Beiträge zur Algebra und Geometrie
4 (1975), 65–70

Zur Homöomorphie algebraischer Hyperflächen[1])

GÜNTHER SCHIEMANN

0. Es seien V und W zwei singularitätenfreie projektive algebraische Hyperflächen der Ordnung r (Abk. spaHr) in einem projektiven Raum R_n der Dimension $n \geqq 2$ über dem Körper K der komplexen Zahlen. Dann gilt:

(A) *V und W sind zueinander homöomorph.*

Dies folgt als Spezialfall aus einem allgemeineren Satz in [2], S. 1612. Die dort benutzte Theorie differenzierbarer Faserbündel ist aufwendiger, als für die naheliegende Aussage (A) notwendig scheint. Wir werden im folgenden einen zu (A) äquivalenten Satz (B) mit elementaren Mitteln beweisen:

(B) *Zu jedem Paar spaHr V und W gibt es eine endliche Folge von spaHr $V = V_1, \ldots, V_k = W$ derart, daß im Durchschnitt passend gewählter Schlauchumgebungen $U(V_i)$ und $U(V_{i+1})$ eine zu V_i und V_{i+1} homöomorphe spaHr V_i^+ liegt, $i \in \{1, \ldots, k-1\}$.*

1. Wir konstruieren zunächst zu einer gegebenen spaHr V eine Schlauchumgebung $U(V)$.

1.1. V sei Nullstellengebilde einer Form $F(X)$ vom Grade r in den Unbestimmten $x_0, \ldots, x_n$ $(:= X)$. Die Koeffizienten von $F(X)$ denken wir uns im folgenden festgehalten.

1.2. Die Punkte von V bezeichnen wir mit $Y = (y_0, \ldots, y_n)$[2]), $y \in K$. Wir denken V zerlegt in abgeschlossene Teilmengen M_i, $i \in \{0, \ldots, n\}$, mit

$$M_i =: \left\{ Y \mid y_i \neq 0, \left|\frac{y_j}{y_i}\right| \leqq 1 \quad \text{für} \quad j \neq i \right\}.$$

Die Punkte $Y \in M_i$ normieren wir durch die Vorschrift $y_i = 1$. Für innere Punkte von M_i ist diese Normierung eindeutig. Für Randpunkte $Y \in M_i \cap M_j$ geschieht der Übergang von einer Normierung zur anderen durch Koordinatentransformationen

[1]) Herrn Doz. Dr. sc. nat. L. STAMMLER danke ich für sachlichen und methodischen Rat.

[2]) Statt Koordinatenzeilen werden wir gelegentlich auch Koordinatenspalten denken. Verwechslungen sind nicht zu befürchten.

der Gestalt

$$Y \to e^{i\alpha}\, Y, \qquad \alpha \text{ reell.} \tag{1}$$

1.3. Jedem Y wird eindeutig der Punkt $Y' =: (\overline{F_{x_0}(Y)}, \ldots, \overline{F_{x_n}(Y)})$[1]) zugeordnet. Y und Y' sind stets verschieden. Aus der Annahme des Gegenteils, $Y = cY'$ mit $c \neq 0$, folgt wegen der Eulerschen Identität ein Widerspruch:

$$0 = F(Y) = \frac{1}{r} \sum_0^n y_i F_{x_i}(Y) = \frac{1}{r} \sum_0^n c\overline{F_{x_i}(Y)}\, F_{x_i}(Y) \neq 0,$$

da V singularitätenfrei vorausgesetzt ist.
Die zu jedem Y eindeutig bestimmte Gerade $Y = sY'$, $s \in K$, schneidet V in Y einfach. Denn die Entwicklung von $F(Y + sY')$ nach Potenzen von s liefert

$$F(Y + sY') = 0 + s\left(\sum_0^n |F_{x_i}(Y)|^2\right) + \cdots.$$

Eine Koordinatentransformation (1) bewirkt in der Geraden $Y + sY'$ die Parmetertransformation

$$s \to e^{i\alpha r} s, \tag{2}$$

läßt also $|s|$ für jeden Punkt der Geraden konstant.

