Werk

Titel: Zu einer Orthogonalitätsrelation in Desarguesschen Ebenen (der Charakteristik ......

Autor: QUAISSER, E.

Jahr: 1975

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?301416052_0004|log16

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Beiträge zur Algebra und Geometrie
4 (1975), 71–84

Zu einer Orthogonalitätsrelation in Desarguesschen Ebenen (der Charakteristik $\neq 2$)[1]

Erhard Quaisser

Bekanntlich kann in euklidischen Ebenen (der Charakteristik $\neq 2$) die Orthogonalität von Geraden konstruktiv mit Hilfe des Höhensatzes dargestellt werden. (Hier sei besonders auf [1] verwiesen.) Unter Zugrundelegung affiner Ebenen wurden nun in [7] Orthogonalitätsrelationen betrachtet, die neben „trivialen" Forderungen (Invarianz der Orthogonalität gegenüber Parallelität, Eindeutigkeit der Lote und einer Reichhaltigkeitsaussage) charakterisiert sind durch die Forderung (i): Gibt es durch zwei Ecken eines Dreiecks (rechtsseitige) Höhen und schneiden sich diese in einem von der dritten Ecke A verschiedenen Punkt H, so ist die Verbindungsgerade von A und H eine (rechtsseitige) Höhe durch A. Diese Forderungen beschreiben eine allgemeine Klasse von symmetrischen Orthogonalitätsrelationen, zu der auch die Minkowskischen (oder pseudoeuklidischen) gehören. In Translationsebenen ist die Gültigkeit der Papposschen Aussage eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer derartigen Orthogonalitätsrelation. Bei ihrer konstruktiven Darstellung — ausgehend von zwei orthogonalen Geradenpaaren — reicht für die Unabhängigkeit von der Wahl von Hilfselementen bereits die Gültigkeit der Desarguesschen Aussage aus (vgl. dazu Abb. 2).

Das legt nahe, bereits für Desarguessche Ebenen solche Orthogonalitätsrelationen zu betrachten, die neben den trivialen Forderungen bestimmt sind durch (ii): Es gibt zwei orthogonale Geradenpaare $a_1 \perp b_1$ und $a_2 \perp b_2$ derart, daß für jedes Dreieck mit zu a_1 und a_2 parallelen Seiten die Höhenaussage (i) gilt. Dabei wird in dieser Arbeit für Desarguessche Ebenen im allgemeinen die Gültigkeit der Fano-Aussage (also Charakteristik $\neq 2$) vorausgesetzt.

Diese Orthogonalitätsrelationen (kurz **O**-Relationen) sind im allgemeinen nicht mehr symmetrisch. Die Existenz „links"- und „rechtsseitiger" Lote kann gezeigt werden.

In affinen Ebenen mit **O**-Relation ist die Desarguessche Aussage zwar nicht ableitbar; spätere Darlegungen (Satz (6)) zeigen jedoch, daß Desarguessche Ebenen — in bestimmter Hinsicht notwendigerweise — zugrunde zu legen sind.

In Desarguesschen Ebenen kann eine vollständige Übersicht über alle möglichen **O**-Relationen gegeben werden.

---

[1]) Über diese Arbeit wurde in einem Kurzvortrag während des internationalen „Kolloquiums über Grundlagen der Geometrie und algebraische Methoden" (27. 8.—1. 9. 1973) in Potsdam berichtet.

Für $\mathbf{O}$-Relationen gilt auch die entsprechend (ii) „linksseitig“ formulierte Aussage, so daß der in den Darlegungen bevorzugten „Rechtsseitigkeit“ keine wesentliche Bedeutung zukommt.

Die vorliegende Arbeit stellt eine Verallgemeinerung von [7] dar. Betrachtet werden unter anderem die Symmetrie und die Isotropie (Selbstorthogonalität) von $\mathbf{O}$-Relationen. Hier und an anderen Stellen werden Gemeinsamkeiten und Unterschiede bezüglich [7] sichtbar. Von Interesse ist eine binäre Relation **hö** zwischen Geraden (bzw. Richtungen), die bedeutet, daß für jedes Dreieck, von dem zwei Seiten zu diesen Geraden parallel sind, der (Rechts- bzw. Links-) Höhensatz gilt.
Zum Abschluß werden Bezüge zu Arbeiten von SCHÜTTE, REIDEMEISTER und NAUMANN hergestellt, die Desarguessche Ebenen mit gewissen symmetrischen Orthogonalitätsrelationen untersucht haben.
Die Untersuchungen werden in der vorliegenden Arbeit vorzugsweise synthetisch geführt.

1. Definition und Bezeichnungen

Eine *affine Ebene* sei eine in üblicher Weise erklärte Inzidenzstruktur (etwa wie in [6], S. 10). Folgende Bezeichnungen werden benutzt: $A, B, C, \ldots$ für Punkte; $a, b, c, \ldots$ für Geraden (diese werden als Punktmengen aufgefaßt); $a \parallel b$ für die Parallelität zweier Geraden; $\mathbf{par}(A, a)$ für die Parallele zu a durch A; AB für die Verbindungsgerade zweier Punkte A und B $(\neq A)$; $a * b$ für den Schnittpunkt zweier nicht paralleler Geraden a und b $(a \nparallel b)$. Unter einem *Parallelogramm ABCD* wird ein geordnetes Quadrupel $[A, B, C, D]$ von Punkten verstanden, von denen keine drei kollinear sind und für die $AB \parallel CD$ und $BC \parallel DA$ gilt; dabei heißen AC und BD die *Diagonalen* des Parallelogramms. Unter einer *Desarguesschen Ebene* wird eine affine Ebene verstanden, in der die affine Aussage von DESARGUES gilt:

(D) *Sind $A_1A_2A_3$ und $B_1B_2B_3$ Dreiecke, g_1, g_2, g_3 verschiedene kopunktale Geraden und A_i, $B_i \in g_i$, $\notin g_k$ $(i \neq k;\ i,\ k = 1, 2, 3)$ und ferner $A_1A_2 \parallel B_1B_2$ und $A_2A_3 \parallel B_2B_3$, so ist $A_3A_1 \parallel B_3B_1$.*

Unabhängig vom Axiomensystem für Desarguessche Ebenen ist die (schwache) affine Fano-Aussage:

(F) *Es gibt ein Parallelogramm mit sich schneidenden Diagonalen.*

Ein Punkt M heißt *Mittelpunkt* von A und B $(\neq A)$, wenn es ein Parallelogramm $ABCD$ gibt, in dem M Schnittpunkt der Diagonalen ist. In affinen Ebenen, in denen die kleine affine Aussage von DESARGUES (d. h. (D) für den Fall $g_1 \parallel g_2 \parallel g_3$) und (F) gilt, gibt es zu jedem Paar verschiedener Punkte A und B genau einen Mittelpunkt; er wird mit $\mathbf{Mp}\,(A, B)$ bezeichnet.

Unter einer *affinen Cartesischen Ebene über einem Schiefkörper* $\mathbf{K}$ — kurz $\mathbf{C}(\mathbf{K})$ — werde das Paar $[\mathfrak{P}_{\mathbf{K}}, \mathfrak{G}_{\mathbf{K}}]$ verstanden, für das $\mathfrak{P}_{\mathbf{K}} = \mathbf{K} \times \mathbf{K}$ gilt und $\mathfrak{G}_{\mathbf{K}}$ aus genau den $\mathfrak{P}_{\mathbf{K}}$-Teilmengen $g = \{(x, y) \colon ux + vy + w = 0\}$ mit $u, v, w \in \mathbf{K}$ und $v = -1 \vee (v = 0 \wedge u = 1)$ besteht. Da es zu jedem $g \in \mathfrak{G}_{\mathbf{K}}$ genau ein geordnetes Tripel $[u, v, w] \in \mathbf{K}^3$ mit der angegebenen Nebenbedingung gibt und umgekehrt, können wir zur Vereinfachung der Sprechweise g mit diesem Tripel identifizieren.

