Beiträge zur Algebra und Geometrie
4 (1975), 57–63

Über das Verhalten der Betti-Reihe eines lokalen Ringes bei monoidalen Transformationen

JÜRGEN DASSOW

J.-P. SERRE definierte die Betti-Reihe eines lokalen Ringes R durch

$$B(R) := \sum_{i=0}^{\infty} b_i Z^i, \quad b_i = \dim_{R/\mathfrak{m}} \operatorname{Tor}_i^R (R/\mathfrak{m}, R/\mathfrak{m}),$$

und T. H. GULLIKSEN zeigte

$$B(R) = \prod_{i=0}^{\infty} \frac{(1 + Z^{2i+1})^{\varepsilon_{2i}}}{(1 - Z^{2i+2})^{\varepsilon_{2i+2}}}$$

mit gewissen nichtnegativen ganzen Zahlen $\varepsilon_i(R)$.

In der vorliegenden Arbeit untersuchen wird das Verhalten von $B(R)$ bei Ringtransformationen der folgenden Art

$$R \to \bar{R} := R\left[\frac{a_1}{a_t}, \frac{a_2}{a_t}, \ldots, \frac{a_{t-1}}{a_t}\right] \quad (a_1, \ldots, a_t \text{ eine } R\text{-Folge}),$$

die eine algebraische Beschreibung der monoidalen Transformationen sind. Da sich reguläre Ringe und vollständige Durchschnittsringe durch ihre Betti-Reihe charakterisieren lassen, erhalten wir als Folgerungen Resultate ähnlich denen von D. G. NORTHCOTT [8] bzw. J. SALLY [10] und T. MATSUOKA [7] über das Verhalten dieser Ringtypen bei monoidalen Transformationen.

1. Das Verhalten der Einbettungsdimension

Um ständige Wiederholungen zu vermeiden, wollen wir zunächst einige Bezeichnungen einführen, die wir während der gesamten Arbeit verwenden vollen. Es sei immer R ein lokaler noetherscher Ring der Dimension $d \geqq 2$, $\mathfrak{m}$ sein Maximalideal, $k := R/\mathfrak{m}$ sein Restklassenkörper,
$a_1, \ldots, a_t$ eine R-Folge in R, $2 \leqq t \leqq d$,
$\bar{R} := R\left[\frac{a_1}{a_t}, \ldots, \frac{a_{t-1}}{a_t}\right]$,

$R^* := \bar{R}_{\mathfrak{m}\bar{R}}$, $\mathfrak{b}^* := \mathfrak{b}R^*$ für ein beliebiges Ideal $\mathfrak{b} \subseteq R$,
$R^{**} := \mathfrak{m}\bar{R}_{\bar{\bar{\mathfrak{m}}}}$, wobei $\bar{\bar{\mathfrak{m}}}$ ein Maximalideal aus $\bar{R}$ mit $\bar{\bar{\mathfrak{m}}} \cap R = \mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}^{**} := \bar{\bar{\mathfrak{m}}}R_{\bar{\bar{\mathfrak{m}}}}$,
$\nu(\mathfrak{b})$ bezeichne die Minimalzahl von Erzeugenden von $\mathfrak{b}$. Ferner setzen wir noch

$$\mu := l(\mathfrak{m}^2) - l(\mathfrak{m}^{2+}(a_1, \ldots, a_t)R)$$

$$\delta := \begin{cases} 0 & \text{für} \quad a_t \in \mathfrak{m}^{*2}, \\ 1 & \text{für} \quad a_t \notin \mathfrak{m}^{*2}. \end{cases}$$

Satz 1.1. (i) emdim $R^* =$ emdim $R - \mu + \delta \geqq$ emdim $R - t + 1$.
(ii) emdim $R^{**} \geqq$ emdim $R - \mu + \delta + t - 1$,
und die Bedingungen $a_t \in \mathfrak{m}^2$ und $\delta = 1$ implizieren die Gleichheit.