1.4. Wir definieren zu jedem Y die Kreisscheibe

$$K(Y) =: \{Y + sY' \,|\, 0 \leqq |s| \leqq \sigma\}.$$

Darin ist σ eine positive reelle Konstante. Wir können σ so klein wählen, daß für beliebige paarweise verschiedene Punkte Y_1 und Y_2

$$K(Y_1) \cap K(Y_2) = \emptyset$$

gilt. Um dies zu zeigen, unterscheiden wir vier Fälle:

1.4.1. Rang $(Y_1 Y_1' Y_2 Y_2') = 4$. In diesem Fall liegen $K(Y_1)$ und $K(Y_2)$ in windschiefen Geraden und sind daher für jedes σ punktfremd.

1.4.2. Rang $(Y_1 Y_1' Y_2 Y_2') = 3$ und $\{$Rang $(Y_1 Y_1' Y_2) = 2$ oder Rang $(Y_1' Y_2 Y_2) = 2\}$. Hier liegen zwar $Y_1 + s_1 Y_1'$ und $Y_2 + s_2 Y_2'$ in derselben projektiven Ebene, als affine Geraden haben sie aber keinen Schnittpunkt. $K(Y_1)$ und $K(Y_2)$ sind wiederum für jedes σ punktfremd.

1.4.3. Rang $(Y_1 Y_1' Y_2 Y_2') =$ Rang $(Y_1 Y_1' Y_2') =$ Rang $(Y_1' Y_2 Y_2') = 3$. Hier gibt es zu jedem Paar Y_1, Y_2 von Null verschiedene Zahlen $c_1, c_2 \in K$ und eindeutig bestimmte Zahlen $\hat{s}_1, \hat{s}_2 \in K$, die eindeutig einen Punkt $S \in R_n$ bestimmen:

$$S = c_1(Y_1 + \hat{s}_1 Y_1') = c_2(Y_2 + \hat{s}_2 Y_2'). \tag{3}$$

Auf der Menge der Paare Y_1, Y_2, die die Rangbedingung 1.4.3. erfüllen, definieren wir die (stetige) reellwertige Funktion

$$\tau(Y_1, Y_2) =: \mathrm{MAX}\,(|\hat{s}_1|, |\hat{s}_2|).$$

[1]) $\bar{F}$ ist zu F konjugiert-komplex.

Hat τ eine positive untere Schranke, etwa τ_0, so gilt mit jedem positiven $\sigma < \tau_0$

$$K(Y_1) \cap K(Y_2) = \emptyset .$$

Die Existenz eines τ_0 ist also zu zeigen.
Könnte τ auf der betrachteten Menge beliebig klein werden, so wegen (3) nur bei unbegrenzter Annäherung eines Y_2 an ein Y_1. Um diese Annäherung bequem verfolgen zu können, wählen wir für den Augenblick ein neues Koordinatensystem so, daß

$$Y_1 = (1, 0, \ldots, 0), \qquad Y_1' = (0, 1, 0, \ldots, 0)$$

und

$$x_1 = 0 \text{ als Gleichung der Tangentialhyperebene an } V \text{ in } Y_1$$

gilt. Das läßt sich im R_n durch eine projektive Transformation

$$X \to CX$$

erreichen, deren Matrix C wir als unitär voraussetzen wollen. $F(X)$ erhält dann die Gestalt

$$F(X) = x_0^{r-1} x_1 + x_0^{r-2} \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \right) + \cdots$$

mit $a_{ij} = a_{ji}$.
Die Punkte einer hinreichend kleinen Umgebung $U(Y_1) \subset V$ von Y_1 können durch lokale Parameter $z_1, \ldots, z_{n-1}$ $(:= Z)$ und eine eindeutig bestimmte Potenzreihe

$$p(Z) = -\left(\sum_{i,j=2}^{n} a_{ij} z_{i-1} z_{j-1} \right) + \cdots$$

wie folgt beschrieben werden:

$$Y(Z) = (1, p(Z), z_1, \ldots, z_{n-1})$$

oder

$$Y(Z) = Y_1 + {}''Z + P(Z),$$

wenn ${}''Z = (0, 0, z_1, \ldots, z_{n-1})$ und $P(Z) = (0, p(Z), 0, \ldots, 0)$ bedeuten. Durch Reihenentwicklung nach den z_i erhalten wir aus $Y(Z)$

$$Y'(Z) = Y_1' + \overline{{}''A}\;\overline{{}''Z} + \overline{{}''Q(Z)}$$

mit der symmetrischen Matrix ${}''A =: (F_{x_i x_j}(Y_1))$ und dem System von Potenzreihen ${}''Q(Z) =: (q_0(Z), \ldots, q_n(Z))$, die frühestens mit quadratischen Gliedern beginnen.
Es sei nun $Y_2 = Y(Z)$ ein beliebiger Punkt aus $U(Y_1)$, der zusammen mit Y_1 die Rangbedingungen 1.4.3. erfüllt. Wir schreiben nur die erste dieser Bedingungen ausführlich hin:

$$\text{Rang} \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & \overline{q_0(Z)} & \\ 0 & 1 & p(Z) & 1 + \overline{z_i F_{x_1 x_{i+1}}(Y_1)} + \overline{q_1(Z)} & \\ \hline 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & Z & \overline{A}\overline{Z} + \overline{Q(Z)} & \\ 0 & 0 & & & \end{array} \right) = 3.^{1)}$$

[1] $\left.\begin{matrix} A \\ Q(Z) \end{matrix}\right\}$ entsteht aus $\left\{\begin{matrix} {}''A \\ {}''Q(Z) \end{matrix}\right\}$ durch Streichung der ersten beiden $\left\{\begin{matrix} \text{Zeilen u. Spalten,} \\ q_i(Z). \end{matrix}\right.$

Ist 1.4.3. erfüllt, so gibt es genau eine Zahl $k = k(Z) \neq 0$ mit

$$k \cdot Z = \overline{AZ} + \overline{Q(Z)}. \tag{4}$$

Wegen der dritten Rangbedingung aus 1.4.3. ist $k \neq \overline{q_0(Z)}$. Durch elementare Rechnung erhalten wir aus (3) unter Benutzung von (4)

$$\hat{s}_1 = \frac{1 + \sum_{i=1}^{n-1} \overline{z_i F_{x_1 x_{i+1}}(Y_1)} + \overline{q_1(Z)} - kp(Z)}{\overline{q_0(Z)} - k}, \quad \hat{s}_2 = -\frac{1}{k}.$$

Lassen wir nun Y_2 auf einem mit der Rangbedingung 1.4.3. verträglichen Weg w nach Y_1 laufen, so bleiben — wie gleich gezeigt werden wird — $|k|$ nach oben und folglich $|s_1|$ und $|s_2|$ nach unten positiv beschränkt, τ wird also nicht beliebig klein.

$|k|$ ist nach oben beschränkt. Mit (4) gilt nämlich auch

$$\overline{kZ} = AZ + Q(Z). \tag{5}$$

Multiplizieren wir jede Seite von (5) mit dem Transpositum[1]) der entsprechenden Seite von (4), so erhalten wir[2])

$$|k|^2 \cdot \|Z\|^2 = \bar{Z}^{\mathsf{T}} \bar{A}\, AZ + \bar{Z}^{\mathsf{T}} \bar{A} Q(Z) + \overline{Q(Z)}^{\mathsf{T}}\, AZ + \|Q(Z)\|^2.$$

Hieraus folgt

$$\lim_{Y_2 \xrightarrow{w} Y_1} |k|^2 = \lim_{Y_2 \xrightarrow{w} Y_1} \frac{\bar{Z}^{\mathsf{T}} \bar{A} A Z}{\|Z\|^2} \leqq k,$$

wenn k der größte unter den Beträgen der Eigenwerte der (hermiteschen) Matrix $\bar{A}A$ ist. Die Eigenwerte von $\bar{A}A$ sind unabhängig von der speziellen Wahl der unitären Transformationsmatrix C.