Bekanntlich ist jede Desarguessche Ebene isomorph der $\mathbf{C}(\mathbf{K})$ über einem Schiefkörper $\mathbf{K}$. Dabei ist $\mathbf{K}$ bis auf Isomorphie durch die Ebene eindeutig bestimmt. Die Gültigkeit der Fano-Aussage (F) ist gleichwertig damit, daß char $\mathbf{K} \neq 2$ ist. $\mathbf{K}$ ist genau dann kommutativ, wenn die affine Aussage von PAPPOS — kurz (P) — gilt. (Diese Aussage wird hier in der Formulierung wie bei LENZ [2], S. 149, verstanden.)

Eine binäre Relation $a \perp b$ in der Menge der Geraden einer affinen Ebene heißt *Orthogonalitätsrelation* (**O**-*Relation*), wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:

$\mathbf{O}_1$ $\quad a \perp b \wedge a \parallel a' \wedge b \parallel b' \Rightarrow a' \perp b'$.

$\mathbf{O}_{2R}$ $\quad a \perp b \wedge a \perp c \Rightarrow b \parallel c$;

$\mathbf{O}_{2L}$ $\quad a \perp c \wedge b \perp c \Rightarrow a \parallel b$.

$\mathbf{O}_{3R}$ $\quad$ *Es gibt Geraden a_1, b_1, a_2, b_2 derart, daß $a_1, b_1 \nparallel a_2, b_2$; $a_1 \perp b_1$; $a_2 \perp b_2$ und für jedes Dreieck $A_1A_2A_3$ mit $A_iA_3 \parallel a_i$ $(i = 1, 2)$ folgender Höhenschließungssatz gilt:*

Gibt es eine Gerade h_1 durch A_1 mit $A_2A_3 \perp h_1$ und eine Gerade h_2 durch A_2 mit $A_3A_1 \perp h_2$ und schneiden sich h_1 und h_2 in einem von A_3 verschiedenen Punkt H, so ist $A_1A_2 \perp A_3H$.

Eine Gerade h heißt *Rechtslot* bzw. *Linkslot* von einem Punkt A auf eine Gerade a, wenn $A \in h$ und $a \perp h$ bzw. $h \perp a$ gilt. Diese Unterscheidung ist sinnvoll, da die hier erklärte **O**-Relation gewöhnlich nicht symmetrisch ist. (Zur Symmetrie siehe Abschnitt 5.)

Häufig werden für eine Orthogonalitätsrelation in der ebenen affinen Geometrie mindestens die Gültigkeit von $\mathbf{O}_1$, Existenz und Eindeutigkeit der Lote und die Symmetrie ($a \perp b \Rightarrow b \perp a$) — oft als „triviale Orthogonalitätsaxiome" bezeichnet — gefordert.
Die Forderung $\mathbf{O}_1$ besagt, daß die **O**-Relation auch als Relation in der Menge der Richtungen (d. h. Äquivalenzklassen bezüglich der Parallelitätsrelation) aufgefaßt werden kann. Wegen $\mathbf{O}_2$ (d. h. $\mathbf{O}_{2R}$ und $\mathbf{O}_{2L}$) gibt es zu jeder Richtung höchstens eine Lotrichtung.
Der Höhenschließungssatz ist in Anlehnung an den bekannten Höhensatz formuliert, mit diesem aber nicht identisch. Die Forderung $\mathbf{O}_{3R}$ bedeutet — wie sich zeigen wird —, daß es wenigstens zwei Richtungen so gibt, daß in denjenigen Dreiecken der Rechts-Höhensatz gilt, bei denen zwei Seiten in diesen Richtungen liegen. *Isotrope* (d. h. selbstorthogonale) Richtungen sind nicht ausgeschlossen.

2. Affine Ebenen mit O-Relation und O-Relationen in Desarguesschen Ebenen

Satz (1). *In einer affinen Ebene mit* **O**-*Relation gibt es zu jedem Punkt P und jeder Geraden g genau ein Rechtslot und genau ein Linkslot von P auf g.*

Beweis. Die Eindeutigkeit ist nach $\mathbf{O}_2$ klar. Wegen $\mathbf{O}_1$ ist zu vorgegebener Geraden g nur noch die Existenz zweier Geraden a, b mit $a \perp g$ und $g \perp b$ zu zeigen.
Es sei g nicht parallel zu den nach $\mathbf{O}_{3R}$ existierenden Geraden a_1 und a_2. Ferner sei

$A_3 \notin g$ irgendein Punkt. Die Parallelen zu a_1 und a_2 durch A_3 schneiden dann g in verschiedenen Punkten A_1 und A_2. Wegen $a_1, b_1 \not\Vert a_2, b_2$ schneiden sich **par**(A_1, b_2) und **par**(A_2, b_1) in einem von A_3 verschiedenen Punkt H (Abb. 1). Nach $\mathbf{O}_{3R}$ ist nun $g \perp A_3H$; d. h., für $g \not\Vert a_1, a_2$ gibt es Rechtslote.

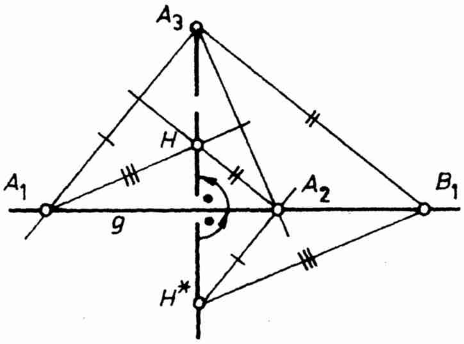

Abb. 1

Falls dabei $g \parallel b_1$ (und $b_1 \not\Vert a_1$) bzw. $g \parallel b_2$ (und $b_1 \not\Vert a_2$) ist, gilt offensichtlich $H = A_1$ bzw. $H = A_2$. Also ist neben $a_1 \perp b_1$ und $a_2 \perp b_2$ auch $b_1 \perp a_1$ und $b_2 \perp a_2$. Damit ist die Behauptung für die speziellen Fälle $g \parallel a_1, b_1, a_2, b_2$ klar.

Es bleibt nur noch der Existenznachweis von Linksloten für $g \not\Vert a_1, b_1, a_2, b_2$. Ausgehend von der obigen Konstruktion (Abb. 1) schneidet **par**(A_3, b_1) die Gerade g in $B_1 \neq A_2$, und **par**(B_1, b_2) schneidet **par**(A_2, a_1) in $H^* \neq A_2$. Wegen $a_1 \not\Vert a_2$ ist $H^*A_2A_3$ ein Dreieck, und bezüglich diesem gilt $A_3H^* \perp A_2B_1 = g$ nach $\mathbf{O}_{3R}$. ∎

Aus $\mathbf{O}_{3R}$ ergibt sich nun die

Folgerung (2). *In einer affinen Ebene mit* **O**-*Relation gibt es zwei verschiedene und zueinander nicht orthogonale Richtungen ϱ_1 und ϱ_2 derart, daß sich in jedem Dreieck $A_1A_2A_3$ mit $A_iA_3 \in \varrho_i$ $(i = 1, 2)$ die Rechtshöhen in einem Punkt schneiden* (Rechtshöhensatz).