Beweis. (i) Es gilt

$$\begin{aligned} \text{emdim}\, R &= l(\mathfrak{m}^2) - l(\mathfrak{m}) \\ &= l(\mathfrak{m}^2) - l(\mathfrak{m}^2 + (a_1, \ldots, a_t)\, R) + l(\mathfrak{m}^2 + (a_1, \ldots, a_t)\, R) - l(\mathfrak{m}) \\ &= \mu + l(\mathfrak{m}^2 + (a_1, \ldots, a_t)\, R) - l(\mathfrak{m}). \end{aligned}$$

Unter Beachtung der aus [3], Satz 12, resultierenden Gleichheit

$$l(\mathfrak{m}^2 + (a_1, \ldots, a_t)\, R) = l(\mathfrak{m}^{*2} + (a_1, \ldots, a_t)\, R^*)$$

haben wir noch

$$\begin{aligned} \text{emdim}\, R^* &= l(\mathfrak{m}^{*2}) - l(\mathfrak{m}^{*2} + (a_1, \ldots, a_t)\, R^*) \\ &\quad + l(\mathfrak{m}^{*2} + (a_1, \ldots, a_t)\, R^*) - l(\mathfrak{m}^*) \\ &= l(\mathfrak{m}^{*2}) - l(\mathfrak{m}^{*2} + a_t R^*) \\ &\quad + l(\mathfrak{m}^2 + (a_1, \ldots, a_t)\, R) - l(\mathfrak{m}). \end{aligned}$$

Je nachdem, ob $a_t \in \mathfrak{m}^{*2}$ ist oder nicht, ist die Differenz der ersten beiden Längen 0 oder 1, und die Behauptung folgt durch Vergleich.

Um die Ungleichung zu beweisen, ist $t - 1 \geqq \mu - \delta$ zu zeigen. Bei $\mu \leqq t - 1$ ist alles klar. Es sei deshalb $\mu = t$. Man überzeugt sich leicht davon, daß dies damit gleichbedeutend ist, daß $a_1, \ldots, a_t$ Teil einer Minimalbasis von $\mathfrak{m}$ ist. Bei $\delta = 1$ haben wir nun $t - 1 = \mu - \delta$. Es sei daher $\delta = 0$, d. h. $a_t \in \mathfrak{m}^{*2}$. Nach dem Satz 2 aus [4] gilt daher mit

$$\tilde{R} := R[X_1, \ldots, X_{t-1}]_{\mathfrak{m}R[X_1, \ldots, X_{t-1}]}$$

die Beziehung

$$a_t \in \mathfrak{m}^2\tilde{R} + \sum_{i=1}^{t-1} (a_t X_i - a_i)\, \tilde{R},$$

also

$$a_t - \sum_{i=1}^{t-1} \alpha_i (a_t X_i - a_i) \in \mathfrak{m}^2\tilde{R} + \sum_{i=1}^{t-1} X_i \tilde{R}.$$

Anwendung des Homomorphismus von $\tilde{R}$ auf R mit dem Kern $(X_1, \ldots, X_{t-1})\, \tilde{R}$ liefert

$$a_t - \sum_{i=1}^{t-1} \bar{\alpha}_i a_i \in \mathfrak{m}^2.$$

Dies ist ein Widerspruch zur Minimalität des Basisteils.

(ii) Wegen $R^* \cong R^{**}{}_{\mathfrak{m}R^{**}}$ ist

$$\nu(\mathfrak{m}R^{**}) \geqq \operatorname{emdim} R - \mu + \delta.$$

Nun ist

$$R^{**}/\mathfrak{m}R^{**} \cong (\bar{R}/\mathfrak{m}\bar{R})_{\bar{\bar{\mathfrak{m}}}/\mathfrak{m}\bar{R}}.$$

Damit ist $R^{**}/\mathfrak{m}R^{**}$ nach dem Beweis von Satz 1 in [1] einer Lokalisierung des regulären Ringes $k[X_1, \ldots, X_{t-1}]$ nach einem Maximalideal isomorph. Das Maximalideal $\mathfrak{m}^{**}/\mathfrak{m}R^{**}$ von $R^{**}/\mathfrak{m}R^{**}$ wird also von einer $R^{**}/\mathfrak{m}R^{**}$-Folge erzeugt, und wir erhalten aus [5], Theorem,

$$\begin{aligned} \operatorname{emdim} R^{**} &= \nu(\mathfrak{m}^{**}) = \nu(\mathfrak{m}^{**}/\mathfrak{m}R^{**}) + \nu(\mathfrak{m}R^{**}) \\ &\geqq r - 1 + \operatorname{emdim} R - \mu + \delta. \end{aligned}$$

