - z^k t$$

und somit

$$\frac{\partial}{\partial z} = -z'^2 \frac{\partial}{\partial z'} + (m-k)\frac{t}{z'^{k-1}}\frac{\partial}{\partial \xi_1} + mz'\left(\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1}\right),$$

$$z\frac{\partial}{\partial z} = -z' \frac{\partial}{\partial z'} + (m-k)\frac{t}{z'^{k-2}}\frac{\partial}{\partial \xi_1} + m\left(\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1}\right),$$

$$z^2\frac{\partial}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z'} + (m-k)\frac{t}{z'^{k-3}}\frac{\partial}{\partial \xi_1} + \frac{m}{z'}\left(\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_2} = z^m \frac{\partial}{\partial \xi_1} = \frac{1}{z'^m}\frac{\partial}{\partial \xi_1},$$

$$\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} = \frac{t}{z'^k}\frac{\partial}{\partial \xi_1} + \xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1},$$

$$\xi_2^2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} = t^2 z'^{m-2k}\frac{\partial}{\partial \xi_1} + 2tz'^{m-k}\left(\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1}\right) + z'^m\left(\xi_1^2 \frac{\partial}{\partial \xi_1}\right).$$

Es sei η ein globales Vektorfeld aus $\Theta_{V|\mathbf{A}^1}$; auf W_1 hat η die Form

$$\eta = G\frac{\partial}{\partial z} + A_0 \frac{\partial}{\partial \xi_2} + A_1\left(\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2}\right) + A_2\left(\xi_2^2 \frac{\partial}{\partial \xi_2}\right)$$

(G, A_0, A_1, A_2 Polynome in t und z); auf W_2 gilt dann

$$\begin{aligned}\eta = &-(z'^2 G)\frac{\partial}{\partial z}\\ &+\left[(m-k)\frac{t}{z'^{k-1}}G + \frac{A_0}{z'^m} + \frac{tA_1}{z'^k} + t^2 z'^{m-2k}A_2\right]\frac{\partial}{\partial \xi_1}\\ &+[mz'G + A_1 + 2tz'^{m-k}A_2]\left(\xi_1\frac{\partial}{\partial \xi_1}\right)\\ &+ z'^m A_2\left(\xi_1^2 \frac{\partial}{\partial \xi_1}\right).\end{aligned}$$

Wir setzen

$$A_2 = B_2 + z^{m-2k+1}\,C_2 + z^{m-k+1}\,D_2, \tag{4}$$

so daß B_2 (bzw. C_2) höchstens vom Grad $m-2k$ (bzw. $k-1$) in z ist. Da $z'^m A_2$ Polynom in z' sein muß, ist dann auch D_2 höchstens vom Grad $k-1$.
Ferner sei

$$G = G_1 + z^2 C(t) = a(t) + zb(t) + z^2 c(t)$$

($a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ Polynome in t). Der Vergleich mit dem Koeffizienten von $\xi_1 \cdot (\partial/\partial \xi_1)$ ergibt dann ($d(t)$ Polynom in t)

$$A_1 = d(t) - mc(t)z - 2t\,zD_2 \tag{5}$$

und mit dem Koeffizienten von $\partial/\partial\xi_1$, wenn $k > 1$ ist,

$$\begin{aligned}-z^m A_0 &= (m-k)\,tz^{k-1}\,G + t^2(zC_2 + z^{k+1}D_2) + tz^k(d(t) - mc(t)\,z - 2t^2\,zD_2)\\ &= (m-k)\,ta(t)\,z^{k-1} + [(m-k)\,tb(t) + td(t)]\,z^k - ktc(t)\,z^{k+1} + t^2 z(C_2 - z^k D_2).\end{aligned}$$

Im Fall $m > 2k$ ist $A_0 = 0$ und

$$z^k D_2 - C_2 = (m-k)\, f(t)\, z^{k-2} + g(t)\, z^{k-1} - kh(t)\, z^k, \tag{6}$$

$$a(t) = tf(t), \quad c(t) = th(t), \quad (m-k)\, b(t) + d(t) = tg(t). \tag{7}$$

Im Fall $m = 2k$ ist

$$A_0 = t^2 a_0(t), \quad D_2 = a_0(t)\, z^{k-1} + E_2 \text{ mit } \deg_z E_2 < k-1, \tag{8}$$

$$z^k E_2 - C_2 = (m-k)\, f(t)\, z^{k-2} + g(t)\, z^{k-1} - kh(t)\, z^k; \tag{9}$$

f, g, h wie in (7). Somit ergibt sich

4.2.3. Hilfssatz. *$p_*\Theta_{V|\mathbf{A}^1}$ wird über $\mathcal{O}_{\mathbf{A}^1}$ durch $m - 2k + 5$ Vektorfelder (falls $m > 2k$) bzw. durch sechs Vektorfelder (falls $m = 2k$) erzeugt, die außerhalb $t = 0$ ein freies Erzeugendensystem bilden.*

Beweis. Die Erzeugenden entsprechend der Wahl von $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$, $b(t)$ in (7) (bzw. $a_0(t)$ in (8)) und von

$$B_2 = p_0(t) + p_1(t)\, z + \cdots + p_{m-2k}(t)\, z^{m-2k}$$

in (4), da nach (4), (5), (6), (8) und (9) dadurch eindeutig bestimmte Vektorfelder definiert werden. Diese bilden nur in $t = 0$ einen Vektorraum der Dimension $< m - 2k + 5$ (bzw. 6).

Analog ergibt sich

4.2.4. Hilfssatz. *$R^1 p_*\Theta_{V|\mathbf{A}^1}$ wird über $\mathcal{O}_{\mathbf{A}^1}$ durch die Klassen von*

$$z^\nu \frac{\partial}{\partial \xi_1} \,(\mathrm{mod}\; p_*\Theta_{W_1|\mathbf{A}^1} + p_*\Theta_{W_2|\mathbf{A}^1}), \quad \nu = 1, \ldots, m-1,$$

erzeugt, und $R^1 p_*\Theta_{V|\mathbf{A}^1}$ wird durch die folgenden Relationen definiert:

$$t^2 z^\nu \frac{\partial}{\partial \xi_1} = 0 \qquad \text{für} \qquad 1 \leqq \nu \leqq 2k,\ \nu \neq k,$$

$$t z^k \frac{\partial}{\partial \xi_1} = 0.$$

Also ist $R^1{}_{p_*}\Theta_{V|\mathbf{A}^1}$ außerhalb $t = 0$ frei vom Rang $m - 2k - 1$ (bzw. 0, falls $m = 2k$ ist).

Korollar. *Außerhalb $t = 0$ ist für $m > 2k$ $p_*\Theta_{V|\mathbf{A}^1}$ bzw. $R^1 p_*\Theta_{V|\mathbf{A}^1}$ lokal frei vom Rang $m - 2k + 5$ bzw. $m - 2k - 1$ und*

$$(R^i p_*\Theta_{V|\mathbf{A}^1})_t \otimes k(t) \cong H^i(V_t, \Theta_t), \quad i = 0, 1.$$

Für $m = 2k$ gilt das analoge mit dem Rang 6 bzw. 0.

Benutzen wir auf W_1 die Koordinaten z, ξ_2, t und auf W_2 die Koordinaten z^ν, ξ_1, t, so liefern in diesen Koordinatensystemen $\partial/\partial t$ Liftungen von $\partial/\partial t \in \Theta_{\mathbf{A}^1}$, und benutzen wir auf W_{12} die Koordinaten z, ξ_1, t, so ergibt sich, daß die Differenz beider Liftungen gleich $z^k \cdot \partial/\partial \xi_1$ ist. Somit ist die Kodaira-Spencer-Abbildung von $V \mid T$ durch

$$\frac{\partial}{\partial t} \mapsto z^k \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\mathrm{mod} \sum_{\nu=1}^{k-1} \mathcal{O}t^2 \left(z^\nu \frac{\partial}{\partial \xi_1}\right) + \mathcal{O}t \left(z^k \frac{\partial}{\partial \xi_1}\right) + \sum_{\nu=k+1}^{2k} \mathcal{O}t^2 \left(z^\nu \frac{\partial}{\partial \xi_1}\right)\right) \tag{10}$$

definiert.

Zusammenfassend gilt also

4.2.5. Satz. *Die algebraische Familie $V_t \subset \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^2$, definiert durch $x^m v - y^m u = t\, x^k y^{m-k} w$, ist außerhalb $t = 0$ algebraisch trivial, die Fasern V_t, $t \neq 0$, sind isomorph zu $V^{(m-2k)}$. Die Faser V_0 ist isomorph zu $V^{(m)}$, also zu keiner der Fasern V_t, $t \neq 0$, isomorph.*
Die Garben $p_* \Theta_{V|T}$ und $R^1 p_* \Theta_{V|T}$ sind außerhalb $t = 0$ lokal frei vom Rang $m - 2k + 5$, $m - 2k - 1$ (bzw. im Fall $m = 2k$ vom Rang 6 und 0), und

$$\left.\begin{array}{l} (p_* \Theta_{V|T}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbf{A}^1,t}} k(t) \to H^0(V_t, \Theta_t), \\ (R^1 p_* \Theta_{V|T}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbf{A}^1,t}} k(t) \to H^1(V_t, \Theta_t) \end{array}\right\} \tag{11}$$

sind für $t \neq 0$ Isomorphismen, im Fall $t = 0$ jedoch nicht. Die Kodaira-Spencer-Abbildung ist durch (10) *definiert.*

Dieses Beispiel lehrt unter anderem folgendes:

1. Nehmen wir $m = 2k$, so daß es also keine infinitesimalen Deformationen von $V_t \cong \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ gibt, so kann es dennoch *global* nicht-triviale Deformationen geben.

2. Wenn die Kohomologie $H^1(V_s, \Theta_{V_s})$ einer algebraischen Familie $(V_s)_{s \in S}$ in einem Punkt $s = 0$ einen Sprung macht (d. h., wenn (11) kein Isomorphismus ist in einem Punkt $s = 0$), so ist es möglich, daß die Kodaira-Spencer-Abbildung in diesem Punkt $s \in S$ die Nullabbildung

$$T_s(S) \to H^1(V_s, \Theta_{V_s})$$

induziert, ohne daß die Familie trivial ist. (Zu diesem Zweck betrachte man die durch die Abbildung $s \mapsto s^2$ induzierte Familie V_s, $s \in \mathbf{A}^1$.) Die Ursache für dieses Phänomen ist, daß $R^1 p_* \Theta_{V|S}$ nicht mit Basiswechsel verträglich ist, d. h., daß $s \mapsto \dim H^1(V_s, \Theta_{V_s})$ nicht stetig ist.

4.2.6. Satz. *Die semiuniverselle Deformation der rationalen Fläche $V^{(m)}$ wird definiert durch die Familie*

$$V_t\colon x^m v - y^m u = \sum_{\nu=1}^{m-1} t_\nu x^\nu y^{m-\nu} \omega, \quad t \in \mathbf{A}^{m-1},$$

und den kanonischen Isomorphismus $V_0 \cong V^{(m)}$.

Das kann man beweisen, wenn man die Existenz einer semiuniversellen Deformation schon als bekannt voraussetzt, indem man für die durch die Kodaira-Spencer-Abbildung induzierte Abbildung $T_0\,(\mathbf{A}^{m-1}) \to H^1(V^{(m)}, \Theta_{V^{(m)}})$ zeigt, daß sie ein Isomorphismus ist. Der Beweis ist im wesentlichen derselbe wie für (10).
Dann folgt, daß $\mathbf{A}^{m-1}$ im Nullpunkt und der Raumkeim S, der zur semiuniversellen Deformation gehört, isomorphe Tangentialräume haben, und somit wegen der Singularitätenfreiheit von $\mathbf{A}^{m-1}$, daß S der Keim von $\mathbf{A}^{m-1}$ im Nullpunkt ist. Diese Familie ist auch ein Beispiel für eine semiuniverselle Deformation, die nicht universell ist. (Jedes $\sigma \in GL(m-1)$ induziert bis auf Isomorphie dieselbe Deformation!)