1.4.4. Hier sind Y_1 und Y_2 zwei verschiedene einfache Schnittpunkte einer und derselben Geraden mit V. Es muß daher eine Schranke σ_0 geben derart, daß auf der Menge der 1.4.4. erfüllenden Punktepaare mit jedem positiven $\sigma < \sigma_0$

$$K(Y_1) \cap K(Y_2) = \emptyset$$

gilt. Andernfalls gäbe es in der betrachteten Menge eine Folge von Paaren einander unbegrenzt näherrückender Punkte. Dies wäre ein Widerspruch zur Einfachheit der Schnittpunkte.

Hat also τ_0 die Bedeutung aus 1.4.3. und σ_0 die Bedeutung aus 1.4.4., so folgt aus $\sigma = \frac{1}{2}$ MIN (τ_0, σ_0) für beliebige $Y_1, Y_2 \in V$

$$K(Y_1) \cap K(Y_2) = \emptyset.$$

1.5. Die Schlauchumgebung $U(V)$ definieren wir nun als die Vereinigung aller $K(Y)$:

$$U(V) =: \bigcup_{Y \in V} K(Y).$$

Nach Konstruktion ist $F(X) \neq 0$ für $X \in U(V) - V$. Das Minimum von $|F(Y + sY')|$ auf dem Rand von $U(V)$ sei φ.

1) Z^{T} bezeichnet das Transpositum von Z.

2) $\|Z\|^2 = \sum_1^{n-1} |z_i|^2$.

2. Wir konstruieren nun eine von V verschiedene und zu V homöomorphe spaHr $V^+ \subset U(V)$.

2.1. Wir wählen eine Form $G(X)$ vom Grade r mit folgenden Eigenschaften:

(E_1) $F(X) + G(X)$ habe ein von V verschiedenes singularitätenfreies Nullstellengebilde.

(E_2) $|G(Y + sY')| < \varphi$ auf dem Rand von $U(V)$.

Das Nullstellengebilde von $F(X) + G(X)$ heiße V^+.
V^+ liegt ganz in $U(V)$. Wir nehmen das Gegenteil an: V^+ habe Punkte außerhalb von $U(V)$. Da V^+ zusammenhängend ist und der Rand von $U(V)$ den Einbettungsraum R_n zerlegt, muß es auch Punkte von V^+ auf dem Rand von $U(V)$ geben. Es sei $X^* \in V^+$ ein solcher, $X^* = Y^* + s^* Y^{*\prime}$, $|s^*| = \sigma$. Dann gilt einerseits

$$F(X^*) + G(X^*) = 0,$$

andererseits

$$|F(X^*) + G(X^*)| \geqq |F(X^*)| - |G(X^*)|.$$

Die rechte Seite der Ungleichung ist positiv wegen $|F(X^*)| \geqq \varphi$, $|G(X^*)| < \varphi$. Das ist ein Widerspruch, V^+ liegt also ganz in $U(V)$.

2.2. Wir zeigen einen Homöomorphismus zwischen V und V^+. Die Gleichung

$$F(Y + sY') + G(Y + sY') = 0 \tag{6}$$

hat für jedes Y genau eine Lösung s^+ mit $|s^+| < \sigma$. Dies folgt aus dem Satz von Rouché [3]. Die Abbildung

$$p\colon V \to V^+, \quad p(Y) = Y + s^+ Y',$$

ist also eineindeutig. Sie ist auch stetig. Das ist klar, solange Y auf einem und demselben M_i (vgl. 1.2.) variiert. Denn die Koeffizienten von (6) sind stetige Funktionen der Koordinaten von Y, und s^+ ist als Nullstelle von (6) eine stetige und (wegen des Satzes von Rouché) unverzweigte Funktion dieser Koeffizienten. Folglich hängt auf jedem M_i der Punkt $Y + s^+ Y'$ stetig von Y ab. Für Punkte $Y \in M_i \cap M_j$ (vgl. 1.2.) folgt aus (1) und (2) als Koordinatentransformation der Bildpunkte:

$$p(Y) = Y + s^+ Y' \to p(e^{i\alpha} Y) = e^{i\alpha}(Y + s^+ Y').$$

Mithin ist p überall auf V stetig. Nach [1], S. 95, ist eine eineindeutige und stetige Abbildung eines bikompakten topologischen Raumes in einen Hausdorffschen Raum ein Homöomorphismus. Also ist p ein Homöomorphismus von V auf V^+.