Um die Gleichheit unter den zusätzlichen Voraussetzungen zu zeigen, reicht es zu beweisen, daß in den Fällen

$$\nu(\mathfrak{m}R^{**}) = \operatorname{emdim} R - \mu + \delta$$

ist.
Es sei $R' := R/(a_1, \ldots, a_t)\, R$, $c_1', \ldots, c_n'$ eine Minimalbasis von $\mathfrak{m}' := \mathfrak{m}/(a_1, \ldots, a_t) R$. Es mögen nun $c_1, \ldots, c_n$ Urbilder davon in R und $a_1, \ldots, a_\mu$ die in $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ über $R/\mathfrak{m}$ linear unabhängigen Elemente unter $a_1, \ldots, a_t$ sein (es gibt davon genau μ Elemente). Dann bilden $a_1, \ldots, a_\mu, c_1, \ldots, c_n$ eine Minimalbasis von $\mathfrak{m}$. Also gilt emdim $R = n + \mu$. Gewiß ist dann

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}R^{**} &= (a_\mu, \ldots, a_1, c_1, \ldots, c_n)\, R^{**} \\ &= (a_t, c_1, \ldots, c_n)\, R^{**}, \end{aligned}$$

d. h.

$$\nu(\mathfrak{m}R^{**}) \leqq n + 1 = \operatorname{emdim} R - \mu + 1.$$

Ist nun $\delta = 1$, so folgt $\nu(\mathfrak{m}R^{**}) \leqq \operatorname{emdim} R - \mu + \delta$. Ist $a_t \in \mathfrak{m}^2$, so gilt auch $a_t \in (\mathfrak{m}R^{**})\, \mathfrak{m}^{**}$, und daher bilden bereits $c_1, \ldots, c_n$ eine Basis für $\mathfrak{m}R^{**}$, d. h., es gilt sogar $\nu(\mathfrak{m}R^{**}) \leqq n = \operatorname{emdim} R - \mu \leqq \operatorname{emdim} R - \mu + \delta$. Die entgegengesetzte Ungleichung besteht immer (vgl. Anfang des Beweises), so daß Satz 1.1 vollständig bewiesen ist.

Folgerung 1.2. *Es sei R ein Cohen-Macaulay-Ring. Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *R ist regulär, und es gilt*
(α) $\mu = t$
oder
(β) $\mu = t - 1$ *und* $a_t \in \mathfrak{m}^{*2}$.
(ii) *R^* ist regulär.*

Beweis. Aus Satz 1.1 und [2], Lemma 7, folgt die Behauptung durch Betrachtung der Differenz emdim R − dim R.

Folgerung 1.3. (i) *Gilt*
(α) $\mu = t$
oder
(β') $\mu = t - 1$ *und* $a_t \in \mathfrak{m}^2$,
so ist mit R jeder der Ringe R^{**} regulär.

(ii) *Ist einer der Ringe R^{**} regulär, so ist R regulär, und es gilt*

(α) $\quad \mu = t$

oder

(β) $\quad \mu = t - 1$ *und* $a_t \in \mathfrak{m}^{*2}$.

In [10] hat J. SALLY das letzte Resultat noch dahingehend verbessert, daß bei der Regularitätsforderung an alle $R^{**}(\beta)$ zu (β') verschärft werden kann.
Folgerung 1.2, (i) $\Rightarrow$ (ii), und Folgerung 1.3, (i), finden sich bereits bei D. G. NORTHCOTT [8] für den Fall (α).

2. Das Verhalten der Betti-Reihe

Da bekanntlich $b_1 = \varepsilon_0 = \operatorname{emdim} R$ gilt, haben wir durch die Betrachtungen im ersten Abschnitt das Verhalten einer Betti-Zahl bzw. einer Abweichung geklärt. In diesem Abschnitt untersuchen wir das Verhalten der gesamten Reihe. Die am Anfang vom ersten Teil gemachten Voraussetzungen bleiben bestehen.