4.3. Algebraische Kurven

Am einfachsten ist hier wieder die Situation für elliptische Kurven und Kurven vom Geschlecht 2. Wir setzen der Einfachheit halber wieder voraus, daß der Grundkörper eine von 2 verschiedene Charakteristik hat und algebraisch abgeschlossen ist.

A. Die Familie

$$E_\lambda\colon y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$$

(inhomogene Koordinaten) ist in jedem $\lambda \neq 0, 1$ universell, und jede elliptische Kurve kommt in dieser Familie vor.

B. Die Familie

$$C_{(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}\colon y^2 = x(x-1)(x^3 - \lambda_1 x^2 + \lambda_2 x - \lambda_3)$$

ist in jedem $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ mit $\lambda_3 \neq 0$, $\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 \neq 1$ und Diskriminante $\neq 0$ universell, und jede Kurve vom Geschlecht 2 kommt in dieser Familie vor.

Zu A. Nach 2.1. wird jede Familie elliptischer Kurven lokal durch eine Gleichung $E_t\colon y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$ definiert, wobei $a = a(t)$, $b = b(t)$ usw. reguläre Funktionen auf dem Parameterraum T sind.
Für $t = 0$ sei $E_0 = E_\lambda$; dann ist insbesondere $a(0) = 1$, und wir können $a = 1$ annehmen. Für $t \neq 0$ hat $x^3 + bx^2 + cx + d$ die einfachen Wurzeln $0, 1, \lambda$, und daher ist in einer Etalumgebung von 0 in T

$$x^3 + bx^2 + cx + d = (x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)$$

mit $e_1(0) = 0$, $e_2(0) = 1$, $e_3(0) = \lambda$. Durch eine Koordinatentransformation erhält man daher

$$E_t\colon y^2 = x(x-1)(x-\lambda'), \qquad \lambda'(0) = \lambda,$$

d. h., die Familie wird durch die Funktion $t \mapsto \lambda'(t)$ induziert, und $\lambda'(t)$ ist dadurch eindeutig bestimmt.

Zu B. Der Beweis ist analog, man benutzt hierzu das Resultat aus 2.2.

C. Kurven vom Geschlecht 3. Wir betrachten Kurven vom Geschlecht 3, die nicht hyperelliptisch sind; nach 2.2. definiert dann die Garbe der Differentialformen ω eine Einbettung in die projektive Ebene $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}(H^0(\omega))$, und da zwischen dem Grad m einer ebenen Kurve und dem Geschlecht p die Relation $p = \dfrac{(m-1)(m-2)}{2}$ besteht, ist jede solcher Kurven vom Geschlecht 3 durch eine biquadratische Form $F(x, y, z) = 0$ definiert.
Umgekehrt definiert jede biquadratische Form $F(X, Y, Z)$ mit $dF \neq 0$ (für $(X, Y, Z) \neq 0$) eine *kanonisch* in $\mathbf{P}^2$ eingebettete Kurve vom Geschlecht 3. Die folgenden Differentiale bilden eine Basis von $H^0(C, \omega)$:

$$\eta_X = \frac{X^3}{F_Z}\, d\left(\frac{Y}{X}\right) = -\frac{X^3}{F_Y}\, d\left(\frac{Z}{X}\right),$$

$$\eta_Y = \frac{Y^3}{F_Z}\, d\left(\frac{X}{Z}\right) = -\frac{Y^3}{F_X}\, d\left(\frac{Z}{Y}\right),$$

$$\eta_Z = \frac{Z^3}{F_Y}\, d\left(\frac{X}{Z}\right) = -\frac{Z^3}{F_X}\, d\left(\frac{Y}{Z}\right).$$

(Man beachte die Relationen $d\left(\frac{X}{Z}\right) = -\frac{F_Y}{F_X}\, d\left(\frac{Y}{Z}\right)$ usw. auf C sowie $d\left(\frac{X}{Z}\right) = -\frac{X^2}{Z^2}\, d\left(\frac{Z}{X}\right)$ usw.)

Auf der offenen Menge $X \neq 0$ ist z. B.

$$\eta_Y = -\frac{X^3 Y}{F_Z} d\left(\frac{Y}{X}\right) = \frac{X^3 Y}{F_Y} d\left(\frac{Z}{X}\right),$$

$$\eta_Z = -\frac{X^2 Z}{F_Y} d\left(\frac{X}{Z}\right) = \frac{X^3 Z}{F_Z} d\left(\frac{Y}{X}\right),$$

also ist $(\eta_X : \eta_Y : \eta_Z) = (X : -Y : Z)$.

Ist $(C_s)_{s \in S}$ eine algebraische Familie von Kurven (Fasern von $C \xrightarrow{p} S$), so sind $R^1 p_* \omega_{C|S}$ und $p_* \omega_{C|S}$ lokal frei vom Rang p bzw. 1 (vgl. Kap. III, Abschnitt 1), im Fall $p = 3$ erhalten wir also lokal eine Faktorisierung $C \to \mathbf{P}^2 \times S \to S$. Wenn eine Faser C_0 $(0 \in S)$ nicht hyperelliptisch ist, erhalten wir eine Einbettung $C \subset \mathbf{P}^2 \times S$ (S muß eventuell durch eine Umgebung von 0 ersetzt werden!), d. h., C ist die Nullstellenmenge einer Gleichung

$$F(s, X, Y, Z) = 0$$

(Form vierten Grades in X, Y, Z, Koeffizienten aus $\Gamma(S, \mathcal{O}_S)$, $\left(\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}, \frac{\partial F}{\partial Z}\right)$ $\neq (0, 0, 0)$).

Die semiuniverselle Deformation von C_0 muß also, falls sie existiert, durch eine Familie von Formen vierten Grades definiert sein. Wir können annehmen, C_0 sei durch eine Form

$$F_0 = T_0^4 + A_1(T_1, T_2)\, T_0^3 + A_2(T_1, T_2)\, T_0^2 + A_3(T_1, T_2)\, T_0 + A_4(T_1, T_2) = 0$$

definiert.

Die Menge der biquadratischen Formen in T_0, T_1, T_2 bildet einen projektiven Raum $\mathbf{P}^{14}$, auf dem $SL(3)$ in kanonischer Weise operiert. Da C_0 kanonisch in $\mathbf{P}^2$ eingebettet ist und

$$\mathrm{Aut}(C_0)^{\mathrm{opp}} \to GL(H^0(C_0, \omega_{C_0})),$$

$$\sigma \mapsto (\eta \mapsto \sigma^* \eta)$$

injektiv ist, ist jeder Automorphismus von C_0 Einschränkung eines projektiven Automorphismus σ auf C_0, d. h.

$$\mathrm{Aut}(C_0)^{\mathrm{opp}} = \{\sigma \in SL(3),\ F_0^\sigma = \mathrm{const} \cdot F_0\} \bmod \{\pm \mathrm{id}\},$$

und diese Gruppe ist diskret (die Liesche Algebra ist gleich

$$\mathrm{Kern}\ (\mathrm{Aut}_{I_1}(C_0 \times I_1) \to \mathrm{Aut}\ (C_0)) = H^1(C_0, \Theta_{C_0}) = 0$$

nach dem Satz von RIEMANN-ROCH).

Bezeichnen wir mit $B_0 \subseteq \mathbf{P}^{14}$ das Orbit von F_0, so ist also $SL(3) \to B_0$ eine Etalüberlagerung und $\mathfrak{sl}(3) \to T_{F_0}(B_0)$ ein Isomorphismus.

Daher kann man den Tangentialraum in F_0 an B_0, als Unterraum von $\mathbf{P}^{14}$ betrachtet, wie folgt berechnen: Wir betrachten $k[\tau] = k[t]/(t^2)$; dann ist

$$\tau T_{F_0}(B_0) = \{F_0^{\mathrm{id}+\tau X}(T)/F_0^{\mathrm{id}+\tau(X)}(1, 0, 0) - F_0 \mid X \in \mathfrak{sl}(3)\}$$

(den Quotienten bilden wir, um die transformierte Form $F_0^{\mathrm{id}+\tau X}$ wieder so zu normieren, daß der Koeffizient von T_0^4 gleich 1 wird). Setzen wir $X = E_{ij}$ $(i \neq j)$ bzw.

$E_{11} - E_{00}$, $E_{22} - E_{00}$ (E_{pq} = Matrix mit den Koeffizienten $x_{ij} = \delta_{ip}\delta_{jq}$), so erhalten wir die folgende Basis von $T_{F_0})B_0)$ (wegen

$$F_0^{\mathrm{id}+\tau X}(T) = F_0(T) + \tau\,[F_{0_{T_0}}(T)\,(x_{00}T_0 + x_{10}T_1 + x_{20}T_2)$$
$$+ F_{0_{T_1}}(T)\,(x_{01}T_0 + x_{11}T_1 + x_{21}T_2) + \cdots]$$

und

$$F_0^{\mathrm{id}+\tau X}\,(1, 0, 0)^{-1} = 1 - \tau[4x_{00} + a_1x_{01} + a_2x_{02}],$$

wenn $A_1(T_1, T_2) = a_1T_1 + a_2T_2$):

$$U_{01} = F_{0_{T_1}} \cdot T_0 - a_1F_0, \qquad U_{10} = F_{0_{T_0}} \cdot T_1,$$
$$U_{02} = F_{0_{T_2}} \cdot T_0 - a_2F_0, \qquad U_{20} = F_{0_{T_0}} \cdot T_2,$$
$$U_{12} = F_{0_{T_2}} \cdot T_1, \qquad U_{21} = F_{0_{T_1}} \cdot T_2,$$
$$U_{11} = F_{0_{T_1}}T_1 - F_{0_{T_0}} \cdot T_0 + 4F_0, \qquad U_{22} = F_{0_{T_2}} \cdot T_2 - F_{0_{T_0}} \cdot T_0 + 4F_0.$$

Setzen wir noch $U_{00} = T_0^4$ und ergänzen diese neun linear unabhängigen Formen vom Grad 4 zu einer Basis, durch Formen $G_1, \ldots, G_6$ (in denen o. B. d. A. T_0^4 nicht vorkommt), so gilt

4.3.1. Satz. *Die durch* $F(t, T) = F_0(T) + t_1G_1(T) + \cdots + t_6G_6(T) = 0$ *definierte Familie* C_t, $t \in \mathbf{A}^6$ *ist semiuniversell im Punkt* 0 (*und in jedem Punkt* t_0, *in dem* $G_1, \ldots, G_6$ *transversal zum Orbit von* $F(t_0, T)$ *in* $\mathbf{P}^{14}$ *sind*).

Beispiel.

$$F_0 = T_0^4 + T_1^4 + T_2^4,$$
$$F(t, T) = F_0(T) + t_1T_0^2T_1^2 + t_2T_0^2T_1T_2 + t_3T_0^2T_2^2$$
$$+ t_4T_0T_1^2T_2 + t_5T_0T_1T_2^2 + t_6T_1^2T_2^2.$$

Der Beweis des Satzes folgt daraus, daß $SL(3) \times \mathbf{A}^6 \to \mathbf{P}^{14}$, $(\sigma, F) \mapsto F^\sigma$, in einer Umgebung von (id, F_0) ein Etalmorphismus ist ($\mathbf{A}^6$ wird hier identifiziert mit $\{F_0 + t_1G_1 + \cdots + t_6G_6 = F\}$) und weil jede Familie $(C_s)_{s\in S}$, in der C_0 vorkommt, lokal in $s = 0$ durch eine Form $F(s, T) = 0$ mit $F(0, T) = F_0(T)$ definiert wird.

