Beiträge zur Algebra und Geometrie
4 (1975), 85—88

Zur Zerlegung im engeren Sinne linear kompakter Ringe

Alfred Widiger

1. Diese Arbeit beinhaltet die Verallgemeinerung der Hauptergebnisse von [4] auf eine Klasse topologischer Ringe sowie die Formulierung analoger Resultate für Algebren über einem Körper. Es wird gezeigt, daß für einen i. e. S. l. k. Ring R (Erklärung siehe unten) und ein abgeschlossenes Ideal I von R neben zusätzlichen Voraussetzungen die Bedingung, daß I selbst i. e. S. l. k. ist, dafür ausreicht, daß „ein nur wenig größeres Ideal als I" direkter Summand von R ist.
Wir stellen die in der Arbeit benutzten Bezeichnungen kurz zusammen. $\oplus$ und $\sum^{\oplus}$ bezeichnen gruppentheoretische, $\boxplus$ und $\sum^{\boxplus}$ ringtheoretische diskrete direkte Summen. Für einen beliebigen Ring R ist $(R, +)$ die additive Gruppe von R und B_n der Ring aller n-reihigen quadratischen Matrizen über R. $J(R)$ sei das Jacobson-Radikal von R.
Es sei R ein topologischer Ring, M ein topologischer (Rechts-)R-Modul. M heißt linear topologisch, wenn er einen Basisfilter aus R-Untermoduln besitzt. Ein linear topologischer R-Modul M heißt linear kompakt (kurz: l. k.), wenn jeder Filter $\mathfrak{F} = \{a_\mu + U_\mu\}$ von Restklassen nach abgeschlossenen Untermoduln U_μ einen nicht leeren Durchschnitt hat:

$$\bigcap_{F \in \mathfrak{F}} F \neq \emptyset .$$

Ein Ring heißt l. k., wenn er als Rechts-R-Modul l. k. ist. Nach Leptin heißt ein R-Modul M im engeren Sinne linear kompakt (kurz: i. e. S. l. k.), wenn jeder stetige R-Homomorphismus von M in einen linear topologischen R-Modul offen ist. Gleichbedeutend damit ist, daß jeder diskrete Faktormodul der Minimalbedingung für Untermoduln genügt. Hiernach ist klar, was unter einem i. e. S. l. k. Ring zu verstehen ist.
Sind M_ν $(\nu \in \Gamma)$ topologische R-Moduln, so meinen wir mit $\sum\limits_{\nu \in \Gamma} M_\nu$ die komplette direkte Summe der Moduln M_ν mit der Tychonoffschen Topologie (Produkttopologie).

2. Wir formulieren das Hauptergebnis als den

Satz 1. *Es sei R ein i. e. S. l. k. Ring mit einer Basis aus Idealen, und I sei ein abgeschlossenes Ideal von R mit $I \supseteq J(R)$, wobei I in der induzierten Topologie als Rechts-*

und Links-I-Modul i. e. S. l. k. sei. Dann gilt die ringtheoretische direkte Zerlegung

$$R = \sum_{\mu \in \Gamma} S_{n_\mu}^{(\mu)} \boxplus I^*,$$

wobei $I^* \supseteq I$, I^*/I direkte Summe endlicher Ringe ist und die $S^{(\mu)}$ unendliche Schiefkörper sind.

Beweis. Es gilt nach [1], Satz 13, und wegen der Voraussetzung, daß R eine Basis aus Idealen hat,

$$R/J(R) = \bar{R} = \sum_{\mu \in \Gamma^*} \bar{e}_\mu \bar{R} \bar{e}_\mu,$$

wobei die $\bar{e}_\mu \bar{R} \bar{e}_\mu$ volle Matrizenringe über Schiefkörpern sind. (Die $\bar{e}_\mu$ sind die Einselemente dieser Matrizenringe.) Es sei $\bar{e} = \sum \bar{e}_\mu$. Es gibt nach [3], Hilfssatz 3 und Beweis von Satz 4, in R idempotente Vertreter e_μ, e von $\bar{e}_\mu, \bar{e}$, so daß die Abbildung

$$\varphi : (R, +) \to (\tilde{R}, +) = \sum_{\mu \in \Gamma^*} e_\mu R e_\mu \oplus \sum_{\mu \in \Gamma^*} e_\mu R(e - e_\mu)$$
$$\oplus (1 - e) Re \oplus eR(1 - e) \oplus (1 - e) R(1 - e)$$

ein eineindeutiger stetiger Gruppenhomomorphismus ist. (Auf der rechten Seite ist die Tychonoffsche Topologie gemeint; die einzelnen Summanden haben die durch R induzierte Topologie.)