Für zwei Richtungen ϱ_1 und ϱ_2 $(\neq \varrho_1)$ mit dieser (Rechtshöhen-)Eigenschaft wird kurz **hö**$_R(\varrho_1, \varrho_2)$ gesetzt. Für Geraden wird unter **hö**$_R(a_1, a_2)$ verstanden, daß **hö**$_R(\varrho_1, \varrho_2)$ für die Richtungen von a_1, a_2 gilt.

In den bisherigen Darstellungen der **O**-Relationen treten rechtsseitige Lote bevorzugt auf. Inwieweit das wesentlich ist, hängt eng mit der Frage zusammen, ob für eine **O**-Relation auch die entsprechend $\mathbf{O}_{3R}$ „linksseitig" formulierte Aussage $\mathbf{O}_{3L}$ gilt:

Satz (3). *In einer affinen Ebene mit* **O**-*Relation gilt* $\mathbf{O}_{3L}$.

Beweis. Es gibt Geraden a_i, b_i $(i = 1, 2)$ mit den in $\mathbf{O}_{3R}$ genannten Eigenschaften. Dann gilt — wie der Beweis von (1) zeigt — auch $b_1 \perp a_1$. Nun sei A_3HA_1 irgendein Dreieck mit $A_3A_1 \parallel a_1$ und $HA_1 \parallel b_2$ (vgl. Abb. 1). Wegen $a_2 \not\Vert b_1, a_1$ schneidet das (zu a_2 parallele) Linkslot durch A_3 das (zu b_1 parallele) Linkslot durch H in einem Punkt $A_2 \notin A_3A_1 \setminus \{A_3\}$. Es ist nun zu zeigen, daß A_2A_1 ein Linkslot auf A_3H ist. Für $A_2 = A_3$ ist das klar. Ansonsten ist $A_2A_3A_1$ ein Dreieck, und für dieses ist H der Schnittpunkt der Rechtshöhen durch A_2 und A_1. Also gilt $A_2A_1 \perp A_3H$ (nach $\mathbf{O}_{3R}$), d. h., im Dreieck A_3HA_1 gilt der Schließungssatz für Linkshöhen. ∎

Damit ist gezeigt, daß $\mathbf{O}_{3\mathrm{R}}$ an Stelle von $\mathbf{O}_{3\mathrm{R}}$ zu keiner anderen Menge von Orthogonalitätsrelationen führt; der bevorzugten „Rechtsseitigkeit" kommt keine wesentliche Bedeutung zu.

Die Relationen $\mathbf{hö}_{\mathrm{L}}(\varrho_1, \varrho_2)$ und $\mathbf{hö}_{\mathrm{L}}(a_1, a_2)$ seien entsprechend $\mathbf{hö}_{\mathrm{R}}$ erklärt.

Wir beschäftigen uns nun mit der Existenz von $\mathbf{O}$-Relationen in Desarguesschen Ebenen. Von wesentlicher Bedeutung ist der

Satz (4). *In einer Desarguesschen Ebene gibt es eine und nur eine $\mathbf{O}$-Relation, die zwei beliebig vorgegebene Geradenpaare (a_1, b_1) und (a_2, b_2) mit $a_1, b_1 \nparallel a_2, b_2$ enthält und bei der $\mathbf{hö}_{\mathrm{R}}(a_1, a_2)$ gilt.*

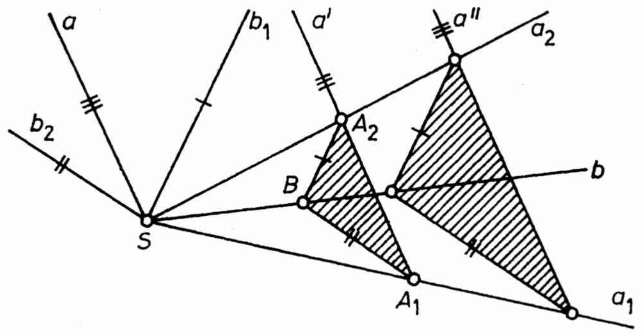

Abb. 2

Beweis (in Anlehnung an [7], S. 23). Da $a_1 \nparallel a_2$ ist, schneiden sich diese Geraden in einem Punkt S. Zunächst setzen wir noch $b_1, b_2 \ni S$ voraus. Eine zu a $(\nparallel a_1, a_2)$ punktfremde Gerade a' schneidet dann a_1 und a_2 in von S verschiedenen Punkten A_1 und A_2 (Abb.2). Die Geraden $\mathbf{par}(A_1, b_2)$ und $\mathbf{par}(A_2, b_1)$ schneiden sich offensichtlich in einem Punkt B, der von S verschieden ist und nicht auf b_1, b_2 liegt. Da nach dem Desarguesschen Satz SB von der Wahl von a' unabhängig ist, wird vermöge dieser (Rechtshöhen-)Konstruktion jeder Geraden a $(\nparallel a_1, a_2)$ durch S genau eine Gerade SB $(\nparallel b_1, b_2)$ zugeordnet; für $a = b_1$ bzw. $a = b_2$ ist insbesondere $SB = a_1$ bzw. $SB = a_2$, falls noch $a_1 \nparallel b_1$ bzw. $a_2 \nparallel b_2$ ist. Nun erklären wir eine Relation $\mathbf{O}_{a_1,b_1;a_2,b_2}$:

$$(a, b) \in \mathbf{O}_{a_1,b_1;a_2,b_2} :\Leftrightarrow (\mathbf{par}(S, a),\ \mathbf{par}(S, b)) = \begin{cases}(a_i, b_i) & (i = 1, 2) \text{ oder} \\ (b_i, a_i)^{1)} & (i = 1, 2),\end{cases}$$

oder $\mathbf{par}(S, b)$ ist die Gerade, die $\mathbf{par}(S, a)$ vermöge der obigen Konstruktion zugeordnet wird.

Durch $\mathbf{O}_{a_1,b_1;a_2,b_2}$ wird eine bijektive Abbildung des Geradenbüschels mit dem Träger S auf sich vermittelt.

Die eingangs erhobene Einschränkung heben wir jetzt auf und erklären:

$$\mathbf{O}_{a_1,b_1;a_2,b_2} := \mathbf{O}_{a_1,b_1';a_2,b_2'},$$

wobei

$$S = a_1 * a_2 \text{ und } b_i' = \mathbf{par}(S, b_i) \quad (i = 1, 2).$$

[1]) Diese Festlegung ist überflüssig, falls $a_1 \nparallel b_1$ und $a_2 \nparallel b_2$ ist (siehe konstruktive Darstellung für $a = b_1$ bzw. $a = b_2$).

Die Relation $\mathbf{O}_{a_1,b_1;a_2,b_2}$ erfüllt nun unter Beachtung von (D) offensichtlich die Forderungen $\mathbf{O}_1$, $\mathbf{O}_2$ und $\mathbf{O}_{3\mathrm{R}}$, und es gilt $\mathbf{h\ddot{o}}_{\mathrm{R}}(a_1, a_2)$.
Angenommen, es gäbe noch eine von $\mathbf{O}_{a_1,b_1;a_2,b_2}$ verschiedene $\mathbf{O}$-Relation $\mathbf{O}^*$, die die vorgegebenen Geradenpaare enthält und bei der $\mathbf{h\ddot{o}}_{\mathrm{R}}(a_1, a_2)$ gilt. Dann muß $\mathbf{O}_{a_1,b_1;a_2,b_2} \subset \mathbf{O}^*$ sein wegen $\mathbf{O}_{3\mathrm{R}}$. Zu $(a, b) \in \mathbf{O}^* \setminus \mathbf{O}_{a_1,b_1;a_2,b_2}$ gibt es nun Geraden $a' \nparallel a$ und $b' \nparallel b$ mit (a', b), $(a, b') \in \mathbf{O}_{a_1,b_1;a_2,b_2}$. Das aber widerspricht der Gültigkeit von $\mathbf{O}_2$ für $\mathbf{O}^*$. ∎

Mit diesem Satz haben wir innerhalb der Theorie der Desarguesschen Ebenen eine gewisse vollständige Übersicht über alle möglichen $\mathbf{O}$-Relationen in einer Desarguesschen Ebene gewonnen, denn für jede $\mathbf{O}$-Relation gilt (2).