4.4. Mannigfaltigkeiten vom allgemeinen Typ

Eine komplette singularitätenfreie Mannigfaltigkeit V heißt *von allgemeinem Typ*, wenn das N-kanonische Linearsystem $|\omega_V^{\otimes N}|$ ($\omega_V = \Omega_V^n$, $n = \dim V$) für ein $N > 0$ eine birationale Abbildung definiert. Für $\dim V = 1$ sind das die Kurven vom Geschlecht $\geqq 2$; für $\dim V = 2$ sind die folgenden Typen von Flächen nicht vom allgemeinen Typ: Regelflächen, Enriquesche Flächen, $K3$-Flächen, abelsche Flächen und Flächen mit einem elliptischen Büschel (vgl. etwa I. R. Schafarewitsch u. a.[1]). Ein vollständiger Durchschnitt $V \subset \mathbf{P}^r$ von Hyperflächen $H_1, \ldots, H_{r-n}$ vom Grad $m_1, \ldots, m_{r-n}$ ist genau dann vom allgemeinen Typ, wenn $m_1 + \cdots + m_{r-n} > n + 1$ ist (wegen $\omega_V \cong \mathcal{O}_V(m_1 + \cdots + m_{n-r} - n - 1)$).
B. G. Moišezon hat in seinem Vortrag in Nizza 1970 die Vermutung geäußert, daß alle Deformationen von Mannigfaltigkeiten vom allgemeinen Typ wieder von allgemeinem Typ sind. Wir wollen das hier beweisen unter der einschränkenden Voraussetzung, daß $|\omega_V^{\otimes N}|$ für ein $N > 0$ keine Basispunkte hat. Alle Basisschemata S, T usw. werden als noethersch vorausgesetzt.

4.4.1. Satz. *Es sei $V \xrightarrow{p} S$ glatt und eigentlich, $0 \in S$ und V_0 eine projektive algebraische Mannigfaltigkeit vom allgemeinen Typ mit der oben erwähnten Voraussetzung. Ist S von der Charakteristik 0 (bzw. ω_{V_0} ampel), so gibt es eine Umgebung S_0 von 0 in S und eine natürliche Zahl $N > 0$, so daß folgendes gilt:*

(i) $p^*p_*\omega^{\otimes N} \to \omega^{\otimes N}$ *ist surjektiv über S_0.*

(ii) $R^ip_*\omega^{\otimes Nq} = 0$ *für alle $i > 0$ und $q > 0$, und $p_*\omega^{\otimes Nq}$ ist lokal frei und mit Basiswechsel verträglich.*

(iii) *Ist $\Phi: V|S_0 \to \mathbf{P}_{S_0}(p_*\omega^{\otimes N}|S_0)$ die N-kanonische Abbildung, $W \subseteq \mathbf{P}_{S_0}(p_*\omega^{\otimes N}|S_0)$ das Bild von $V \mid S_0$, so gilt:*

a) *W ist S_0-flach, und für alle S_0-Schemata T ist $(\Phi_T)_*\mathcal{O}_{V_T} = \mathcal{O}_{W_T}$.*

b) *Es gibt ein offenes Unterschema $U \subseteq V \mid S_0$, so daß U_t dicht in V_t ist für alle $t \in S_0$; Φ induziert eine offene Einbettung $U \to W$ (bzw. Φ ist ein Isomorphismus $V \xrightarrow{\sim} W$).*

Beweis. Zunächst sei S von der Charakteristik 0. Für ein $N > 0$ hat nach Voraussetzung das Linearsystem $|\omega_{V_0}^{\otimes N}|$ keine Basispunkte und definiert einen birationalen projektiven Morphismus, das gleiche gilt auch für alle $|\omega_{V_0}^{\otimes Nq}|$, $q > 0$. Nach einem Satz von C. P. Ramanujam [1] (Theorem 3) ist dann $H^j(V_0, \omega_{V_0}^{\otimes -m}) = 0$ für $j = 0, \ldots, n-1$ und alle $m > 0$; aus Dualitätsgründen (vgl. z. B. Kap. III, Abschnitt 2) ist also $H^i(V_0, \omega_{V_0}^{\otimes m}) = 0$ für alle $i \geqq 1$ und $m > 1$.
Für $N > 1$ ist dann in einer Umgebung von 0 auch $R^ip_*\omega_{V|S}^{\otimes N} = 0$ für alle $i \geqq 1$ und $p_*\omega_{V|S}^{\otimes N}$ frei und mit Basiswechsel verträglich (Basiswechsel, vgl. z. B. Kap. III, Abschnitt 1). Da der kanonische Morphismus $p^*p_*\omega_{V|S}^{\otimes N} \to \omega_{V|S}^{\otimes N}$ auf V_0 surjektiv ist, hat sein Kokern einen zu V_0 disjunkten Träger F und ist daher zu $p^{-1}(S - p(F))$ disjunkt.
Insgesamt gibt es also zu jedem $Nq > 1$ eine Umgebung von 0, über der $p_*\omega_{V|S}^{\otimes Nq}$ lokal frei und mit Basiswechsel verträglich ist, die höheren direkten Bilder verschwinden und $p^*p_*\omega_{V|S}^{\otimes Nq} \to \omega_{V|S}^{\otimes Nq}$ surjektiv ist.
Wir zeigen, daß für $q \gg 0$ die Nq-kanonische Abbildung

$$V_0 \xrightarrow{\Phi_q} \mathbf{P}(H^0(V_0, \omega_{V_0}^{\otimes Nq})$$

die Eigenschaft $(\Phi_q)_*\mathcal{O}_{V_0} = \mathcal{O}_{W_q}$ (mit $W_q =: \Phi_q(V_0)$) hat. Es sei $\eta_0, \ldots, \eta_r$ eine Basis von $H^0(V_0, \omega_{V_0}^{\otimes N})$ und V_{0i} die offene Teilmenge von V_0, auf der η_i keine Nullstellen hat, $V_0 = V_{00} \cup V_{01} \cup \cdots \cup V_{0r}$.
Für jedes q sei W_{qi} die offene Teilmenge in W_q, die durch $\eta_i^q \neq 0$ definiert ist. Dann ist $W_{q0}, \ldots, W_{qr}$ eine affine Überdeckung von W_q und $\Phi_q^{-1}W_{qi} = V_{0i}$. Ist jetzt z. B. f eine auf V_{00} reguläre Funktion, so ist $f\eta_0^q$ für $q \gg 0$ eine auf ganz V reguläre qN-fache Differentialform, also $f \in H^0(W_{q0}, \mathcal{O}_{W_q})$. Da $H^0(V_{0i}, \mathcal{O}_{V_0})$ endlich über $H^0(W_{1i}, \mathcal{O}_{W_1})$ ist, folgt daher für $q \gg 0$ die Beziehung $\Phi_q * \mathcal{O}_{V_0} = \mathcal{O}_{W_q}$.
Wir ersetzen N durch qN für ein solches q und zeigen, daß für $q \gg 0$ in einer Umgebung von 0 die Behauptungen (i), (ii), und (iii) gelten. Indem wir S gegebenenfalls verkleinern, können wir annehmen, daß auf S die Behauptung (i) gilt und (ii) für $q = 1$. Es sei $\mathcal{C}$ der Kokern von $\mathcal{O}_W \to \Phi_*\mathcal{O}_V$. Wir zeigen, daß $\operatorname{supp} \mathcal{C} \cap W_0 = \emptyset$ ist, so daß also $\mathcal{O}_W \to \Phi_*\mathcal{O}_V$ surjektiv über einer Umgebung von 0 ist. Dazu sei $S = \operatorname{Spec}(R)$ Spektrum eines lokalen Ringes und 0 sein abgeschlossener Punkt.

Wir können annehmen (Noethersche Induktion), daß für jeden echten Restklassenring R' von R der Morphismus $\mathcal{O}_W \to \Phi_*(\mathcal{O}_V \otimes_R R')$ bereits surjektiv ist. Es sei $r \neq 0$ ein Element aus m_R, $I = \operatorname{ann}_R(r)$. Da $\mathcal{O}_V$ R-flach ist, ist

$$0 \to \mathcal{O}_V/I\mathcal{O}_V \xrightarrow{r} \mathcal{O}_V \to \mathcal{O}_V/r\mathcal{O}_V \to 0$$

exakt; also sind in dem folgenden kommutativen Diagramm die Zeilen exakt:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to \Phi_*(\mathcal{O}_V/I\mathcal{O}_V) & \xrightarrow{r} & \Phi_*\mathcal{O}_V & \to & \Phi_*(\mathcal{O}_V/r\mathcal{O}_V) & \to 0 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ \mathcal{O}_W & \xrightarrow{r} & \mathcal{O}_W & \longrightarrow & \mathcal{O}_W/r\mathcal{O}_W & \to 0 \end{array}$$

(da der rechte vertikale Pfeil ein Epimorphismus ist).
Hieraus folgt sofort, daß $\mathcal{O}_W \to \Phi_*\mathcal{O}_V$ surjektiv ist, also $\operatorname{supp} \mathcal{C} \cap W_0 = \emptyset$.
Wir können also jetzt $\Phi_*\mathcal{O}_V = \mathcal{O}_W$ annehmen. Ist $U \subset V$ die offene Menge der Punkte, in denen Φ quasiendlich ist, so folgt aus ZARISKIS Hauptsatz (in der Formulierung z. B. aus H. KURKE, G. PFISTER und M. ROCZEN [1]), daß Φ auf U eine offene Einbettung $U \to W$ induziert. Außerdem ist $U \neq \emptyset$, da $V_0 \cap U \neq \emptyset$ ist.
Wir setzen $S_0 = p(U)$; dann ist S_0 eine Umgebung von 0 in S und U_t dicht in V_t für alle $t \in S_0$, d. h., es gilt (iii)b).
Insbesondere ist Φ_t birational, und aus dem oben zitierten Resultat aus C. P. RAMANUJAM [1] folgt dann $H^i(V_t, \omega_{V_t}^{\otimes Nq}) = 0$ für alle $i > 0$, $q > 0$ und nach Basiswechsel (Kap. III, Abschnitt 1) somit auch $R^i p_* \omega_{V|S}^{\otimes Nq} = 0$ für alle $i > 0$, $q > 0$, und $p_*\omega^{\otimes Nq}$ ist daher lokal frei und mit Basiswechsel verträglich, also ist (ii) bewiesen.
Wegen

$$\omega_{V|S_0}^{\otimes Nq} \cong \Phi^*\mathcal{O}_W(q)$$

und

$$p_*\Phi^*\mathcal{O}_W(q) = p_{0*}[(\Phi_*\mathcal{O}_V) \otimes \mathcal{O}_W(q)] = p_{0*}\mathcal{O}_W(q)$$

(mit p_0: $W \to S_0$ Projektion) ist $p_{0*}\mathcal{O}_W(q)$ für alle $q \geqq 0$ lokal frei, und somit ist W S_0-flach ($W = \operatorname{Proj}\left(\sum_{q \geqq 0} p_*\omega_{V|S_0}^{\otimes Nq}\right)$, wenn $N \gg 0$ ist). Bei Basiswechsel $T \to S_0$ ist $W_T = W \times_{S_0} T$ daher das Bild der N-kanonischen Abbildung Φ_T: $V_T \to \mathbf{P}_T(p_{T*}\omega_{V_T|T}^{\otimes N})$ und $(\Phi_T)_*\mathcal{O}_{V_T} = \mathcal{O}_{W_T}$.

Der Beweis für den Fall, daß ω_{V_0} ampel ist, verläuft völlig analog. Man hat dazu nur zu beachten: Wenn $\omega_{V_0}^{\otimes N}$ eine projektive Einbettung definiert, so auch $\omega_{V_0}^{\otimes Nq}$ für $q > 0$. Man kann also $H^i(V_0, \omega_{V_0}^{\otimes Nq}) = 0$ für alle $i > 0$, $q > 0$ annehmen. Die N-kanonische Abbildung Φ ist dann auf V_0 eine abgeschlossene Einbettung. Das gilt dann auch über einer Umgebung von 0, und wir können N so groß wählen, daß $R^i p_* \omega_{V|S}^{\otimes Nq} = 0$ für $i > 0$, $q > 0$ auf dieser Umgebung ist.