Die $e_\mu R e_\mu$ sind nach [2] i. e. S. l. k. Es gilt $J(e_\mu R e_\mu) = e_\mu J(R) e_\mu$. $e_\mu I e_\mu$ ist ein abgeschlossenes Ideal von $e_\mu R e_\mu$, und aus $I \supseteq J(R)$ folgt $e_\mu I e_\mu \supseteq J(e_\mu R e_\mu)$. Da der Ring $e_\mu R e_\mu / J(e_\mu R e_\mu)$ einfach ist, folgt $e_\mu I e_\mu = e_\mu R e_\mu$, d. h. $e_\mu R e_\mu \subseteq I$ oder $e_\mu I e_\mu = e_\mu J(R) e_\mu$. Wir schreiben:

$$\bar{R} = \sum_{\mu \in \Gamma} \bar{e}_\mu \bar{R} \bar{e}_\mu \boxplus \sum_{\mu \in \Gamma'} \bar{e}_\mu \bar{R} \bar{e}_\mu = \sum_{\mu \in \Gamma} \bar{e}_\mu \bar{R} \bar{e}_\mu \boxplus \bar{I}^*,$$

wobei $\bar{e}_\mu \bar{R} \bar{e}_\mu$ gerade für $\mu \in \Gamma$ unendlich und $\nsubseteq \bar{I}$ ist. Dann gilt

$$e_\mu R e_\mu \cap I = e_\mu I e_\mu = J(e_\mu R e_\mu) \subseteq J(R) \tag{1}$$

ür alle $\mu \in \Gamma$. I^* sei das vollständige Urbild von $\bar{I}^*$. I^* ist abgeschlossen in R.

Wir zeigen $J(R)\, e_\mu R e_\mu = (0)$ für alle $\mu \in \Gamma$.

Es sei A ein beliebiges Ideal $\neq (0)$ aus dem Basisfilter von R. Wir setzen der Kürze halber $J(R) = J$, $e_\mu R e_\mu = R_\mu$, $e_\mu I e_\mu = I_\mu$, $e_\mu J e_\mu = J_\mu$. Da R/A artinsch ist, gilt $J^n \subseteq A$ für eine natürliche Zahl n. Folglich ist auch $J^n R_\mu \subseteq A$. Angenommen, man hätte schon $J^{n-k} R_\mu \subseteq A$ bewiesen. Der Ring $R_\mu / J_\mu \cong \bar{S}_{n_\mu}^{(\mu)}$ ist ein voller Matrizenring über dem Schiefkörper $\bar{S}^{(\mu)}$, der nach Voraussetzung unendlich ist. Daher ist (in der hier vorkommenden diskreten Topologie) $(\bar{S}^{(\mu)}, +)$ nicht l. k. $\bar{S}_{n_\mu}^{(\mu)}$ enthält einen zu $\bar{S}^{(\mu)}$ isomorphen Unterschiefkörper $\bar{K}^{(\mu)}$, dessen Einselement genau $\bar{e}_\mu$ ist. Es gibt also in $(\bar{K}^{(\mu)}, +)$ einen Filter von Nebenklassen $\{\bar{N}_i\}$ nach abgeschlossenen Untergruppen $\bar{U}_i$ mit leerem Durchschnitt. Die N_i seien die vollständigen Urbilder der $\bar{N}_i$ in R_μ.