Folgerung (5). *In einer Desarguesschen Ebene kann jede $\mathbf{O}$-Relation als $\mathbf{O}_{a_1,b_1;a_2,b_2}$-Relation dargestellt werden.*

Aus der Existenz einer $\mathbf{O}$-Relation in einer affinen Ebene folgt im allgemeinen nicht die Gültigkeit von (D), auch dann nicht, wenn eine Translationsebene und überdies der „Parallelogramm-Desargues" (ein Spezialfall von (D) für $A_1A_2 \parallel g_3$ und $A_2A_3 \parallel g_1$) vorausgesetzt wird. In einer solchen Ebene kann nämlich für nicht parallele Geraden f_1 und f_2 konstruktiv — wie beim Beweis von (4) — die Relation $\mathbf{O}_{f_1,f_1;f_2,f_2}$ eingeführt werden. (Die Unabhängigkeit von der Wahl von a' ergibt sich dabei gerade mit dem „Parallelogramm-Desargues" bezüglich der Richtungen f_1 und f_2; vgl. auch Abb. 3). Es gilt jedoch

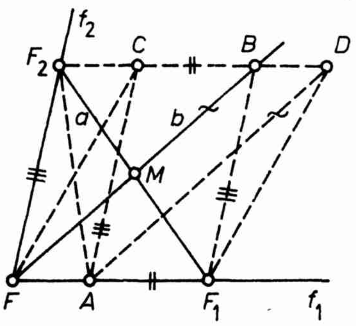

Abb. 3

Satz (6). *Existiert in einer affinen Ebene zu allen Geradenpaaren (a_1, b_1), (a_2, b_2) mit $a_1, b_1 \nparallel a_2, b_2$ eine $\mathbf{O}$-Relation, die diese Paare enthält und bei der $\mathbf{h\ddot{o}}_{\mathrm{R}}(a_1, a_2)$ ist, so gilt die Desarguessche Aussage* (D) (d. h., für Satz (4) ist (D) notwendig).

Beweis. Unter Zugrundelegung der Prämissen von (D) ist bei einer $\mathbf{O}$-Relation, für die $g_1 \perp A_2A_3$, $g_3 \perp A_1A_2$ und $\mathbf{h\ddot{o}}_{\mathrm{R}}(g_1, g_2)$ gilt, zunächst $A_1A_3 \perp g_2$ (nach $\mathbf{O}_{3\mathrm{R}}$) und wegen $g_1 \perp B_2B_3$, $g_3 \perp B_1B_2$ (nach $\mathbf{O}_1$) entsprechend auch $B_1B_3 \perp g_2$, so daß nach $\mathbf{O}_2$ schließlich $A_1A_3 \parallel A_1B_3$ ist. ∎

Der Satz (6) rechtfertigt, daß im folgenden — wenn nicht ausdrücklich etwas anderes vorausgesetzt wird — keine „schwächeren" als Desarguessche Ebenen zugrunde gelegt werden. Überdies gelte (F).
Aus den Darlegungen zu (4) und (3) ergeben sich die drei Folgerungen (vgl. dazu Abb. 2):

Folgerung (7). *Es ist*

(a) $\mathbf{O}_{a_1,b_1;a_2,b_2} = \mathbf{O}_{a_2,b_2;a_1,b_1}$;

(b) $\mathbf{O}_{a_1,b_1;a_2,b_2} = \mathbf{O}_{a_1',b_1';a_2,b_2}$ *für* $a_1' \parallel a_1$ *und* $b_1' \parallel b_1$;

(c) $(a, b) \in \mathbf{O}_{a_1,b_1;a_2,b_2} \Rightarrow (b, a) \in \mathbf{O}_{a_1,b_1;b_2,a_2}$.

Die ersten Eigenschaften berechtigen, für $\mathbf{O}_{a_1,b_1;a_2,b_2}$ auch $\mathbf{O}_{\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\beta_2}$ zu setzen, wenn α_i und β_i die Richtungen von a_i und b_i $(i = 1, 2)$ sind.

Folgerung (8). (a) *Sind bei einer Orthogonalitätsrelation* $\mathbf{O}$ *die Richtungen* α_1 *und* α_2 $(\neq \alpha_1)$ *nicht orthogonal zueinander, so ist*

$$\mathbf{h\ddot{o}}_{\mathrm{R}}(\alpha_1, \alpha_2) \Leftrightarrow \mathbf{O} = \mathbf{O}_{\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\beta_2},$$

wobei β_i *die Rechtslotrichtung von* α_i $(i = 1, 2)$ *bezüglich* $\mathbf{O}$ *ist.*

(b) *Ist* $\alpha_1 \perp \beta_1$ *und* $\alpha_1, \beta_1 \neq \alpha_2$, *so gilt* $\mathbf{h\ddot{o}}_{\mathrm{R}}(\alpha_1, \alpha_2) \Leftrightarrow \mathbf{h\ddot{o}}_{\mathrm{L}}(\beta_1, \alpha_2)$.

Folgerung (9). *Zu jedem Parallelogramm ABCD gibt es eine und nur eine* $\mathbf{O}$*-Relation derart, daß ABCD Quadrat ist.* Dabei wird unter einem *Quadrat ABCD* ein Parallelogramm $ABCD$ mit $AB \perp AD$, $AC \perp BD$ und $\mathbf{h\ddot{o}}_{\mathrm{R}}(AB, AC)$ verstanden.

3. $\mathbf{O}$-Relationen mit isotropen Richtungen

Nach $\mathbf{O}_1$ ist mit f auch jede zu ihr parallele Gerade isotrop.

Satz (10). *Enthält eine Orthogonalitätsrelation* $\mathbf{O}$ *zwei isotrope Richtungen* φ_1 *und* φ_2 *mit* $\mathbf{h\ddot{o}}_{\mathrm{R}}(\varphi_1, \varphi_2)$, *so gilt:*

(a) $\mathbf{O}$ *ist symmetrisch;*

(b) $\mathbf{O}$ *enthält — außer* φ_1 *und* φ_2 *— keine weiteren isotropen Richtungen;*

(c) *für alle* $(a, b) \in \mathbf{O}$ *mit* $a \notin \varphi_1, \varphi_2$ *ist* $\mathbf{O} = \mathbf{O}_{f_1,f_1;a,b}$, *wobei* $f_1 \in \varphi_1$ *ist.*

Beweis. Zunächst ist nach (8) $\mathbf{O} = \mathbf{O}_{f_1,f_1;f_2,f_2}$ für $f_1 \in \varphi_1$ und $f_2 \in \varphi_2$. Nach (7c) ist dann die Behauptung (a) offensichtlich.

Es sei (a, b) irgendein Paar aus $\mathbf{O}$ mit $a \notin \varphi_1, \varphi_2$ und o. B. d. A. $F = f_1 * f_2 \notin a$. Die Gerade a schneidet dann f_1 und f_2 in von F verschiedenen Punkten F_1 und F_2. Bezüglich $\mathbf{O}$ ist $B = \mathbf{par}(F_1, f_2) * \mathbf{par}(F_2, f_1)$ $(\neq F)$ der Schnittpunkt der Höhen durch F_1 und F_2 im Dreieck FF_1F_2. Also ist $a \perp FB$. Wegen (F) ist aber $a \nparallel FB$; womit (b) bewiesen ist.