Für Mannigfaltigkeiten vom allgemeinen Typ ist die Gruppe der birationalen Transformationen endlich, wie im folgenden präzisiert werden soll.
Es sei V eine glatte Mannigfaltigkeit über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k. Da V normal ist, ist jede birationale Transformation von V auf einer offenen Menge $U \subseteq V$ mit $\operatorname{kodim}(V - U) \geqq 2$ definiert. Daher operiert die Gruppe der birationalen Transformationen (linear) auf jedem der Vektorräume $H^0(V, \omega_V^{\otimes N})$, $N \in \mathbf{Z}$, durch $\eta \mapsto \alpha^*\eta$ (da $H^0(V, \omega_V^{\otimes N}) \to H^0(U, \omega_V^{\otimes N})$ bijektiv ist). Wenn $|\omega_V^{\otimes N}|$ einen birationalen Morphismus Φ: $V \to \mathbf{P}_k^r$ definiert, induziert also jede birationale Transforma-

tion α einen linearen Automorphismus $\bar{\alpha}\colon \mathbf{P}_k^r \to \mathbf{P}_k^r$, der $\Phi(V)$ auf sich abbildet, und umgekehrt induziert jeder solche lineare Automorphismus eine birationale Transformation α von V. Die Gruppe $B(k)$ aller über k definierten birationalen Transformationen von V besteht also aus den k-rationalen Punkten eines abgeschlossenen Untergruppenschemas von $PGL(r+1)$ (Stabilisator von $\Phi(V) \subseteq \mathbf{P}_k^r$).

Funktoriell läßt sich die Gruppe $B(k)$ wie folgt interpretieren: Wir betrachten die Kategorie der Noetherschen reduzierten Schemata $S, S', \ldots$; es sei $p\colon V \to S$ ein glatter, eigentlicher Morphismus (mit zusammenhängenden Fasern). Außerdem sei für jedes (reduzierte!) S-Schema S' mit $B(S')$ die Gruppe aller birationalen Transformationen α' von $V' =: V \times_S S'$ über S' mit der Eigenschaft, daß der Definitionsbereich von α' und α'^{-1} mit jeder Faser einen nicht leeren Durchschnitt hat, bezeichnet.

Hilfssatz 1. *Jedes $\alpha \in B(S)$ ist in den Punkten x von V mit* $\operatorname{codh} \mathcal{O}_{V,x} \leqq 1$ *definiert.*

Beweis. Es sei $t = p(x) \in S$. Da $\mathcal{O}_{V,x}$ flach über $\mathcal{O}_{S,t}$ ist, ist

$$\operatorname{codh} \mathcal{O}_{V,x} = \operatorname{codh} \mathcal{O}_{V_t,x} + \operatorname{codh} \mathcal{O}_{S,t} = \dim \mathcal{O}_{V_t,x} + \operatorname{codh} \mathcal{O}_{S,t} \leqq 1 .$$

Ist $\dim \mathcal{O}_{V_t,x} = 0$, so ist x allgemeiner Punkt in seiner Faser, und somit nach Definition von $B(S)$ jedes $\alpha \in B(S)$ in x definiert.

Ist $\dim \mathcal{O}_{V_t,x} = 1$, so ist $\operatorname{codh} \mathcal{O}_{S,t} = 0$, also $\mathcal{O}_{S,t} = k(t)$ ein Körper (da S reduziert ist) und $\mathcal{O}_{V,x} = \mathcal{O}_{V_t,x}$ ein diskreter Bewertungsring. Daher ist α auch in solchen Punkten definiert, und der Hilfssatz ist bewiesen.

Auf Grund dieses Hilfssatzes erhalten wir, daß für reduzierte $S' = \operatorname{Spec}(R')$ die Gruppe $B(S')$ auf den R'-Moduln $H^0(V', \omega_{V'|S'}^{\otimes N})$ operiert ($N \in \mathbf{Z}$) ($\eta \mapsto \alpha^* \eta$).

Hilfssatz 2. *Es sei N eine natürliche Zahl derart, daß folgendes gilt:*

(1) $H^1(V_t, \omega_{V_t}^{\otimes Nq}) = 0$ *für alle* $t \in S$, $q > 0$.

(2) *Die N-kanonische Abbildung $\Phi\colon V \to P = \mathbf{P}_S(E)$ (mit $E =: p_* \omega_{V|S}^{\otimes N}$) ist ein birationaler Morphismus $V \to W =: \Phi(V) \subseteq P$ mit $\Phi_* \mathcal{O}_V = \mathcal{O}_W$. Dann ist B darstellbar durch ein endliches Untergruppenschema von $PGL(E^{\vee})$, ($E^{\vee}$ duale Garbe zu E).*

Beweis. Es sei o. B. d. A. $S = \operatorname{Spec}(R)$ affin, $H^0(V, \omega_{V|S}^{\otimes N})$ frei vom Rang $r+1$, $S' = \operatorname{Spec}(R')$ ein S-Schema. Für $\alpha \in B(S')$ induziert $\alpha^{*\prime}$ einen linearen Automorphismus $\bar{\alpha}\colon P \to P$, der $\Phi(V')$ auf sich abbildet, und $\alpha \mapsto \bar{\alpha}$ ist eine natürliche Transformation von Gruppenfunktoren.

Aus der Voraussetzung (1) folgt, daß $p_* \omega_{V|S}^{\otimes Nq}$ lokal frei und mit Basiswechsel verträglich ist, aus (2) folgt

$$p_* \omega_{V|S}^{\otimes Nq} = p_{0*} \Phi_* (\Phi^* \mathcal{O}_W(q)) = p_{0*} (\Phi_* \mathcal{O}_V(q)) = p_{0*} \mathcal{O}_W(q)$$

($p_0\colon W \to S$ Projektion). Also ist W S-flach und $W \times_S S' = \Phi_{S'}(V \times_S S')$. Außerdem ist

$$\begin{tikzcd} V' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\Phi"'] & V' \arrow[d, "\Phi"] \\ W' \arrow[r, "\bar{\alpha}"] & W' \end{tikzcd} \qquad (W' =: W \times_S S')$$

nach Konstruktion von $\bar{\alpha}$ kommutativ und daher α durch $\bar{\alpha}$ eindeutig bestimmt. Somit wird B durch den Stabilisator von W in $PGL(r+1)$ dargestellt.
Um zu zeigen, daß B endlich über S ist, genügt es zu zeigen, daß B eigentlich über S ist. Dazu genügt es zu zeigen (Bewertungskriterium): Ist $S = \operatorname{Spec}(R)$, R ein diskreter Bewertungsring, so läßt sich jede birationale Transformation α_K von V_K ($K = \operatorname{Quot}(R)$) zu einer birationalen Transformation α von V über S fortsetzen.
Da V ein reguläres Schema ist, läßt sich α_K zu einem S-Morphismus $\alpha\colon U \to V$ fortsetzen, der auf einem offenen Unterschema U von V definiert ist, so daß also $\operatorname{kodim}_V (V - U) \geqq 2$ ist. Dann ist für jedes $\eta \in H^0(V, \omega_{V|S}^{\otimes N})$ das inverse Bild $\alpha^*\eta$ auf U und damit auf ganz V definiert, d. h., α^* ist eine R-lineare Abbildung

$$\alpha^*\colon H^0(V, \omega_{V|S}^{\otimes N}) \to H^0(V, \omega_{V|S}^{\otimes N}),$$

und $\alpha^* \otimes_R K = (\alpha_K)^*$ ist ein Isomorphismus.
Analog induziert α_k^{-1} einen S-Morphismus $\alpha'\colon U' \to V$ mit $\operatorname{kodim}_V (V - U') \geqq 2$ und

$$\alpha'^*\colon H^0(V, \omega_{V|S}^{\otimes N}) \to H^0(V, \omega_{V|S}^{\otimes N}),$$

$$\alpha'^* \otimes_R K = (\alpha_K)^{*-1}.$$

Dann ist $(\alpha^* \circ \alpha'^*) \otimes K = \mathrm{id}$, $(\alpha'^* \circ \alpha^*) \otimes K = \mathrm{id}$, also

$$\alpha^* \circ \alpha'^* = \alpha'^* \circ \alpha^* = \mathrm{id},$$

und daher ist α eine birationale Transformation von V, die in den Fasern birational ist. Damit ist gezeigt, daß B ein endliches Gruppenschema über S ist (eigentlich und affin = endlich).

4.4.2. Satz. *Es sei $V \to S$ ein glatter eigentlicher Morphismus. Mit den Bezeichnungen und den Voraussetzungen* (1), (2) *von Hilfssatz* 2 *gilt, wenn $B \subset PGL(E^\vee)$ der Stabilisator von $W \subseteq P$ ist:*

a) *B ist ein endliches Gruppenschema über S.*

b) *Für reduzierte S-Schemata S' ist $B(S')$ die Gruppe aller birationalen Transformationen von $V' = V \times_S S'$ über S', die auch auf allen Fasern birational sind.*

c) *Der Funktor $S' \mapsto \operatorname{Aut}_{S'}(V')$ wird durch ein offenes Untergruppenschema A von B dargestellt, und es gilt $B = A$, wenn $\omega_{V|S}$ ampel relativ S ist.*

d) *Ist $S = \operatorname{Spec}(k)$, k ein Körper, so ist $H^0(V, \Theta_{V|S})$ die zu B und A gehörige Lie-Algebra.*

Aus dem vorigen Hilfssatz folgen a) und b). Jeder Automorphismus α induziert einen linearen Automorphismus von E und somit einen Automorphismus $\bar{\alpha}$ von P, der W auf sich abbildet. Somit gibt es eine kanonische natürliche Transformation $A \to B$. Wir wollen zeigen, daß diese injektiv ist. Es sei also $\bar{\alpha} = \mathrm{id}_W$ und $C =: \operatorname{Kern}(\alpha, \mathrm{id}_V)$; C ist ein abgeschlossenes Unterschema von V, und für jedes S-Schema S' ist $C' = \operatorname{Kern}(\alpha_{S'}, \mathrm{id}_{V'})$. Um zu zeigen, daß $C = \emptyset$ ist, können wir uns also auf den Fall $S = \operatorname{Spec}(R)$, R ein lokaler Artinring, beschränken und induktiv nach der Länge $l(R)$ vorgehen. Für reduzierte S gilt die Behauptung bereits nach dem vorigen Hilfssatz. Es sei $I \cong k =: R/m$ ein einfaches Ideal, $S' = \operatorname{Spec}(R/I)$; nach Induktionsannahme gelte die Behauptung für $V' = V \times_S S'$. Auf dem zugrunde liegenden Raum stimmt α mit id_V überein, und in der Strukturgarbe induziert α eine Abbildung der Form $f \mapsto f + X(f)$, $X\colon \mathcal{O}_V \to I\mathcal{O}_V \cong \mathcal{O}_{V_0}$ (V_0 die abgeschlossene Faser) eine R-Derivation. X verschwindet auf $m\mathcal{O}_V$ (m das Maximalideal von R) und wird daher durch ein globales Vektorfeld Y von V_0 induziert. Da α auf einer dichten offenen Teilmenge mit id_V übereinstimmt, verschwindet dort das Vektorfeld Y, d. h. aber $Y = 0$ auf ganz V_0, $\alpha = \mathrm{id}_V$.