Gilt nun für $b \in J^{n-k-1}$ nicht $bR_\mu \subseteq A$, so ist $\{bN_i + J^{n-k} + (A \cap I)\}$ ein Filter von abgeschlossenen Untergruppen mit leerem Durchschnitt. Daß ein Filter vorliegt, ist klar. Angenommen, der Durchschnitt wäre $\neq \emptyset$. Dann folgt

$$\cap \ni x = bu_i + s + a = bu_j + s' + a'$$

mit $u_i \in N_i$, $u_j \in N_j$, wobei $u_i - u_j \notin J_\mu$; $a, a' \in A \cap I$, $s, s' \in J^{n-k}$, ist. Wäre nämlich $u_i \equiv u_j \pmod{J_\mu}$ für alle u_i, u_j, so wäre $\bar{u}_i \in \bigcap_i \bar{N}_i \neq \emptyset$, im Widerspruch zur Voraussetzung. Es folgt $b(u_i - u_j) = s^* + a^*$, $s^* \in J^{n-k}$, $a^* \in A \cap I$. Wegen $u_i \not\equiv u_j \pmod{J_\mu}$ gibt es ein Element $(u_i - u_j)^* \in R_\mu$, so daß $(u_i - u_j)(u_i - u_j)^* = e_\mu + c$, $c \in J_\mu$, ist. Also hat man

$$be_\mu + bc = s^*(u_i - u_j)^* + a^*(u_i - u_j)^*. \qquad (*)$$

Nun ist nach Induktionsvoraussetzung $s^*(u_i - u_j)^* \in J^{n-k}R_\mu \subseteq A$, folglich die rechte Seite von $(*) \in A$. Weiter ist $bc \in J^{n-k-1}J_\mu \subseteq J^{n-k}$. Wegen $c \in J_\mu$ ist $bce_\mu = bc \in J^{n-k}e_\mu \subseteq A$ wieder nach Induktionsvoraussetzung. Also folgte be_μ und auch $bR_\mu \subseteq A$, im Widerspruch zur Annahme.

Die $bN_i + J^{n-k} + A \cap I$ sind aber sogar Nebenklassen nach Rechtsidealen von I, weil

$$(bU_i + J^{n-k} + A \cap I)\, I \subseteq J^{n-k} + A \cap I$$

gilt. Denn mod J gilt wegen (1) $\bar{U}_i\bar{I} = (\bar{0})$, also $U_iI \subseteq J$, folglich $bU_iI \subseteq J^{n-k}$.

Da I aber ein i. e. S. l. k. Ring ist, muß also $JR_\mu \subseteq A$ für alle A aus dem Basisfilter von R gelten, d. h. $J(R)\, R_\mu = (0)$.

Das bedeutet insbesondere $e_\mu Je_\mu R_\mu = e_\mu Je_\mu = (0)$, d. h., die Ringe $e_\mu Re_\mu$ $(\mu \in \Gamma)$ sind radikalfrei, also volle Matrizenringe über Schiefkörpern $S^{(\mu)}$. Dann gilt auch $I^* \supseteq I$, $I^*/I \cong \sum_{\mu\in\Gamma'} \bar{e}_\mu\bar{R}\bar{e}_\mu$ ist direkte Summe von vollen Matrizenringen über endlichen Schiefkörpern.

Bei der Abbildung φ von $(R, +)$ auf $(\tilde{R}, +)$ wird I^* gerade abgebildet auf

$$(\tilde{I}^*, +) = \sum_{\mu\in\Gamma'} e_\mu Re_\mu \oplus \sum_{\mu\in\Gamma^*} e_\mu R(e - e_\mu) \oplus (1 - e)\, Re \oplus eR(1 - e)$$
$$\oplus (1 - e)\, R(1 - e).$$

Ist nämlich $a \in I^*$, so gilt $e_\mu ae_\mu \equiv 0 \bmod J(R)$ für alle $\mu \in \Gamma$, d. h. $e_\mu ae_\mu \in J(R)$. Wegen $J(R)\, e_\mu = (0)$ folgt $\varphi(I^*) \subseteq (\tilde{I}^*, +)$. Ist umgekehrt $\varphi(x) \in (\tilde{I}^*, +)$, so ist $e_\mu xe_\mu = 0$ für alle $\mu \in \Gamma$, d. h. $e_\mu xe_\mu \equiv 0 \bmod J(R)$, also $\bar{x} \in \bar{I}^*$, $x \in I^*$.