Für (c) genügt es, $\mathbf{h\ddot{o}}(f_1, a)$ bezüglich $\mathbf{O}$ zu zeigen. Es sei AF_1F_2 ein beliebiges Dreieck mit $A \in f_1$ und o. B. d. A. $A \neq F$. Es ist

$$D = \mathbf{par}(F_2, f_1) * \mathbf{par}(A, b)$$

Schnittpunkt der Höhen durch F_2 und A. Im Dreieck AFF_2 ist

$$C = \mathbf{par}(F_2, f_1) * \mathbf{par}(A, f_2)$$

der Schnittpunkt der Höhen durch F_2 und A und demnach $AF_2 \perp FC$. Nach der kleinen Papposschen Aussage — einer Folgerung aus (D) — bezüglich der Trägergeraden f_1 und $\mathbf{par}(F_2, f_1)$ folgt aus den bestehenden Parallelitäten weiter $FC \parallel F_1D$. Also geht durch D auch die Höhe von F_1 auf AF_2. ∎

Im Zusammenhang mit (10) ist von Interesse das

Lemma (11). *Zu* $\mathbf{O}_{f_1,f_1;a,b}$ *mit* $a \not\parallel b$ *gibt es stets eine Gerade* $f_2 \not\parallel f_1$ *derart, daß* $\mathbf{O}_{f_1,f_1;a,b} = \mathbf{O}_{f_1,f_1;f_2,f_2}$ *ist.*

Beweis (vgl. Abb. 3). Es sei $F = f_1 * a$ und $F_1 \neq F$ irgendein Punkt auf f_1. Die Parallelen $\mathbf{par}(F_1, a)$ und $\mathbf{par}(F, b)$ schneiden sich in einem Punkt $M \notin f_1$. Wegen (F) gibt es ein Parallelogramm FF_1BF_2 so, daß M der Schnittpunkt seiner Diagonalen ist. Es ist leicht einsichtig, daß B der Rechtshöhenschnittpunkt des Dreiecks FF_1F_2 und damit $f_2 = FF_2$ ($\not\parallel f_1$) isotrop ist. In Anlehnung an den Beweis von (10) ist nun ohne Mühe $\mathbf{hö}(f_1, f_2)$ zu erkennen, wobei wieder von der kleinen Papposschen Aussage Gebrauch gemacht wird. ∎

Aus dem Bisherigen ergibt sich

Satz (12). *Zu jeder* $\mathbf{O}$*-Relation gibt es eine anisotrope Richtung* ϱ *und eine dazu nicht orthogonale Richtung* φ ($\neq \varrho$) *so, daß* $\mathbf{hö}_R(\varrho, \varphi)$ *gilt. Enthält sie neben einer anisotropen Richtung* ϱ *eine isotrope* φ_1 *mit* $\mathbf{hö}_R(\varrho, \varphi_1)$, *so besitzt sie genau eine weitere isotrope Richtung* φ_2, *und es ist* $\mathbf{hö}(\varphi_1, \alpha)$ *für alle Richtungen* $\alpha \neq \varphi_1$. (*Die* $\mathbf{O}$*-Relation ist dann symmetrisch.*)

Im Gegensatz zu $\mathbf{O}$-Relationen in Papposschen Ebenen, die entweder keine oder genau zwei isotrope Richtungen besitzen (vgl. [7]), können hier mehr als zwei derartige Richtungen auftreten. Das liegt z. B. bei der $\mathbf{C}(\mathbf{Q})$ über dem Quaternionenschiefkörper $\mathbf{Q}$ mit der $\mathbf{O}_{a_1,b_1;a_2,b_2}$-Relation vor, wobei $a_1 = [0, -1, 0]$, $b_1 = [1, 0, 0]$, $a_2 = [1, -1, 0]$ und $b_2 = [-1, -1, 0]$ ist.
Die Isotropie einer Geraden $[u, v, w]$ ist hier — wie die arithmetische Beschreibung (13) von $\mathbf{O}$-Relationen im folgenden Abschnitt zeigt — gleichbedeutend mit $u^2 = -1$; diese Gleichung hat aber in $\mathbf{Q}$ bekanntlich mehr als zwei verschiedene Lösungen.

4. Arithmetische und projektive Beschreibung der O-Relationen

Nach (12) läßt sich eine vorliegende $\mathbf{O}$-Relation stets als $\mathbf{O}_{a_1,b_1;a_2,b_2}$-Relation darstellen, bei der neben der konzentrischen Lage der Geraden a_i, b_i ($i = 1, 2$) noch $a_1 \not\parallel b_1$ ist. Dann gibt es eine zur Ebene isomorphe $\mathbf{C}(\mathbf{K})$ derart, daß den Geraden a_1, b_1, a_2 die Geraden $[0, -1, 0]$, $[1, 0, 0]$, $[1, -1, 0]$ in der $\mathbf{C}(\mathbf{K})$ entsprechen. (Man wähle dazu a_1 und b_1 als „Koordinatenachsen" und lege auf ihnen die „Einheitspunkte" entsprechend fest.) Das Bild von b_2 ist eine Gerade $[\lambda, -1, 0]$ mit $\lambda \neq 0$ aus $\mathbf{K}$.
Vollzieht man die konstruktive Darstellung der $\mathbf{O}$-Relation (vgl. Abb. 2) in der $\mathbf{C}(\mathbf{K})$ nach, so ergibt sich nach einigen Rechnungen:

$$[u, v, w] \perp [u', v', w'] \Leftrightarrow u'u - \lambda v'v = 0. \tag{13}$$

(Dabei sind die zueinander orthogonalen Geraden $[0, -1, 0]$ und $[1, 0, 0]$ einbezogen.)

Eine Desarguessche Ebene wird durch die uneigentliche Gerade u zu einer projektiven Ebene erweitert, die bekanntlich auch Desarguessch ist. Dabei besteht eine eindeutig umkehrbare Abbildung ψ von der Menge $\mathfrak{R}$ der Richtungen auf u; $\psi(\varrho)$ heißt der uneigentliche Punkt der Richtung ϱ. Es gilt der

Satz (14). (a) *Es sei* $\perp$ *eine* $\mathbf{O}$*-Relation und* $\omega = \{(\alpha, \beta) \colon \alpha, \beta \in \mathfrak{R} \wedge \alpha \perp \beta\}$. *Dann ist* $\psi \circ \omega \circ \psi^{-1}$ *eine nichtidentische (projektive) Transformation von* u, *für die es involuto-*

rische Punkte $U_1, U_2 \in u$ *und Punkte* $S, A_1 \notin u$ *so gibt, daß die Transformation durch die Kette* $u \overset{A_1}{\overline{\wedge}} a_2 \overset{U_1'}{\overline{\wedge}} b_2 \overset{S}{\overline{\wedge}} u$ *perspektiver Abbildungen dargestellt wird, wobei* S, A_1, U_1 *kollinear sind und* $a_2 = SU_2$, $U_i' = \psi \circ \omega \circ \psi^{-1}(U_i)$ $(i = 1, 2)$ *und* $b_2 = A_1U_2'$ *ist.*

(b) *Ist (andererseits)* $\pi \neq 1$ *eine (projektive) Transformation von* u, *für die es Punkte* $U_1, U_2 \in u$ *und* $S, A_1 \notin u$ *mit den in* (a) *genannten Eigenschaften gibt, dann stellt* $\psi^{-1} \circ \pi \circ \psi$ *eine* **O**-*Relation in* $\mathfrak{R}$ *dar.*

Beweis. Liegt eine **O**-Relation, d. h. eine $\mathbf{O}_{\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\beta_2}$-Relation, vor, dann ist neben ψ auch ω eine Bijektion und damit $\psi \circ \omega \circ \psi^{-1}$ eine (nichtidentische) Transformation von u, wobei $\psi(\alpha_1)$, $\psi(\alpha_2)$ involutorisch sind. Im weiteren seien S irgendein (eigentlicher) Punkt und a_1, a_2, b_1, b_2 die (projektiven) Verbindungsgeraden $S\psi(\alpha_i)$, $S\psi(\beta_i)$; $i = 1, 2$; ferner sei A_1 ein von S verschiedener (eigentlicher) Punkt auf a_1 (Abb. 2). Nun ergibt die Kette $u \overset{A_1}{\overline{\wedge}} a_2 \overset{\psi(\beta_1)}{\overline{\wedge}} b_2 \overset{S}{\overline{\wedge}} u$ perspektiver Abbildungen tatsächlich die konstruktive Darstellung von $\mathbf{O}_{\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\beta_2}$ (vgl. Abb. 2) und damit $\psi \circ \omega \circ \psi^{-1}$.