Somit ist der Funktor $A: S' \mapsto \mathrm{Aut}_{S'}(C')$ ein Subfunktor von B. Es ist allgemein bekannt, daß der Funktor A darstellbar ist. Das folgt z. B. aus M. ARTINS Kriterium (M. ARTIN [3], Thm. 3.4.). Daß A Etalgarbe, von endlicher Darstellung und relativ repräsentierbar ist und jede in einem Punkt t formal etale natürliche Transformation $T \to A$ eines darstellbaren Kofunktors T in A in einer Umgebung von t formal etal ist, folgt unmittelbar daraus, daß A Subfunktor des darstellbaren Funktors B ist. Außerdem können wir o. B. d. A. annehmen, daß S Spektrum eines endlich erzeugten Ringes ist. Um ARTINS Kriterium anzuwenden, müssen wir noch nachweisen, daß A effektiv prorepräsentierbar ist. Offensichtlich ist für jeden Punkt $s \in S$ und jede lokale Noethersche $\mathcal{O}_{S,s}$-Algebra R die kanonische Abbildung $A(\hat{R}) \to \varprojlim_n A(R/m^n)$ bijektiv; ist andererseits $R' \leftarrow R \to R''$ ein Diagramm lokaler Artinscher $\mathcal{O}_{S,s}$-Algebren, $R = R''/I$, so ist

$$\mathcal{O}_{V^*} \otimes (R' \times_R R'') \cong (\mathcal{O}_{V^*} \otimes R') \times_{(\mathcal{O}_{V^*} \otimes R)} (\mathcal{O}_{V^*} \otimes R'')$$

(mit $V^* = V \times_S \mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_{S,s})$, Tensorprodukte sind über $\mathcal{O}_{S,s}$ zu verstehen), da $\mathcal{O}_{V^*}$ flach über $\mathcal{O}_{S,s}$ ist. Also ist

$$A(R' \times_R R'') \to A(R') \times_{A(R)} A(R'')$$

bijektiv; nach M. SCHLESSINGER [1] folgt daher, daß A effektiv prorepräsentierbar ist. Somit ist A durch einen algebraischen Raum darstellbarer Subfunktor von B, also A ein Unterschema von B.

Will man sich im Beweis auf projektive Techniken beschränken, so muß man V als projektiv über S voraussetzen, dann wird A durch das größte Unterschema des Hilbertschemas von $V \times_S V$ dargestellt, über dem die Projektion der universellen Familie G von Unterschemata von $V \times_S V$ auf beide Faktoren ein Isomorphismus ist, G ist dann der Graph des universellen Isomorphismus.

A ist offen in B, da für reduzierte S-Schemata S' und für $\alpha \in B(S')$ die Menge aller $t \in S'$, über denen α ein Automorphismus ist, offen in S' ist. Die letzte Behauptung folgt unmittelbar durch Berechnung von Kern $(A(k[t]/(t^2)) \to A(k))$.

Ist H das Hilbertschema von $\mathbf{P}^r$, $Z \subset \mathbf{P}^r \times H$ die universelle Familie vom Unterschemata, so gibt es einen offenen Unterraum $H_1 \subseteq H$, so daß $Z_1 = Z \mid H_1$ die universelle Familie glatter Unterschemata oder Dimension d ist. Aus dem „see-saw"-Theorem (vgl. Kap. III, Abschnitt 1) folgt, daß die Menge aller Punkte von H_1, über denen $\omega^{\otimes N}_{Z_1|H_1}$ lokal isomorph zu $\mathcal{O}(1)$ ist, ein offenes Unterschema $H_{N,d} \subseteq H_1$ bildet. Es sei $W_{N,r} =: Z_1 \mid H_{N,d}$, dann gilt

4.4.3. Satz. *$W_{N,r} \subset \mathbf{P}^N \times H_{N,d}$ ist die universelle Familie glatter, N-kanonisch eingebetteter d-dimensionaler Unterschemata von $\mathbf{P}^r$ (mit dem N-ten Plurigeschlecht P_N* $= \dim H^0(V, \omega_V^{\otimes N}) = r + 1$).

Es sei $\mathfrak{M}(d, N, r)$ die Klasse aller kompletten singularitätenfreien d-dimensionalen Mannigfaltigkeiten vom allgemeinen Typ, für die $|\omega_V^{\otimes N}|$ eine projektive Einbettung definiert, $H^i(V, \omega_V^{\otimes N}) = 0$ für $i > 0$ und $P_N = r + 1$ ist. Nach Satz 4.4.1. ist die Menge H aller $t \in H_{N,d}$ mit $W_t \in \mathfrak{M}(d, N, r)$ offen in H, und jede Deformation $(V \to S, 0, V_0 \xrightarrow{\sim} W_0)$ eines $W_0 \in \mathfrak{M}(d, N, r)$ wird durch einen Morphismus $S \to H$ durch W induziert ($W =: W_{N,r} \mid H$).

Wir wollen zeigen, daß $W \to H$ in jedem Punkt von H eine verselle Deformation ist. Dazu sei $S = \mathrm{Spec}\,(A)$, $\bar{S} = \mathrm{Spec}\,(A/I)$, A ein lokaler Ring, 0 der abgeschlossene Punkt von Spec (A) und $(V \to S, 0, V_0 \xrightarrow{\sim} W_0)$ eine Deformation von $W_0 \in \mathfrak{M}(d, N, r)$, so daß $\bar{V} = V \times_S \bar{S}$ durch einen Morphismus $\bar{S} \to H$ induziert wird. Das bedeutet, daß eine Basis von $H^0(\bar{V}, \omega_{\bar{V}|\bar{S}}^{\otimes N})$ ausgezeichnet ist, durch die eine N-kanonische Einbettung von $\bar{V} \mid \bar{S}$ definiert wird.
Wegen

$$H^0(\bar{V}, \omega_{\bar{V}|\bar{S}}^{\otimes N}) = H^0(V, \omega_{V|S}^{\otimes N}) \otimes_A \bar{A}$$

kann man diese Basis liften zu einer Basis von $H^0(V, \omega_{V|S}^{\otimes N})$; die dadurch definierte N-kanonische Einbettung von $V \mid S$ liefert eine Fortsetzung $S \to H$ von $\bar{S} \to H$, so daß $(V \to S, 0, V_0 \xrightarrow{\sim} W_0)$ dadurch induziert wird. Somit ist gezeigt:

4.4.4. Satz. *Die Familie $W \to H$ induziert in jedem geometrischen Punkt 0 von H eine verselle Deformation von W_0.*

Ferner operiert auf H in offensichtlicher Weise die Gruppe $PGL(r+1)$ (induziert durch die natürliche Operation auf $\mathbf{P}^r$). Wenn $H \to S$ ein $PGL(r+1)$-äquivarianter Morphismus ist, wobei $PGL(r+1)$ trivial auf S operiere, so gibt es eine kanonische Abbildung $\nu\colon \mathfrak{sl}(r+1) \otimes \mathcal{O}_H \to \Theta_{H|S}$, deren Bild diejenigen Vektorfelder auf H sind, die tangential zu den Orbits sind. Mit diesen Bezeichnungen gilt

4.4.5. Satz. *Es sei $W_0 \in \mathfrak{M}(d, N, r)$; eine semiuniverselle (bzw. formale semiuniverselle) Deformation $V \to S$ von W_0 ($S = \mathrm{Spec}\,(A)$, A ein lokaler Henselscher bzw. kompletter Ring) ist durch folgende Eigenschaften charakterisiert:*

(i) *S ist Retrakt von $H' = H_0^h$ (bzw. $H_0^\wedge$), und ist $\pi\colon H' \to S$ die Retraktionsabbildung, so ist $V \times_S H'$ isomorph zu $W \mid H'$.*

(ii) *π ist $PGL(r+1)$-äquivariant (triviale Operation auf S). Außerdem ist die kanonische Abbildung*

$$\nu\colon \mathfrak{sl}(r+1) \otimes \mathcal{O}_{H'} \to \Theta_{H'|S'},$$

surjektiv, und π ist (formal) glatt.

Bemerkungen.

1. Dieser Satz gibt einen Hinweis, wie man semiuniverselle Deformationen bestimmen kann: Man bestimme für $0 \in H$ ein zum Orbit von 0 in H in 0 transversales abgeschlossenes Unterschema S von H und schränke W auf S ein, die so erhaltene Deformation $V \to S$ ist dann ein Kandidat für eine semiuniverselle Deformation von W_0. Dazu kann man außerdem zu Etalumgebungen von 0 übergehen, es müssen dann (i) und (ii) verifiziert werden. Diese Methode hatten wir in 4.3.c) benutzt, und sie wird in 4.5. an einigen weiteren Beispielen illustriert.

2. Die Operation von $PGL(r+1)$ auf H' ist im folgenden Sinne zu interpretieren: Es sei $PGL(r+1)'$ die Henselisierung von $PGL(r+1)$ in e (Einselement) (bzw. Komplettierung). Dann ist $PGL(r+1)'$ „Henselsche" bzw. formale Gruppe, und $H \times PGL(r+1) \to H$ induziert eine Operation $H' \times PGL(r+1)' \to H'$.

3. Im Fall der Charakteristik 0 oder im Fall $d = 1$ ist $H' \to S$ ein $PGL(r+1)'$-Prinzipalbündel, also $\mathfrak{sl}(r+1) \otimes \mathcal{O}_{H'} \cong \Theta_{H'|S'}$. Das gilt infolge von Satz 4.4.2. und da $H^0(V_0, \Theta_{V_0})$ die Liesche Algebra der Automorphismenschemata von V_0 ist.

Beweis von Satz 4.4.5. Zunächst gelte für $V \to S$ die Bedingung (i) und (ii). Aus (i) folgt sofort, daß $V \to S$ versell ist. Es bleibt daher zu zeigen, daß für zwei Tangentialvektoren $\alpha\colon I_1 \to S$, $\beta\colon I_1 - S$ ($I_1 = \operatorname{Spec}(k[t]/(t^2))$, k der Definitionskörper von W_0) folgendes gilt: Sind $\alpha^*(V)$ und $\beta^*(V)$ (als Deformationen von W_0) isomorph, so ist $\alpha = \beta$. Da V durch W induziert wird und da für zwei N-kanonische Einbettungen $V', V'' \subset \mathbf{P}^r \times I_1$ mit $V_0' = V_0'' = W_0$ jeder I_1-Isomorphismus $V' \xrightarrow{\sim} V''$, der auf W_0 die Identität induziert, durch einen projektiven Automorphismus $\mathrm{id} + tX \in PGL(r+1)'(I_1)$ induziert wird ($X \in \mathfrak{sl}(r+1, k)$), ist

$$i_*(\alpha) = i_*(\beta) + \nu(X)$$

($i\colon S \to H'$ Einbettung), also ist $\alpha = \pi_* i_*(\alpha) = \beta = \pi_* i_*(\beta)$.

Es sei umgekehrt $V \to S$ semiuniversell. Dann gibt es eine Abbildung $\pi\colon H' \to S$, so daß $W \mid H' \cong V \times_S H'$ (als Deformation von W_0) ist, deren Tangentialabbildung π^* eindeutig bestimmt ist. Da $W \to H$ versell ist, gibt es andererseits einen Morphismus $j\colon S \to H'$, durch den V aus W induziert wird, und $\pi \circ j$ ist dann ein Morphismus $S \to S$, durch den V aus V induziert wird und dessen Tangentialabbildung demzufolge die Identität ist. Daher ist $\pi \circ j$ ein Automorphismus von S, und $i =: j \circ (\pi \circ j)^{-1}\colon S \to H'$ ist ein Schnitt von π, also gilt (i).

Ist $\mathcal{D}$ der Funktor der infinitesimalen Deformationen von W_0, so ist

$$H_0^\wedge \times_{S^\wedge} H_0^\wedge \subseteq H_0^\wedge \times_{\mathcal{D}} H_0^\wedge,$$

und wegen $(H_0^\wedge \times_S H_0^\wedge)(I_1) = (H_0^\wedge \times_{\mathcal{D}} H_0^\wedge)(I_1)$ ist

$$H_0^\wedge \times_{S^\wedge} H_0^\wedge = H_0^\wedge \times_{\mathcal{D}} H_0^\wedge.$$

Andererseits ist $H_0^\wedge \times_{\mathcal{D}} H_0^\wedge$ das Bild von $H_0^\wedge \times PGL(r+1)^\wedge$ in $H_0^\wedge \times H_0^\wedge$, und somit erfüllt $H_0^\wedge \to S_0^\wedge$ die Bedingung (ii). Das gilt dann auch bereits für $H' \to S$ (im Henselschen Fall), also gilt (ii).