Lemma 2.1. *Ist R ein Cohen-Macaulay-Ring und gilt $R^{**}/\mathfrak{m}^{**} \cong R/\mathfrak{m}$, so existieren Parametersysteme $u_1, \ldots, u_d$ bzw. $v_1, \ldots, v_d$ in R bzw. R^{**} mit*

$$v_i = u_i, \quad i = t+1, \ldots, d,$$
$$v_i v_d = u_i, \quad i = 1, \ldots, t-1,$$
$$v_t = u_t = a_t,$$
$$(a_1, \ldots, a_t)\, R = (u_1, \ldots, u_t)\, R$$

und

$$R/\mathfrak{q} \cong R^{**}/\mathfrak{q}^{**}$$

mit

$$\mathfrak{q} := (u_1, \ldots, u_d)\, R \quad \text{und} \quad \mathfrak{q}^{**} := (v_1, \ldots, v_d)\, R^{**}.$$

Beweis. Die ersten Aussagen sind [2], Satz 10, und wie man dem sortigen Beweis entnehmen kann, kann

$$\mathfrak{q} := (a_1, \ldots, a_t, a_{t+1}, \ldots, a_d)\, R,$$
$$\bar{\bar{\mathfrak{q}}} := \left(\frac{a_1}{a_t}, \ldots, \frac{a_{t-1}}{a_t}, a_t, \ldots, a_d\right) \bar{R}$$

und

$$\mathfrak{q}^{**} := \bar{\bar{\mathfrak{q}}} \bar{R}_{\bar{\bar{\mathfrak{m}}}} = \left(\frac{a_1}{a_t}, \ldots, \frac{a_{t-1}}{a_t}, a_t, \ldots, a_d\right) R^{**}$$

angenommen werden. Nun gilt

$$R^{**}/\mathfrak{q}^{**} \cong R_{\bar{\bar{\mathfrak{m}}}}/\bar{\bar{\mathfrak{q}}}\bar{R}_{\bar{\bar{\mathfrak{m}}}} \cong (\bar{R}/\bar{\bar{\mathfrak{q}}})_{\bar{\bar{\mathfrak{m}}}/\bar{\bar{\mathfrak{q}}}},$$

und durch Anwendung des zweiten Isomorphiesatzes auf $\bar{R}/\bar{\bar{\mathfrak{q}}}$ und $\bar{\bar{\mathfrak{m}}}/\bar{\bar{\mathfrak{q}}}$ bei Verwendung des Resultates von DAVIS [4], Proposition 2, bzw. des Homomorphismus $R[X_1, \ldots, X_{t-1}] =: \tilde{R} \to R$ ergibt sich

$$\begin{aligned} R^{**}/\mathfrak{q}^{**} &\cong (\tilde{R}/(a_1, \ldots, a_d, X_1, \ldots, X_{t-1})\, \tilde{R})_{\tilde{\mathfrak{m}}/(a_1, \ldots, a_d, X_1, \ldots, X_{t-1})\tilde{R}} \\ &\cong (R/(a_1, \ldots, a_d)\, R)_{\mathfrak{m}/(a_1, \ldots, a_d)R} \\ &\cong R/\mathfrak{q} \end{aligned}$$

($\tilde{\mathfrak{m}}$ ist dabei das Urbild von $\bar{\bar{\mathfrak{m}}}$ in $\tilde{R}$).

Satz 2.2. (i) *Es sei* $\bar{\mathfrak{p}}$ *ein Primideal aus* $\overline{R}$ *mit* $\bar{\mathfrak{p}} \cap R = \mathfrak{m}$. *Dann gilt*

$$\varepsilon_i(\overline{R}_{\bar{\mathfrak{p}}}) = \varepsilon_i(R) \quad \textit{für} \quad 2 \leqq i < \pi(R),$$

$$\varepsilon_i[\overline{R}_{\bar{\mathfrak{p}}}) \leqq \varepsilon_i(R) \quad \textit{für} \quad i \geqq \pi(R)$$

mit

$$\pi(R) = \begin{cases} 2p & \textit{für} \quad \operatorname{Char} R/\mathfrak{m} = p \neq 0, \\ \infty & \textit{für} \quad \operatorname{Char} R/\mathfrak{m} = 0. \end{cases}$$