Die Umkehrung (b) ist nun leicht einsichtig. ∎

Die weitläufigen Voraussetzungen für π in der Aussage (b) sind nicht gänzlich zu vermeiden, da der Fundamentalsatz der projektiven Geometrie hier nicht zur Verfügung steht. (Näheres zu Projektivitäten in Desarguesschen Ebenen siehe u. a. [3].)

5. Zur Symmetrie von O-Relationen

Eine spezielle Frage ist die nach Kriterien dafür, daß eine **O**-Relation symmetrisch ist. Zuvor stellen wir eine derartige Frage bezüglich *symmetrischer Richtungen*, d. h. für solche Richtungen ϱ, für die $\varrho \perp \varphi \Rightarrow \varphi \perp \varrho$ gilt. (Entsprechend seien *symmetrische Geraden* erklärt.) Kriterien synthetischer Art können mit Hilfe folgender vierstelligen bzw. dreistelligen Punktrelation $\mathbf{p}(O, A, B, C)$ und $\mathbf{P}(O, A, B)$ gegeben werden.

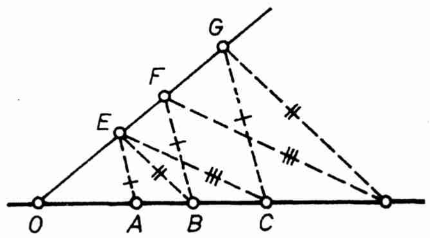

Abb. 4

Es gelte $\mathbf{p}(O, A, B, C)$ genau dann, wenn O, A, B, C kollineare Punkte mit $O \neq A$ sind und wenn es einen Punkt $E \notin OA$ so gibt, daß die Geraden $\mathbf{par}(F, EC)$ und $\mathbf{par}(G, EB)$ einen gemeinsamen Punkt auf OA haben, wobei $F = \mathbf{par}(B, EA) * OE$ und $G = \mathbf{par}(C, EA) * OE$ ist (Abb. 4).

Ferner bedeute $\mathbf{P}(O, A, B)$, daß O, A, B kollineare Punkte mit $O \neq A$ sind und daß $\mathbf{p}(O, A, B, C)$ für alle Punkte $C \in OA$ gilt.

Der Desarguessche Satz hat zur Folge, daß $\mathbf{p}(O, A, B, C)$ unabhängig von der Lage des Punktes $E \notin OA$ ist. Falls $\mathbf{p}(O, A, B, C)$ und O, A, B, C voneinander verschieden sind, bilden die Punkte B, F, $\mathbf{par}\ (F, EC) * OA, G, C, E$ ein affines Pappos-Sechseck (Abb. 4). Nun sind einsichtig

Lemma (15). *Die Gültigkeit der Papposschen Aussage ist hinreichend und notwendig dafür, daß* $\mathbf{p}(O, A, B, C)$ *für alle kollinearen Punkte* O, A, B, C *mit* $O \neq A$ *gilt.*

Lemma (16). *Sind* $O = (0, 0)$, $A = (1, 0)$, $B = (s, 0)$ *und* $C = (t, 0)$, *dann gilt*

$$\mathbf{p}(O, A, B, C) \Leftrightarrow st = ts;$$

$$\mathbf{P}(O, A, B) \quad \Leftrightarrow st = ts \text{ für alle } t \in \mathbf{K}, \text{ d. h., } s \text{ liegt im Zentrum von } \mathbf{K}.$$

Aus (16) ergibt sich

Lemma (17). (a) *Für alle* O, A ($\neq 0$) *ist* $\mathbf{P}(O, A, A,)$;

(b) $O = \mathbf{Mp}(A, B) \Rightarrow \mathbf{P}(O, A, B)$[1];

(c) $\mathbf{P}(A, B, C) \wedge A \neq C \Rightarrow \mathbf{P}(A, C, B)$[1];

(d) $\mathbf{P}(A, B, C)$ *ist invariant bei Parallelprojektionen von einer Geraden auf eine Gerade*[1].

Jede $\mathbf{O}$-Relation läßt sich als $\mathbf{O}_{\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\beta_2}$-Relation mit $\alpha_1 \neq \beta_1$ darstellen (vgl. (12)). Eine vollständige Übersicht über alle symmetrischen Richtungen und ein Kriterium für die Symmetrie der $\mathbf{O}$-Relation werden gegeben durch

Satz (18). *Sind* E *ein beliebiger Punkt und* A_1, A_2, B_2, C *die Schnittpunkte der Geraden durch* E, *die in* $\alpha_1, \alpha_2, \beta_2$ *und* ϱ *liegen, mit einer Geraden aus* β_1, *die nicht durch* E *geht, so ist* ϱ *symmetrische Richtung dann und nur dann, wenn* $\varrho = \beta_1$ *oder* $\mathbf{p}(A_1, A_2, B_2, C)$ *gilt.*

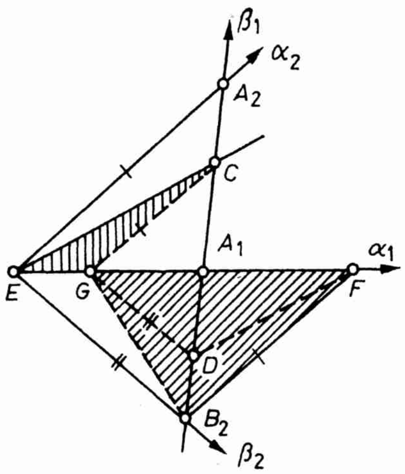

Abb. 5

Zusatz. $\mathbf{O}_{\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\beta_2}$ *ist genau dann symmetrisch, wenn* $\mathbf{P}(A_1, A_2, B_2)$ *ist.*

Beweis. Da β_1 und $\alpha_1, \alpha_2, \beta_2$ symmetrisch sind und die Relationen $\mathbf{p}(A_1, A_2, B_2, A_1)$, $\mathbf{p}(A_1, A_2, B_2, A_2)$, $\mathbf{p}(A_1, A_2, B_2, B_2)$ gelten, kann o. B. d. A. $C \neq A_1, B_1, A_2$ vorausgesetzt werden. Ferner ist $A_1 \neq A_2, B_2$. Im folgenden sei noch $F = EA_1 * \mathbf{par}(B_2, EA_2)$ und $G = EA_1 * \mathbf{par}(C, EA_2)$; es ist $E \neq G$ und $F \neq G, A_1$ (Abb. 5). Im Dreieck EGC

[1]) Dafür lassen sich auch (z. T. einfache) synthetische Beweise erbringen.

ist B_2 der Schnittpunkt der Höhen durch E und C und damit $EC \perp GB_2$. Im Dreieck GFB_2 schneiden sich die Höhen durch G und B_2 in einem Punkt $D \in A_1A_2$; also ist $GB_2 \perp FD$.