Daß $H' \to S$ (formal) glatt ist, folgt aus der Tatsache, daß $W \mid H' \to H'$ versell ist. Um zu zeigen, daß ν surjektiv ist, genügt es nach dem Lemma von NAKAYAMA zu zeigen, daß

$$\mathfrak{sl}(r+1) \to (T_{H'|S})_0$$

surjektiv ist. Das bedeutet: Wenn $V_1 \subseteq \mathbf{P}^N \times I_1$ ($I_1 = \operatorname{Spec} k[t]/(t^2)$), I_1-glatt mit der speziellen Faser $V_0 \subset V_1$ gegeben ist und als Deformation isomorph zu $V_0 \times I_1$ ist, so gibt es ein $g = 1 + tX$ ($X \in \mathfrak{sl}(r+1)$), d. h. aus $PGL(r+1)(I_1)$ über 1, das über dem $V_1 \subseteq \mathbf{P}^N \times I_1$ entsprechenden Punkt von $(T_{H'|S})_0$ liegt.

Die Isomorphie von V_1 mit $V_0 \times I_1$ induziert auf V_0 die identische Abbildung, und da beide Schemata V_1 und $V_0 \times I_1$ N-kanonisch in $\mathbf{P}^r \times I_1$ eingebettet sind, ist jeder Isomorphismus durch einen I_1-Isomorphismus $\mathbf{P}^r \times I_1 \xrightarrow{g} \mathbf{P}^r \times I_1$ induziert, g ist daher von der Form $1 + tX$. Damit ist Satz 4.4.5. bewiesen.

4.5. Kurven vom Geschlecht 4 und 5

Wir illustrieren Satz 4.4.5. an Kurven vom Geschlecht 4 und 5. Ein Beispiel dazu hatten wir schon in 4.3.C. betrachtet. Wir betrachten Kurven vom Geschlecht 4 und 5, die kanonisch in den projektiven Raum eingebettet sind.

Der Grad einer kanonisch eingebetteten Kurve ist $2p - 2$, ferner ist $\dim H^0(\omega^{\otimes n}) = (2n-1)(p-1)$ für $n > 1$ und $\binom{n+p-1}{p-1}$ die Dimension von $H^0(\mathbf{P}^{p-1}, \mathcal{O}\mathbf{P}^{p-1}(n))$.

Hieraus folgt unmittelbar:

(1) Eine kanonisch eingebettete Kurve $C \subset \mathbf{P}^3$ vom Geschlecht 4 ist durch eine quadratische und eine kubische Form definiert (da der Grad des durch eine quadratische und kubische Form definierten Unterschemas gleich 6 ist).

(2) Eine kanonisch eingebettete Kurve $C \subset \mathbf{P}^4$ vom Geschlecht 5 ist durch drei quadratische Formen definiert oder trigonal. Denn $H^0(\mathbf{P}^4, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^4}(2)) \to H^0(C, \mathcal{O}_C(2))$ ist surjektiv ($\mathcal{O}_C(2) = \omega_C^{\otimes 2}$), und es ist

$$\dim H^0(\mathbf{P}^4, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^4}(2)) = 15, \quad \dim H^0(C, \mathcal{O}_C(2)) = 12.$$

Also gibt es drei linear unabhängige quadratische Formen, die auf C verschwinden. Die Formen müssen irreduzibel sein, da C irreduzibel ist und keine Linearform auf C verschwindet. Falls drei derartige linear unabhängige Formen eine Kurve (vom Grad 8) definieren, folgt die erste Behauptung.

Hieraus folgt: Wenn wir $\mathbf{P}^9$ bzw. $\mathbf{P}^{19}$ mit dem Raum der quadratischen bzw. kubischen Formen in vier Unbestimmten T_0, T_1, T_2, T_3 identifizieren und wenn $M_0, \ldots, M_{19}$ die Monome vom Grad 3 in irgendeiner Reihenfolge bezeichnet, so ist das Hilbertschema der kanonischen Kurven $\subseteq \mathbf{P}^3$ gleich

$$H = \bigcup_{0 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq 19} H_{i_1 i_2 i_3 i_4} \subseteq \mathbf{P}^9 \times \mathbf{P}^{19},$$

$$\begin{aligned} H_{i_1 i_2 i_3 i_4} = \{ & (F, G) \text{ mit } F \in \mathbf{P}^9, G \in \mathbf{P}^{19}, \operatorname{rg}(dF, dG) = 2, \\ & \operatorname{rg}(T_0 F, T_1 F, T_2 F, T_3 F, M_j; j \neq i_\nu) = 20, \\ & G \text{ Linearkombination der } M_j, j \neq i_\nu \} \\ \subseteq\ & \mathbf{P}^9 \times \mathbf{P}^{15} \text{ (offener Unterraum)} \end{aligned}$$

(wobei $\mathbf{P}^{15}$ hier der von den M_j, $j \neq i_\nu$, aufgespannte Unterraum ist).

Analog erhalten wir, wenn wir mit $\mathbf{P}^{14}$ den Raum der quadratischen Formen in $T_0, \ldots, T_4$ bezeichnen, für das Hilbertschema der nichttrigonalen kanonischen Kurven $\subseteq \mathbf{P}^4$:

$$H = \bigcup H_{I_1 I_2 I_3} \subset \mathbf{P}^{14} \times \mathbf{P}^{14} \times \mathbf{P}^{14},$$

wobei wieder die quadratischen Monome in irgendeiner Reihenfolge $M_0, M_1, \ldots, M_{14}$ angeordnet seien, I_1, I_2, I_3 jeweils Zweiermengen $\{0, \ldots, 14\}$ sind, die disjunkt sind, und H_{I_1, I_2, I_3} wie folgt definiert ist: Es sei L_I der von den M_j, $j \notin I$, aufgespannte Unterraum von $\mathbf{P}^{14}$ ($\dim L_I = 12$). Dann ist

$$\begin{aligned} H_{I_1 I_2 I_3} = \{ & (F_1, F_2, F_3) \in L_{I_1} \times L_{I_2} \times L_{I_3};\ \operatorname{rg}(dF_1, dF_2, dF_3) = 3, \\ & F_1, F_2 \text{ und } L_{I_3} \text{ usw. (zyklische Vertauschung) spannen } \mathbf{P}^{19} \text{ auf} \} \\ \subseteq\ & L_{I_3} \times L_{I_2} \times L_{I_1} \text{ (offener Unterraum).} \end{aligned}$$

Hat man jetzt eine Kurve C_0 vom Geschlecht 4 oder 5 gegeben, die sich kanonisch einbetten läßt (also nicht hyperelliptisch ist), so kann man eine Familie von solchen Kurven $(C_s)_{s \in S}$ bestimmen, die die Kurve C_0 (zu dem „Parameterwert" 0) enthält und in einer Umgebung von 0 in jedem Punkt semiuniversell ist.

Man bestimme wie in 4.3.C. den Tangentialraum an das Orbit des C_0 entsprechenden Punktes $h \in H$ (nach Wahl einer kanonischen Einbettung) bezüglich der kanonischen Operation $H \times PGL(N+1) \to H$ ($N = 3$ oder 4) und einen dazu transversalen Unterraum $S \subset H$ (o. B. d. A. S = linearer Unterraum $\cap\ H$). In allen Punkten, in denen S transversal zum Orbit ist, ist die auf S induzierte Familie von Kurven semiuniversell.

Folgendes Beispiel möge das illustrieren: Es sei C_0 die durch

$$F_0 = T_0^2 - T_1^2 - T_2^2 = 0,$$
$$G_0 = T_1^3 + T_2^3 + T_3^3 = 0$$

definierte Kurve vom Geschlecht 4 in $\mathbf{P}^3$. Genau nach der Methode von 4.3.C. berechnet man, daß C_t, definiert durch

$$\begin{aligned} F(t, T) &= F_0(T) + t_1 T_3^2, \\ G(t, T) &= G_0(T) + t_2 T_0^3 + t_3 T_0^2 T_1 + t_4 T_0^2 T_2 + t_5 T_0^2 T_3 \\ &\quad + t_6 T_0 T_1 T_2 + t_7 T_0 T_1 T_3 + t_8 T_0 T_2 T_3 + t_9 T_1 T_2 T_3, \end{aligned}$$

semiuniversell in $t = 0$ ist.

4.6. Weitere Eigenschaften von Mannigfaltigkeiten vom allgemeinen Typ

Ist V N-kanonisch in $\mathbf{P}^r$ eingebettet, so ist Aut $(V) \subseteq PGL(r + 1)$. Ist h der zu $V \subset \mathbf{P}^r$ gehörige Parameter im Hilbertschema von $\mathbf{P}^r$, so ist also Aut (V) der Stabilisator von h in $PGL(N + 1)$, und daher ist Aut (V) eine lineare algebraische Gruppe. Die dazugehörige Liesche Algebra ist

$$\text{Kern } (\text{Aut}_{I_1}(V \times I_1) \to \text{Aut } (V)) = H^0(V, \omega_V).$$

Für Kurven ist sofort klar, daß $H^0(V, \omega_V) = 0$ ist. Das gilt auch (zumindest im Fall der Charakteristik 0) für höherdimensionale Mannigfaltigkeiten.

4.6.1. Satz. *Ist V vom allgemeinen Typ und* char $(k) = 0$ *oder* dim $V = 1$, *so ist* Aut (V) *endlich und diskret.*

Nach KODAIRAS „Vanishing Theorem" gilt nämlich: Ist V eine projektive algebraische Mannigfaltigkeit der Dimension n, singularitätenfrei und $\mathfrak{B}$ eine ample umkehrbare Garbe, so ist $H^q(V, \Omega_V^p \otimes \mathfrak{B}) = 0$ für $p + q > n$ (KODAIRA-AKIZUKI-NAKANO). In unserem Fall ist also $H^n(V, \Omega_V^1 \otimes \omega) = 0$ und nach SERRES Dualitätssatz daher auch $H^0(V, \theta_V) = 0$, q. e. d.

Zum Beispiel ist für „allgemeine" Kurven vom Geschlecht > 2 die Automorphismengruppe trivial, für allgemeine Kurven vom Geschlecht 2 ist die kanonische Involution der einzige nichttriviale Automorphismus.
Für höherdimensionale Mannigfaltigkeiten und positive Charakteristik scheint nichts derartiges bekannt zu sein. Aus dem Satz folgt insbesondere:
(1) Für Mannigfaltigkeiten mit ampler kanonischer Garbe ist die semiuniverselle Deformation universell (vgl. Kap. II).
(2) Die Orbits von $PGL(N + 1)$ in $H_{N,d}$ sind glatte Untermannigfaltigkeiten der Dimension $(N + 1)^2 - 1$.

5. Weitere Beispiele — Polarisierung

Die bisher betrachteten Beispiele von Mannigfaltigkeiten waren alle mit einer projektiven Einbettung versehen. Wir betrachten jetzt zwei Beispiele, bei denen das nicht der Fall ist.