Insbesondere gelten diese Aussagen also für alle Ringe R^{**} *und* R^*.
(ii) *Ist* R *ein Cohen-Macaulay-Ring und gilt* $R^{**}/\mathfrak{m}^{**} \cong R/\mathfrak{m}$, *so ist*

$$\varepsilon_i(R)^{**} = \varepsilon_i(R) \quad \textit{für} \quad i \geqq 2.$$

Beweis. (i) Es sei $R^{**} = \overline{R}_{\bar{\bar{\mathfrak{m}}}}$, $\tilde{\mathfrak{m}}$ das Urbild von $\bar{\bar{\mathfrak{m}}}$ in $\tilde{R} := R[X_1, \ldots, X_{t-1}]$ und $\tilde{\tilde{R}} := \tilde{R}_{\tilde{\mathfrak{m}}}$. Dann gilt nach [6], 3.3.1.,

$$\varepsilon_i\big(\tilde{\tilde{R}}\big) = \varepsilon_i(R) \quad \text{für} \quad 1 \leqq i < \pi(R),$$

$$\varepsilon_i\big(\tilde{\tilde{R}}\big) \leqq \varepsilon_i(R) \quad \text{für} \quad i \geqq \pi(R).$$

(Die Gleichheit für die kleinen i erhält man, indem man beim Beweis von [6], 3.3.1., statt der Injektion den nach [6], 3.2.3., bestehenden Isomorphismus verwendet.) Nun gilt $R^{**} = \tilde{\tilde{R}}/(a_t X_1 - a_1, \ldots, a_t X_{t-1} - a_{t-1})\,\tilde{\tilde{R}}$, und nach [7], Proposition 2, bilden die $a_t X_i - a_i$ eine $\tilde{\tilde{R}}$-Folge. Damit folgt die Behauptung aus [9], Theorem 3.

(ii) In [1] wurde bewiesen, daß auch R^{**} ein *Cohen-Macaulay*-Ring ist. Daher werden die Parameterideale $\mathfrak{q}^{**}$ und $\mathfrak{q}^*$ aus Lemma 2.1 von einer R^{**}- (bzw. R-)Folge erzeugt, und es gilt daher

$$\varepsilon_i(R^{**}) = \varepsilon_i(R^{**}/\mathfrak{q}^{**}) = \varepsilon_i(R/\mathfrak{q}) = \varepsilon_i(R)$$

für $i \geqq 2$ nach [9], Theorem 3, und Lemma 2.1.

Folgerung 2.3. *Folgende Aussagen sind gleichwertig:*

(i) *R ist ein vollständiger Durchschnitt.*
(ii) *Einer der Ringe $\overline{R}_{\bar{\mathfrak{p}}}$ mit $\bar{\mathfrak{p}} \cap R = \mathfrak{m}$ ist ein vollständiger Durchschnittsring.*
(iii) *Alle Ringe $\overline{R}_{\bar{\mathfrak{p}}}$ mit $\bar{\mathfrak{p}} \cap R = \mathfrak{m}$ sind vollständige Durchschnittsringe.*

Beweis. R ist genau dann ein vollständiger Durchschnittsring, wenn $\varepsilon_2(R) = 0$ ist.
(i) $\Rightarrow$ (iii) und (i) $\Rightarrow$ (ii) bewies bereits Matsuoka [7].

Aus Satz 2.2 ersieht man, daß in vielen Fällen

$$B\big(\overline{R}_{\bar{\mathfrak{p}}}\big) = B(R)\,\frac{(1+Z)^s}{(1-Z^2)^{s'}}$$

gilt. Wir wollen nun in einigen Fällen s und s' bestimmen.