3. Wir zeigen nun (B).

3.1. Es sei A ein projektiver Raum der Dimension $\binom{n+r}{r} - 1$ über K. Seine Punkte $F = (a_0, \ldots)$ seien die Koeffiziententupel der Formen $F(X) = a_0 x_0^r + \cdots$ vom Grade r in den Unbestimmten $x_0, \ldots, x_n$. $A_i \subset A$ sei die Mannigfaltigkeit derjenigen Punkte $F \in A$, deren korrespondierende Formen $F(X)$ im R_n singuläre Hyperflächen definieren. $A_2 \subset A$ sei die Hyperebene mit der Gleichung $a_0 = 0$. A wird durch $A_1 \cup A_2$ nicht zerlegt.

3.2. Zu jedem — durch $a_0 = 1$ normierten — $F \in A - (A_1 \cup A_2)$ definieren wir eine Umgebung $U(F)$:

$$U(F) =: \{F + G \mid F + G \in A - (A_1 \cup A_2), G \in A_2, \|G\|^2 < \psi\}.$$

Die positive reelle Zahl ψ kann so klein gewählt werden, daß $G(X)$ die Eigenschaft (E_2) erfüllt. $F(X) + G(X)$ erfüllt (E_1). Daher entspricht jedem Punkt aus $U(F)$ eine spaHr aus $U(V)$, wenn $V \subset R_n$ die dem Punkt $F \in A$ entsprechende spaHr ist.

3.3. Es seien nun V und W zwei verschiedene spaHr des R_n und $F_V(X)$ und $F_W(X)$ ihre definierenden Formen. Das Koordinatensystem kann so gewählt werden, daß $F_V(X) = x_0^r + \cdots$ und $F_W(X) = x_0^r + \cdots$ wird. Die entsprechenden Punkte F_V und F_W liegen dann in $A - (A_1 \cup A_2)$.

3.4. Es sei M eine abgeschlossene und beschränkte Punktmenge, $M \subset A - (A_1 \cup A_2)$, $M \ni F_V$, $M \ni F_W$. In M denken wir uns einen stetigen Weg C von F_V nach F_W. Dem Überdeckungssatz von HEINE-BOREL [3] zufolge kann M und daher auch C durch endlich viele $U(F_i)$ überdeckt werden. Es sei $U(F_1), \ldots, U(F_k)$ eine solche Überdeckung von C mit $F_1 = F_V$ und $F_k = F_W$. Die Numerierung sei so, daß $U(F_i) \cap U(F_{i+1}) \cap C$ nicht leer ist, $i \in \{1, \ldots, k-1\}$.

3.5. Es sei nun F_i^+ ein Punkt von C und $F_i^+ \in U(Fi) \cap U(F_{i+1})$. Für die Hyperflächen V_i, V_{i+1}, V_i^+ des R_n mit den definierenden Formen $F_i(X)$, $F_{i+1}(X)$, $F_i^+(X)$ gilt dann:

$$V_i \text{ ist homöomorph zu } V_i^+ \subset U(V_i)$$

und

$$V_{i+1} \text{ ist homöomorph zu } V_i^+ \subset U(V_{i+1}).$$

Damit ist (B) gezeigt.

4. Die Homöomorphie zwischen V_i und V_{i+1} und weiter die zwischen V und W ist danach offensichtlich.

LITERATUR

[1] ALEXANDROFF, P., und H. HOPF: Topologie. Berlin 1935.

[2] EHRESMANN, CH.: Sur les espaces fibrés differentiables. C. R. Acad. Sci. Paris *224* (1947), 1611–1612.

[3] NAAS, J., und H. L. SCHMID: Mathematisches Wörterbuch, Berlin 1962.

Manuskripteingang: 10. 9. 1973

VERFASSER:

GÜNTHER SCHIEMANN, Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle–Wittenberg