Die Symmetrie von ϱ, also von EC, ist nun gleichwertig damit, daß $EC \parallel FD$, d. h. $\mathbf{p}(A_1, A_2, B_2, C)$, gilt.

Der Zusatz ist nun sofort einsichtig. ∎

Zusammen mit (17a) ergibt sich aus (18) nochmals eine Bestätigung für die in (12) behauptete Symmetrie.

Weiterhin ergeben sich

Folgerung (19). *In Papposschen Ebenen und nur in diesen ist jede* $\mathbf{O}$*-Relation symmetrisch.*

und wegen (17b) die

Folgerung (20). *Enthält eine* $\mathbf{O}$*-Relation ein Quadrat, so ist sie symmetrisch.*

6. Zur Relation hö

Wegen (8b) können wir uns auf die $\mathbf{hö}_R$-Relation beschränken.
Von Interesse ist, welche Richtungen ϱ bei vorgegebener $\mathbf{O}$-Relation $\mathbf{O}_{\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\beta_2}$ zur Richtung α_1 in der $\mathbf{hö}_R$-Relation stehen. Diese Frage ist für den Fall, daß α_1 isotrop ist, vollständig durch (12) beantwortet.
Es sei nun α_1 anisotrop, also $\alpha_1 \neq \beta_1$. Dann gilt der

Satz (21). *Sind E ein beliebiger Punkt und A_1, A_2, C die Schnittpunkte der Geraden durch E, die in α_1, α_2 und ϱ liegen, mit einer Geraden aus β_1, die nicht durch E geht, so ist $\mathbf{hö}_R(\alpha_1, \varrho)$ genau dann, wenn $\varrho = \beta_1$ oder $\mathbf{P}(A_1, A_2, C)$ $(C \neq A_1)$ gilt.*

Beweis. Da $\mathbf{hö}_R(\alpha_1, \alpha_2)$ und $\mathbf{hö}_R(\alpha_1, \beta_1)$ sowie $\mathbf{P}(A_1, A_2, A_2)$ gilt, kann o. B. d. A. $C \neq A_2$ (neben $A_1 \neq A_2, C$) vorausgesetzt werden. (Die Isotropie von α_2 ist hier nicht ausgeschlossen.) Im weiteren sei noch $F = EA_1 * \mathbf{par}(C, EA_2)$ und B_2 der Punkt auf A_1A_2 mit $EB_2 \in \beta_2$ (vgl. Abb. 6); es ist $F \neq E, A_1$ und $B_2 \neq A_1$.
Im Dreieck CEF ist B_2 der Schnittpunkt der Lote durch C und E und damit $EC \perp FB_2$.
Mit der Relation $\mathbf{hö}_R(\alpha_1, \varrho)$ ist gleichwertig, daß aus $(g, h) \in \mathbf{O}_{\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\beta_2}$ die Beziehung $(g, h) \in \mathbf{O}_{EA_1,A_1A_2;EC,FB_2}$ folgt. Dabei kann o. B. d. A. $g \notin \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \varrho$ und $E \in g$ sowie $B_2 \in h$ vorausgesetzt werden. Jede derartige Gerade g schneidet A_1A_2 in einem Punkt $X \neq A_1, A_2, C$. Diese Punktverschiedenheit kann zum anderen ohne wesentliche Einschränkung zum Nachweis vorausgesetzt werden, daß $\mathbf{p}(A_1, A_2, C, X)$ für alle $X \in A_1A_2$ gilt.
Jetzt sei noch $G = EA_1 * \mathbf{par}(X, EA_2)$ $(G \neq A_1, E, F)$ und $Y = EA_1 * \mathbf{par}(G, EC)$. An Hand des Dreiecks XEG ist offensichtlich $g \perp GB_2$ (Abb. 6).
Aus $\mathbf{p}(A_1, A_2, C, X)$ folgt nun $FY \parallel EX = g$ und damit (an Hand des Dreiecks YFG) $(g, GB_2) \in \mathbf{O}_{EA_1,A_1A_2;EC,FB_2}$.

Umgekehrt ergibt sich aus $(g, GB_2) \in \mathbf{O}_{\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\beta_2} = \mathbf{O}_{EA_1,A_1A_2;EC,FB_2} \ni (FY, GB_2)$ zunächst $FY \parallel g$ und damit $\mathbf{p}(A_1, A_2, C, X)$. ∎

Zusammen mit (18) ergibt sich die

Folgerung (22). *Bezüglich* $\mathbf{O}_{\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\beta_2}$ *mit* $\alpha_1 \neq \beta_1$ *gilt* $\mathbf{h\ddot{o}}_{\mathrm{R}}(\alpha_1, \beta_2)$ *genau dann, wenn die* $\mathbf{O}$*-Relation symmetrisch ist.*

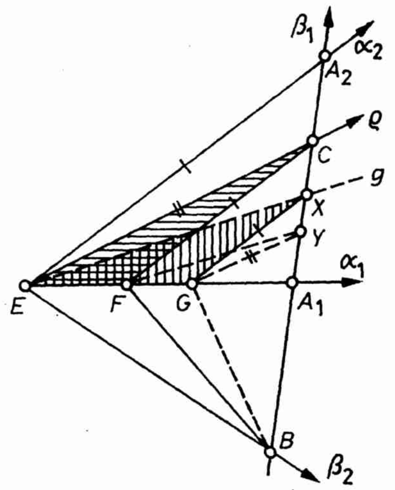

Abb. 6

Ein bemerkenswertes Resultat aus (21) und (12) ist die

Folgerung (23). *Ist* $\mathbf{h\ddot{o}}_{\mathrm{R}}(\alpha_1, \varrho)$ *bezüglich* $\mathbf{O}_{\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\beta_2}$, *so gilt diese Beziehung bezüglich aller* $\mathbf{O}_{\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\varphi}$ *mit* $\varphi \neq \alpha_1, \beta_1$.

Wir zeigen nun

Lemma (24). *Aus* $\mathbf{h\ddot{o}}_{\mathrm{R}}(\varrho, \alpha_1)$ *bezüglich* $\mathbf{O}_{\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\beta_2}$ *mit* $\alpha_1 \neq \beta_1$ *und* $\varrho \neq \alpha_2$ *folgt* $\mathbf{h\ddot{o}}_{\mathrm{R}}(\varrho, \alpha_2)$ *bezüglich* $\mathbf{O}_{\beta_1,\alpha_1;\alpha_2,\beta_2}$.