5.1. Abelsche Mannigfaltigkeiten und komplexe Tori

Es sei $k = \mathbf{C}^g$, $L \subset \mathbf{C}^g$ ein Gitter mit der Periodenmatrix $\Omega_0 = (I_g, Z)$, $I_g = (\delta_{ij})$, $Z = (z_{ij}) \in M_g(\mathbf{C})$[1]) und $A_0 = \mathbf{C}^g/L$ eine abelsche Mannigfaltigkeit. Man erhält auf folgende Weise eine Deformation von A_0 in der Kategorie der komplexen Räume: Es sei $U \subset M_g(\mathbf{C})$ eine Umgebung der 0 derart, daß

$$\det \begin{pmatrix} I_g Z + X \\ I_g \bar{Z} + \bar{X} \end{pmatrix} \neq 0$$

auf U ist, und es sei $A = \mathbf{C} \times U/\mathbf{Z}^{2g}$ bezüglich der Operation

$$(z, X) + p = (z + \Omega(X)\, p, X)$$

($p \in \mathbf{Z}^{2g}$, $\Omega(X) = (E_g, Z + X)$, $z \in \mathbf{C}^g$), $f\colon A \to U$ Projektion. Dann ist (A_X; $X \in U$) eine Deformation von A_0 ($A_X = f^{-1}(X)$). Die Deformationen sind zwar noch komplexe Tori, aber im allgemeinen keine algebraischen Mannigfaltigkeiten.
Damit ein komplexer Torus $A = \mathbf{C}^g/L$ algebraisch ist, ist es notwendig und hinreichend, daß auf $\mathbf{C}^g$ eine positiv definite hermitesche Form $H(x, y)$ existiert, so daß

$$E(x, y) = \frac{1}{2i}\,(H(x, y) - H(y, x))$$

auf $L \times L$ nur rationale Werte annimmt (Riemannsche Periodenrelationen).
Um zu vermeiden, daß man nicht-algebraisierbare Deformationen erhält, muß man *polarisierte* abelsche Mannigfaltigkeiten (A_0, H_0) betrachten, d. h. A_0 plus eine „Riemannsche Form" H_0.
Es sei

$$S = \{X \in M_g(\mathbf{C}),\ E_0(\Omega(X)\, p, \Omega(X)\, q) = E_0(\Omega_0 p, \Omega_0 q),\ p, q \in \mathbf{Z}^{2g}\}.$$

Dann ist S eine nichtsinguläre analytische Mannigfaltigkeit der Dimension $g(g + 1)/2$ und die obige Deformation, eingeschränkt auf S, liefert eine Deformation (A_X, H_X; $X \in S$) der *polarisierten* abelschen Mannigfaltigkeit (A_0, H_0).
Die beiden betrachteten Deformationen sind semiuniversell in 0: Ist (A'_t, $t \in T$) eine beliebige analytische Familie komplexer Tori, $\theta\colon A_0 \cong A'_{t_0}$ ($t_0 \in T$) ein Isomorphismus, so betrachten wir das Vektorbündel $V \to T$ (= Bündel längs der Fasern von $A' \to T$, eingeschränkt auf den Nullschnitt) sowie die Exponentialfunktion

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\exp"] \arrow[dr] & & A' \arrow[dl] \\ & T & \end{tikzcd}$$

Ist $L' \subset V$ der Kern von exp, dann ist $A' = V/L'$, L' ist ein lokales System über T und erzeugt V über $\mathbf{R}$. Wegen $A'_{t_0} \cong A_0$ gibt es eine Umgebung U' von t_0 in T und

[1]) $M_g(\mathbf{C})$ bezeichnet die Algebra der komplexen $(g \times g)$-Matrizen, mit $\bar{X}$ bezeichnen wir die konjugiert komplexe Matrix.

Isomorphismen

$$\begin{array}{ccc} V/U' & \cong & \mathbf{C}^g \times U' \\ \uparrow & & \uparrow \Omega \\ L/U' & \to & \mathbf{Z}^{2g} \times U' \end{array}$$

so daß $\Omega(t_0') = \Omega_0$, $\Omega(t) = \Omega_0 + (0, X(t))$ und somit $t \mapsto X(t)$ holomorph ist.
Wenn wir vorübergehend als Familie polarisierter abelscher Mannigfaltigkeiten $(A_t', H_t; t \in T)$ eine Familie komplexer Tori mit einer analytisch von t abhängigen Riemannschen Form $V_t \times V_t \xrightarrow{H_t} \mathbf{C}$ bezeichnen, so erhalten wir ferner:

Ist $(A_0, H_0) \xrightarrow{\sim} (A_{t_0}', H_{t_0})$, so hängt $E_t\colon L_t \times L_t \to \mathbf{Q}$ nicht von t ab, also $E_t = E_0$ und

$$E_0(\Omega(t)\, p, \Omega(t)\, q) = E_0(\Omega_0 p, \Omega_0 q),$$

d. h., $t \to X(t)$ ist ein Morphismus (komplexer Räume!) $U \to S$, durch den (A_t', H_t) induziert wird.
Um von „Semiuniversalität" in der Kategorie der algebraischen Schemata zu reden, muß noch geklärt werden, wie man erstens „Polarisierung" algebraisch definieren kann und ob zweitens $U \to S$ algebraisch ist (vgl. dazu Kap. II). Nach dem Satz von APPEL-HUMPERT entsprechen sich die Riemannschen Formen und die amplen Linienbündel $L \to A_0$ umkehrbar eindeutig (E repräsentiert die erste Chernsche Klasse von L). Das ermöglicht, auf algebraischem Wege den Begriff „polarisierte algebraische Mannigfaltigkeit" zu definieren (T. MATSUSAKA [1]).

5.2. Polarisierung

Für eine Mannigfaltigkeit V sei $\mathrm{Pic}^{\tau}(V)$ die Gruppe der Cartierdivisoren, für die ein ganzzahliges Vielfaches algebraisch äquivalent zu 0 ist.
Eine *inhomogen polarisierte algebraische* Mannigfaltigkeit ist ein Paar (V, h), V eine algebraische Mannigfaltigkeit, $h \in \mathrm{Pic}(V)/\mathrm{Pic}^{\tau}(V)$ eine Klasse, die einen *amplen* Divisor enthält ($=_{\mathrm{def}}$ „h ist ampel"). Eine *homogen polarisierte algebraische* Mannigfaltigkeit ist ein Paar (V, H), $H \subset \mathrm{Pic}(V)/\mathrm{Pic}^{\tau}(V)$ ein Strahl durch eine ample Divisorenklasse h (d. h. $H = \{h'; \exists\, m, n > 0,\ mh' = nh\}$).
Der Begriff eines „Morphismus polarisierter Mannigfaltigkeiten" und einer „Familie polarisierter Mannigfaltigkeiten", Deformation usw. ist klar.
Für abelsche Mannigfaltigkeiten ist $\mathrm{Pic}(V)/\mathrm{Pic}^{\tau}(V)$ enthalten in $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(V, \hat{V})$ ($\hat{V}$ duale abelsche Mannigfaltigkeit) (induziert durch $L \in \mathrm{Pic}(V) \mapsto (s - \mathrm{pr}_1 - \mathrm{pr}_2)^* L \in \mathrm{Pic}_V^{\tau}(V) = \mathrm{Hom}(V, \hat{V})$, vgl. D. MUMFORD [6], S. 74). Jede Polarisierung h von V definiert also einen endlichen (vgl. D. MUMFORD [6], S. 84) Morphismus $\Lambda h\colon V \to \hat{V}$ abelscher Mannigfaltigkeiten und ist durch diesen eindeutig bestimmt. Die Polarisierung heißt *separabel*, wenn Λh eine separable Isogenie ist.
Ist $V = \mathbf{C}^g/L$ über C definiert und die Polarisierung durch die Riemannsche Form $H(x, y)$ gegeben, so ist

$$\hat{V} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{anti}}(\mathbf{C}^g, \mathbf{C})/H(-, L)$$

(„anti" = antilinear, $H(-, L)$ bezeichnet die Menge aller Antilinearformen $z \mapsto (z, p)$ mit $p \in L$), und $\Lambda h\colon V \to \hat{V}$ wird induziert durch $z \mapsto H(-, z)$.

5.3. Weiteres über Deformationen abelscher Mannigfaltigkeiten

Es sei V_0 eine abelsche Mannigfaltigkeit über einen Körper k. Um Deformationen von V_0 zu studieren, muß man erstens die Deformation der zugrunde liegenden Mannigfaltigkeit und zweitens die Deformation der Gruppenstruktur studieren. Letzteres ist jedoch nicht nötig nach einem Resultat von D. Mumford [4], S. 124, Prop. 6.15 und Thm. 6.14, auf jede Deformation der zugrunde liegenden Mannigfaltigkeit läßt sich die Gruppenstruktur von V_0 bis auf eine Translation eindeutig liften, da es genügt, den Nullschnitt zu liften, was nach dem Henselschen Lemma möglich ist. Es ist

$$H^1(V_0, \Theta_{V_0}) = H^1(V_0, \mathcal{O}_{V_0}) \otimes H^0(V_0, \Theta_{V_0}),$$
$$H^2(V_0, \Theta_{V_0}) = H^2(V_0, \mathcal{O}_{V_0}) \otimes H^0(V_0, \Theta_{V_0}),$$

also $\dim H^1(V_0, \Theta_{V_0}) = g^2$ ($g = \dim V_0$). Die kanonische Involution $z \mapsto -z$ auf V_0 induziert in $H^0(V_0, \Theta_{V_0})$ die Multiplikation mit -1, und weil das Hindernis für die Liftung infinitesimaler Deformationen in $H^2(V_0, \Theta_{V_0})$ liegt und invariant bezüglich universeller Automorphismen ist (also bezüglich der Involution), muß es (falls char $(k) \neq 2$ ist) verschwinden, das gilt auch noch im Fall char $(k) = 2$ (F. Oort [1]). Man kann ohne großen Aufwand verifizieren, daß sich jeder Automorphismus von Deformationen infinitesimal liften läßt. Wir erhalten daher aus dem Satz von Schlessinger (vgl. Kap. II) in Übereinstimmung mit 5.1.:

Ist A ein kompletter diskreter Bewertungsring mit dem Restklassenkörper k, $A = \Lambda[[x_{11}, \ldots, x_{1g}, \ldots, x_{g1}, \ldots, x_{gg}]]$, so gibt es eine mit der Reduktion mod m^n verträgliche Folge $V_n \to \operatorname{Spec}(A/m^{n+1})$ abelscher Schemata über $\operatorname{Spec}(A/m^{n+1})$, $n = 0, 1, \ldots$ (und wobei V_0 die gegebene abelsche Mannigfaltigkeit ist), *die eine Prodarstellung* des Funktors der lokalen Deformationen von V_0 liefert. (Dies geht im wesentlichen auf A. Grothendieck [3] sowie A. Grothendieck und M. Demazure [1] zurück.) Das Beispiel 5.1. zeigt jedoch, daß diese Folge keine Chance hat, durch ein abelsches Schema über Spec (A) induziert zu werden.

5.4. Beziehung zwischen den Deformationen polarisierter und nicht polarisierter Mannigfaltigkeiten

Es sei V_0 glatt und irreduzibel, $V \to S$ eine Deformation von V_0. Da $\operatorname{Pic}^{\tau}_{V|S} \subset \operatorname{Pic}_{V|S}$ offen ist, läßt sich eine Polarisierung von V_0 auf höchstens eine Weise zu einer Polarisierung von liften[1]), d. h., bezeichnet D_p den Funktor der Deformationen polarisierter Mannigfaltigkeit (V_0, h_0), so ist D_p ein Subfunktor von D (Funktor der Deformationen von V_0).

5.4.1. Satz. *D_p ist ein abgeschlossener Subfunktor von D, und es gibt ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen*

$$\begin{array}{ccccc} 0 \to D_p(I_1) \to & D(I_1) & \to & H^2(V_0, \mathcal{O}_{V_0}) \\ & \wr\| & & \| \\ & H^1(V_0, \Theta_{V_0}) & \to & H^2(V_0, \mathcal{O}_{V_0}) \end{array}$$

[1]) Sind $\xi_1, \xi_2 \in \operatorname{Pic}_{V|S}(S)$ und $\xi_1 \otimes k(0) \equiv \xi_2 \otimes k(0)$ mod $\operatorname{Pic}^{\tau}_{V|S}(S)$, so ist $(\xi_1 - \xi_2)^{-1} \left(\operatorname{Pic}^{\tau}_{V|S}\right)$ eine Umgebung von 0 in S, über der ξ_1 und ξ_2 dieselbe Polarisierung definieren.