Definiert man auf $(\tilde{I}^*, +)$ einen Ring $\tilde{I}^*$ mittels

$$\tilde{a}\tilde{b} = \varphi\big(\varphi^{-1}(\tilde{a})\, \varphi^{-1}(\tilde{b})\big),$$

so gilt $I^* \cong \tilde{I}^*$ im algebraischen und topologischen Sinne, weil I^* i. e. S. l. k. ist.

Wir bemerken zunächst, daß für den Fall der diskreten Topologie der Satz 2 von [4] schon unmittelbar aus dem Bewiesenen folgt.

Um den Beweis des Satzes zu vollenden, beachten wir, daß wegen der Voraussetzung, daß I auch als Links-I-Modul i. e. S. l. k. ist, auch $R_\mu J(R) = (0)$ für alle $\mu \in \Gamma$ gilt. Also gilt auch $R_\mu I^* = (0)$. Nun verläuft der Beweis genauso wie der von Satz 4 in [3].

Falls die Topologie von R die diskrete ist, erhält man Satz 3 von [4].

3. Es sei jetzt R eine Algebra über dem diskreten Körper K. Ganz analog heißt die Algebra l. k., wenn jeder Filter von abgeschlossenen Restklassen nach Algebrarechtsidealen (d. h. Rechtsidealen des Ringes R, die gleichzeitig K-Untermoduln sind) einen nichtleeren Durchschnitt hat und wenn R einen Basisfilter aus Algebrarechtsidealen hat. R heißt i. e. S. l. k., wenn R l. k. ist und wenn jeder Algebrahomomorphismus von R in einen linear topologischen R-Modul (Algebramodul) offen ist.

Man erhält mit zum Beweis von Satz 1 völlig analogem Beweis den folgenden

Satz 2. *Es sei R eine i. e. S. l. k. Algebra über dem Körper K mit einer Basis aus Idealen, und I sei ein abgeschlossenes Ideal von R mit $I \supseteq J(R)$, wobei I in der induzierten Topologie als Rechts- und Links-I-Modul i. e. S. l. k. sei. Dann gilt die direkte Zerlegung*

$$R = \sum_{\mu \in \Gamma} S_{n_\mu}^{(\mu)} \boxplus I^*,$$

wobei $I^* \supseteq I$, I^*/I die direkte Summe von Algebren endlichen Ranges über K ist und die $S^{(\mu)}$ Divisionsalgebren unendlichen Ranges über K sind.

Für den Fall der diskreten Topologie folgt

Satz 3. *Es sei R eine artinsche Algebra über dem Körper K, und I sei ein Ideal von R mit $I \supseteq J(R)$, wobei I rechts- und linksartinsch sei. Dann gilt*

$$R = \sum_{k=1}^{n} {}^{\boxplus} S_{n_k}^{(k)} \boxplus I^*,$$

wobei $I^* \supseteq I$, I^*/I endlichen Rang über K hat und die $S^{(k)}$ Divisionsalgebren unendlichen Ranges über K sind.

Aus den Sätzen 1, 2 und 3 folgen leicht die Hauptergebnisse von [3].

LITERATUR

[1] LEPTIN, H.: Linear kompakte Moduln und Ringe. Math. Z. Z. *62* (1955), 241—267.
[2] LEPTIN, H.: Linear kompakte Moduln und Ringe II. Math. *66* (1957), 289—327.
[3] WIDIGER, A.: Die Struktur einer Klasse linear kompakter Ringe. Beiträge zur Algebra und Geometrie *3* (1974), 139—159.
[4] WIDIGER, A.: Zur Zerlegung artinscher Ringe. Publ. Math. Debrecen *21* (1974), 193—196.

Manuskripteingang: 20. 2. 1974

VERFASSER:

ALFRED WIDIGER, Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle—Wittenberg