Beweis. Für $\varrho = \beta_1$ ist die Behauptung trivial. Nun können wie beim Satz (21) Punkte E, A_1, A_2, C erklärt werden. Ferner sei $F = EA_1 * \mathbf{par}(C, EA_2)$ (vgl. Abb. 6); es ist $F \neq A_1$.
Aus $\mathbf{h\ddot{o}}_{\mathrm{R}}(\varrho, \alpha_1)$ folgt nach (21) $\mathbf{P}(A_1, A_2, C)$ und damit $\mathbf{P}(A_1, F, E)$ nach (16d) und (16c). Jetzt ist (wiederum nach (21)) die Behauptung offensichtlich. ∎

Die $\mathbf{h\ddot{o}}_{\mathrm{R}}$-Relation ist symmetrisch. Wann sie auch transitives Verhalten zeigt, klärt

Satz (25). *Aus* $\mathbf{h\ddot{o}}_{\mathrm{R}}(\alpha_1, \alpha_2)$ *und* $\mathbf{h\ddot{o}}_{\mathrm{R}}(\alpha_1, \alpha_3)$ *mit* $\alpha_3 \neq \alpha_2$ *und der Anisotropie von* α_1 *folgt* $\mathbf{h\ddot{o}}_{\mathrm{R}}(\alpha_2, \alpha_3)$ *genau dann, wenn die* $\mathbf{O}$*-Relation symmetrisch ist.*

Beweis. Die Notwendigkeit der Symmetrie ergibt sich sofort nach (22). Zum Nachweis der Hinlänglichkeit ist festzustellen, daß wegen $\alpha_2 \neq \alpha_3$ wenigstens eine dieser Richtungen nicht zu α_1 orthogonal ist; das gelte etwa für α_2. Dann kann die zugrunde liegende $\mathbf{O}$-Relation als $\mathbf{O}_{\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\beta_2}$-Relation dargestellt werden. Nach Voraussetzung ist $\alpha_1 \neq \beta_1$. Aus $\mathbf{h\ddot{o}}_{\mathrm{R}}(\alpha_3, \alpha_1)$ folgt nun nach (24) $\mathbf{h\ddot{o}}_{\mathrm{R}}(\alpha_3, \alpha_2)$ bezüglich $\mathbf{O}_{\beta_1,\alpha_1;\alpha_2,\beta_2}$ und damit auch bezüglich $\mathbf{O}_{\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\beta_2}$, da die $\mathbf{O}$-Relation symmetrisch ist. ∎

An Hand von (12) und (21) ist ersichtlich, daß in den Voraussetzungen von (25) nicht auf die Anisotropie von α_1 verzichtet werden kann.

Bei jeder Desarguesschen Ebene mit symmetrischer **O**-Relation wird durch die Relation **hö** in der Menge der anisotropen Richtungen eine Zerlegung gestiftet, wenn man zu der Menge aller Richtungen, die zu einer Richtung α in der Relation **hö** stehen, die Richtung α selbst mit hinzunimmt.

Auf die Bewegungsgeometrie der Desarguesschen Ebenen mit **O**-Relation wird hier nicht näher eingegangen. (Dazu ist inzwischen eine gesonderte Arbeit erschienen; siehe [9].)

7. Ein Bezug zu anderen metrischen Desarguesschen Ebenen

Unter den metrischen Desarguesschen Ebenen, in denen die Pappossche Aussage nicht ableitbar ist, sind besonders die „Rechtwinkelebenen" (kurz **RE**) zu nennen, die Schütte, Reidemeister und Naumann untersucht haben (siehe [8], [4] und [5]; [5] gibt eine zusammenfassende Darstellung). Zu diesen werden im folgenden die Desarguesschen Ebenen mit **O**-Relation in Beziehung gesetzt.
Die in [4] und [8] vorgestellten Orthogonalitätsrelationen (in affinen Ebenen) sind neben sogenannten „trivialen" Forderungen ($a \perp b \Rightarrow b \perp a$; $a \perp b \wedge b \parallel c \Rightarrow a \perp c$; Existenz und Eindeutigkeit der Lote) durch gewisse Rechtwinkelschließungssätze (nach Reidemeister bzw. nach Schütte) bezüglich vollständiger Vierecke beschrieben; sie sind also insbesondere symmetrisch. Die Aussage von Desargues läßt sich beweisen, die Pappossche nicht.

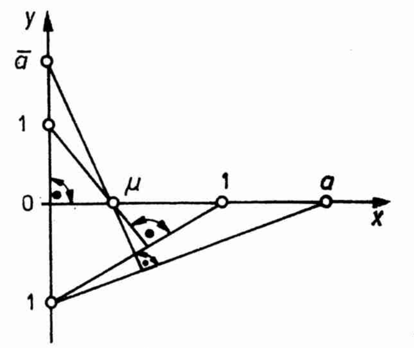

Abb. 7

Bei Zugrundelegung eines kartesischen Koordinatensystems (ein solches existiert in beiden Rechtwinkelebenen) schneidet das Lot von $(0, 1)$ auf die Verbindungsgerade von $(0, -1)$ und $(1, 1)$ die x-Achse in einem Punkt $(\mu, 0)$ mit $\mu \neq 0$ (vgl. Abb. 7). Ist $(a, 0)$ irgendein Punkt der x-Achse, so schneidet das Lot von $(\mu, 0)$ auf die Gerade $(0, -1)\,(a, 0)$ die y-Achse in einem Punkt $(0, \bar{a})$ (Abb. 7). Sind nun $[a, -1, c_1]$ und $[b, -1, c_2]$ mit $a, b \neq 0$ irgendwelche Geraden, so gilt (nach [5])

(26) $[a, -1, c_1] \perp [b, -1, c_2] \Leftrightarrow a\mu\bar{b} = -1$, *wobei* $a \to \bar{a}$ *in der Reidemeister-*__RE__ *ein Automorphismus in* **K** *mit* $\mu\bar{a} = a\mu$ *und in der Schütte-*__RE__ *ein involutorischer Anti-Automorphismus ist.*

In Desarguesschen Ebenen mit **O**-Relation kann wegen Satz (12) ein kartesisches Koordinatensystem so eingeführt werden, daß die x-Achse zur Verbindungsgeraden von $(0, -1)$ und $(1, 0)$ in der $\mathbf{hö}_R$-Relation steht. Dann ergibt sich nach kurzer Rechnung $\mu = -\lambda^{-1}$ und ferner mittels Rechtslot, daß $a \to \bar{a} = \mu^{-1}a\mu$ ein Automorphismus ist. Zusammen mit (26) und (13) ergeben sich daraus leicht folgende Beziehungen:

Satz (27). (a) *Eine Desarguessche Ebene mit* **O**-*Relation ist genau dann eine Reidemeister*-**RE** *bzw. Schütte*-**RE**, *wenn die* **O**-*Relation symmetrisch ist bzw. die Papposssche Aussage gilt.*

(b) *Eine Reidemeister*-**RE** *bzw. eine Schütte*-**RE** *ist genau dann eine Desarguessche Ebene mit* **O**-*Relation, wenn $a \to \bar{a}$ die Identität ist. (Eine Schütte*-**RE** *ist dann überdies Pappossch.)*

LITERATUR

[1] BAER, R.: The fundamental theorems of elementary geometry. An axiomatic analysis. Trans. Amer. Math. Soc. *56* (1944), 94—129.

[2] LENZ, H.: Grundlagen der Elementarmathematik, 2. Aufl., Berlin 1967.

[3] LENZ, H.: Vorlesungen über projektive Geometrie, Leipzig 1965.

[4] NAUMANN, H.: Eine affine Rechtwinkelgeometrie. Math. Ann. *131* (1956), 17—27.

[5] NAUMANN, H., und K. REIDEMEISTER: Über Schließungssätze der Rechtwinkelgeometrie. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg *21* (1957), 1—12.

[6] PICKERT, G.: Projektive Ebenen. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1955.

[7] RAUTENBERG, W., und E. QUAISSER: Orthogonalitätsrelationen in der affinen Geometrie. Z. math. Logik Grundl. Math. *15* (1969), 19—24.

[8] SCHÜTTE, K.: Ein Schließungssatz für Inzidenz und Orthogonalität. Math. Ann. *129* (1955), 424—430.

Zusatz bei der Korrektur:

[9] QUAISSER, E.: Zur Bewegungsgeometrie in Desarguesschen Ebenen mit einer Orthogonalitätsrelation. Wiss. Z. PH Potsdam *19* (1975), 131—138.

Manuskripteingang: 28. 11. 1973

VERFASSER:

ERHARD QUAISSER, Sektion Mathematik der Pädagogischen Hochschule Potsdam