Beweis. Ist $V \xrightarrow{p} S$ eine analytische Familie, so kann man wie folgt argumentieren: Es sei I kohärente Idealgarbe auf S, die 0 definiert, dann ist

$$0 \to I\mathcal{O}_V \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_V^* \to \mathcal{O}_{V_0}^* \to 1$$

exakt, und hieraus resultiert eine exakte Folge

$$\mathrm{Pic}_{V|S} \to \mathrm{Pic}_{V_0} \to R^2p_*(I\mathcal{O}_V).$$

Dem Element $\xi \in \mathrm{Pic}_{V_0}(\mathbf{C})$, das der Polarisierung entspricht, entspricht ein Schnitt von $R^2p_*(I\mathcal{O}_V)$, d. h. ein $s\colon \mathcal{O}_S \to R^2p_*(I\mathcal{O}_V)$; es sei $J \subseteq \mathcal{O}_S$ der Kern. Durch die Idealgarbe J wird ein abgeschlossener Unterraum S' von S definiert. Ist $V' = V \times_S S'$, dann ist $V' \to S'$ der größte Unterraum, auf den sich die Polarisierung liften läßt.
Im allgemeinen Fall argumentiert man analog, wobei man, um die Exponentialfunktion zu haben, infinitesimale Liftungen betrachtet. Man prüft z. B. die Bedingungen des Schlessinger-Kriteriums nach; dazu genügt folgende

Bemerkung. Es sei

$$\begin{array}{ccc} A'' & \longrightarrow & A''/tA'' \\ \downarrow & & \downarrow \\ A' & \longrightarrow & A'/tA' \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm lokaler Artinringe, $tA'' \cong tA' \cong k$, $V'' \to \mathrm{Spec}\,(A'')$ eine Deformation, $V' = V'' \otimes_{A''} A'$, $\overline{V}'' = V'' \otimes_{A''} A''/tA''$. Dann wird durch die exakten Folgen

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{V_0} & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathcal{O}_{V''}^* & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\overline{V}''}^* & \longrightarrow & 1 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{V_0} & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathcal{O}_{V'}^* & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\overline{V}'}^* & \longrightarrow & 1 \end{array} \qquad (\varepsilon(f) = 1 + tf)$$

ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen induziert:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to H^1(V_0, \mathcal{O}_{V_0}) & \to & \mathrm{Pic}(V'') & \to & \mathrm{Pic}(\overline{V}'') & \to & H^2(V_0, \mathcal{O}_{V_0}) \\ \| & & \downarrow & & \downarrow & & \| \\ 0 \to H^1(V_0, \mathcal{O}_{V_0}) & \to & \mathrm{Pic}(V') & \to & \mathrm{Pic}(\overline{V}') & \to & H^2(V_0, \mathcal{O}_{V_0}) \end{array}$$

Zu jeder Deformation $V_1 \to I_1$ betrachte man die analoge Folge. Damit die Polarisierung auf V_1 fortgesetzt werden kann, ist notwendig und hinreichend, daß das Bild von h_0 bezüglich des Verbindungshomomorphismus δ_{V_1} in $H^2(V_0, \mathcal{O}_{V_0})$ verschwindet. Also ist die Folge

$$0 \to D_p(I_1) \to D(I_1) \to H^2(V_0, \mathcal{O}_{V_0}); \quad V_1 \mid I_1 \twoheadrightarrow \delta_{V_1}(h_0)$$

exakt.
Wir wollen die Komposition dieser Abbildung mit der durch die Kodaira-Spencer-Abbildung induzierten $H^1(V_0, \mathcal{O}_{V_0}) \xrightarrow{\sim} D(I_1)$ berechnen. Dazu sei $(g_{\alpha\beta})$ ein 1-Ko-

zyklus von $\mathcal{O}^*_{V_0}$, der ein zu h_0 gehöriges Linienbündel L repräsentiert bezüglich einer hinreichend feinen Überdeckung (U_α) von V_0, so daß

$$\mathcal{O}_{V_1} \mid U_\alpha \cong (\mathcal{O}_{V_0} \oplus \tau\, \mathcal{O}_{V_0}) \mid U_\alpha \quad (I_1 = \mathrm{Spec}\,(k[\tau])),$$
$$f \mapsto (f \mid V_0, \tau\delta_\alpha(f))$$

ist. Dann ist $\varrho_{\alpha\beta} = \delta_\beta - \delta_\alpha \in \Theta_{V_0}(U_{\alpha\beta})$ ein 1-Kozyklus, der die Kodaira-Spencer-Klasse repräsentiert.
Ist $\bar{g}_{\alpha\beta}$ diejenige Liftung zu einem Schnitt von $\mathcal{O}^*_{V_1}(U_{\alpha\beta})$ mit $\delta_\alpha(\bar{g}_{\alpha\beta}) = 0$, so wird $\delta_{V_1}(h_0)$ repräsentiert durch den Kozyklus $\delta_\alpha/\bar{g}_{\alpha\beta}\bar{g}_{\beta\gamma}\bar{g}^{-1}_{\alpha\gamma})$, also durch

$$f_{\alpha\beta\gamma} = -\frac{\varrho_{\alpha\beta}(g_{\beta\gamma})}{g_{\beta\gamma}}$$

(da δ_α eine Derivation ist und $\delta_\alpha = \delta_\beta - \varrho_{\alpha\beta}$, also $\delta_\alpha(\bar{g}_{\beta\gamma}) = -\varrho_{\alpha\beta}(g_{\beta\gamma})$).
Dieser Morphismus $H^1(V_0, \Theta_{V_0}) \to H^2(V_0, \mathcal{O}_{V_0})$ ergibt sich auch aus einer von Atiyah entdeckten exakten Folge, die in unserem Fall wie folgt definiert ist:

$$0 \to \mathcal{O}_{V_0} \to \mathcal{E} \to \theta_{V_0} \to 0,$$

wobei $\mathcal{E}$ die Garbe der $\mathbf{G}_m$-invarianten Vektorfelder in $p_*\Theta_{\mathbf{P}}$, P das zu $(g_{\alpha\beta})$ gehörige $\mathbf{G}_m$-Prinzipalbündel und $\mathcal{O}_{V_0}$ isomorph der Untergarbe der Vektorfelder längs der Fasern von $P \to V_0$ ist (die durch den folgenden globalen Schnitt erzeugt wird: Auf U_α sei $P \mid U_\alpha \cong U_\alpha \times \mathbf{G}_n$, $p \mapsto (\bar{p}, t_\alpha(p))$; dann ist das auf U_α durch $t_\alpha \dfrac{\partial}{\partial t_\alpha}$ repräsentierte Vektorfeld $\mathbf{G}_m$-invariant und erzeugend). Es gilt dann

5.4.2. Satz.

$$\delta : \mathrm{cls}\,(\varrho_{\alpha\beta}) \mapsto \mathrm{cls}\left(-\frac{\varrho_{\alpha\beta}(g_{\beta\gamma})}{g_{\beta\gamma}}\right),$$
$$H^1(V_0, \Theta_{V_0}) \to H^2(V_0, \mathcal{O}_{V_0})$$

ist der Verbindungsmorphismus der Atiyah-Folge.

Man überprüft das durch direkte Rechnung.

Wir wollen schließlich noch eine Abschätzung für die Anzahl der Gleichungen geben, durch die der Parameterraum der semiuniversellen Familie definiert wird.

5.4.3. Satz. *Es sei V_0 eine glatte Mannigfaltigkeit über einem beliebigen Körper k, $m = \dim H^1(V_0, \Theta_{V_0})$, $r = \dim H^2(V_0, \Theta_{V_0})$ und $s = \dim H^2(V_0, \mathcal{O}_{V_0})$. Es sei Λ ein lokaler Henselscher Ring mit dem Restklassenkörper k und A eine Λ-Algebra, über der eine semiuniverselle (oder formal semiuniverselle) Deformation V von V_0 definiert sei. Dann ist $\mathrm{emdim}_\Lambda A = m$, und ist B eine glatte bzw. formal glatte lokale Λ-Algebra der relativen Dimension m über Λ, so daß A Quotient von B ist, so wird $\mathrm{Kern}(B \twoheadrightarrow A)$ durch r Gleichungen $f_1, \ldots, f_r \in B$ erzeugt. Ist h_0 eine Polarisierung von V_0, so gibt es weitere s Gleichungen $g_1, \ldots, g_s \in B$, so daß h_0 auf $\bar{V} = V \otimes_A (A/g_1A + \cdots + g_sA)$ geliftet werden kann zu einer Polarisierung $\bar{h}$ und $(\bar{V}, \bar{h})$ eine semiuniverselle Deformation von (V_0, h_0) ist.*

Beweis. Es sei $I = \mathrm{Kern}\,(B \to A)$ und n so groß, daß $I \cap m_B^{n+1} \subseteq m_B I$ ist. Ist $A_n = A/m_B^{n+1}$, $B_n = B/m_B I + m_B^{n+1}$ (m_B Maximalideal von B), dann ist

$$0 \to I/m_B I \to B_n \to A_n \to 0$$

exakt (wegen $A_n = B/I + m_B^{n+1}$, $I + m_B^{n+1}/m_B I + n^{n+1} \cong I/m_B I$) und das Hindernis, um $V_n = V \otimes_A A_n$ auf B_n zu liften, liegt in $H^2(V_0, \Theta_{V_0}) \otimes I/m_B I$ (vgl. Kap. II), ist also von der Form $\bar{f}_1 e_1 + \cdots + \bar{f}_r e_r$ mit $f_i \in I$, $e_1, \ldots, e_r$ Basis von $H^2(V_0, \Theta_{V_0})$.
Da das Hindernis sich funktoriell verhält, läßt sich V_n auf $B_n/f_1 B_n + \cdots + f_r B_n$ fortsetzen, und wegen der Semiuniversalität von V erhalten wir daher ein kommutatives Diagramm von surjektiven Abbildungen

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\bar{B}_n = B_n/f_1 B_1 + \cdots + f_r B_r \arrow[rr, "\sigma"] & & A_n
\end{tikzcd}$$

so daß $m_B^{n+1} \bar{B}_n = 0$, also σ ein Isomorphismus ist. Daher ist

$$f_1 B + \cdots + f_r B + m_B I + m_B^{n+1} = I + m_B^{n+1},$$

und hieraus folgt leicht $I = f_1 B + \cdots + f_r B$.
Der Beweis im polarisierten Fall ist analog (indem man von A und dem Ideal $J \subseteq A$ ausgeht, so daß die semiuniverselle polarisierte Deformation über A/J definiert ist).
In dem in 5.1. betrachteten Beispiel abelscher Mannigfaltigkeiten über $\mathbf{C}$ sind die Gleichungen g durch

$$E_0(\Omega(X)\, p, \Omega(X)\, q) = E_0(\Omega_0 p, \Omega_0 q)$$

(in Koordinaten aufgeschrieben) gegeben.
Für abelsche Mannigfaltigkeiten über Körpern endlicher Charakteristik (und A z. B. Ring der Wittvektoren, also von der Charakteristik 0) liegen die Verhältnisse nicht so einfach. Insbesondere bedeutet das Liftungsproblem für abelsche Mannigfaltigkeiten zur Charakteristik 0, ob die Restklassencharakteristik $p \in \sqrt{(g_1, \ldots, g_r)}$ (wenn nicht, kann man liften, z. B. durch eine geeignet allgemeine Faser der universellen Deformation der polarisierten Mannigfaltigkeit).

5.5. Weiteres Beispiel: *K*3-Flächen

Der Grundkörper sei $\mathbf{C}$, unter einer $K3$-Fläche versteht man eine kompakte komplexe zweidimensionale Mannigfaltigkeit V mit

$$\omega_V \cong \mathcal{O}_V \quad \text{und} \quad H^1(V, \mathcal{O}_V) = 0.$$

Wegen $\dim H^1(V, \mathbf{C}) \leqq 2 \dim H^1(V, \mathcal{O}_V)$ ist dann auch

$$H^1(V, \mathbf{C}) = 0, \quad H^0(V, \Omega^1) = 0.$$

Aus der Noetherschen Formel

$$\chi(\mathcal{O}_V) = p_g - q + 1 = \frac{(\omega \cdot \omega) + \chi(V)}{12}$$

folgt wegen $p_g = \dim H^0(V, \omega_V) = 1$, $q = \dim H^1(V, \mathcal{O}_V) = 0$ und $(\omega \cdot \omega) = 0$, daß

$$\chi(V) = 24, \quad \text{also} \quad \dim H^2(V, \mathbf{C}) = 22 = h^{0,2} + h^{1,1} + h^{2,0}$$