Satz 2.4. (i) *Es sei R ein vollständiger Durchschnittsring. Dann gilt*

$$B(R^*) = \frac{B(R)}{(1+Z)^{\mu-\delta}\,(1-Z^2)^{t-1-\mu+\delta}}.$$

Ist außerdem $a_t \in \mathfrak{m}^2$ oder $\delta = 1$, so ist

$$B(R^{**}) = B(R)\left(\frac{1+Z}{1-Z^2}\right)^{t-1-\mu+\delta}.$$

(ii) *Ist R ein Cohen-Macaulay-Ring mit* emdim R — dim $R \leqq 2$ *und wird*

(α) $\mu = t$

oder

(β') $\mu = t - 1$ *und* $a_t \in \mathfrak{m}^2$

erfüllt, so gilt

$$B(R^*) = \frac{B(R)}{(1+Z)^{t-1}} \quad \textit{und} \quad B(R^{**}) = B(R).$$

(iii) *Ist R ein Cohen-Macaulay-Ring und gilt $\mu = t - k$ und $a_{t-k+i} \in \mathfrak{m}^2$ für $i = 1, 2, \ldots, k$, $k \geqq 0$, so ist für jeden Ring R^{**} mit $R^{**}/\mathfrak{m}^{**} \cong R/\mathfrak{m}$*

$$B(R^{**}) = \begin{cases} B(R) & \textit{für} \quad k = 0, \\ B(R)\left(\dfrac{1+Z}{1-Z^2}\right)^{k-1} & \textit{für} \quad k > 0. \end{cases}$$

Beweis. (i) Nach Folgerung 2.3 sind R^* und R^{**} auch vollständige Durchschnittsringe. Beachtet man nun noch, daß bei diesen Ringen $\varepsilon_0(R) =$ emdim R, $\varepsilon_1(R)$ = emdim R — dim R, $\varepsilon_i(R) = 0$ für $i \geqq 2$ gilt, so folgt die Aussage aus Satz 1.1 und [2], Lemma 7.

(ii) Ist R ein vollständiger Durchschnittsring, so resultiert die Behauptung aus (i). Es sei R also kein vollständiger Durchschnittsring. Dann gilt nach [11], Satz 9 und Satz 10,

$$B(R) = \frac{(1+Z)^{\operatorname{emdim} R}}{1 - \varepsilon_1(R)\, Z^2 - \big(\varepsilon_1(R) - 1\big)\, Z^3}$$

und

$$\varepsilon_1(R) = q(R) - 1 + \operatorname{emdim} R - \dim R,$$

wobei $q(R) = l(\mathfrak{q}) - l(\mathfrak{q} : \mathfrak{m})$, $\mathfrak{q}$ ein Parameterideal (für Cohen-Macaulay-Ringe ist $q(R)$ unabhängig von der Wahl des Parameterideals $\mathfrak{q}$).

Satz 1.1 liefert nun

$$\begin{aligned} \operatorname{emdim} R^{**} - \dim R^{**} &= \operatorname{emdim} R^* - \dim R^* \\ &= \operatorname{emdim} R - \dim R \leqq 2. \end{aligned}$$

Damit haben auch die Betti-Reihen von R^* und R^{**} die obige Form, und aus [7], Theorem 1, bzw. [3], Satz 13, folgt nun

$$\varepsilon_1(R^*) = \varepsilon_1(R^{**}) = \varepsilon_1(R).$$

Die Behauptung folgt nun sofort.

(iii) Man überzeugt sich leicht davon, daß wir die Minimalbasen von $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}^{**}$ wie folgt wählen können:

$$\mathfrak{m} = (u_1, \ldots, u_{t-k}, u_{t+1}, \ldots, u_d, b_{d-t+1}, \ldots, b_s)\, R,$$
$$\mathfrak{m}^{**} = (v_1, \ldots, v_{t-s}, v_{t+1}, \ldots, v_d, b_{d-t+1}, \ldots, b_s)\, R^{**}$$

mit den Parametersystemen $u_1, \ldots, u_d$ und $v_1, \ldots, v_d$ aus Lemma 2.1 und

$$\varepsilon = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad k = 0, \\ 1 & \text{für} \quad k > 0. \end{cases}$$

Für $k > 0$ ergibt sich damit durch mehrmalige Anwendung von [9], Theorem 3,

$$B(R/\mathfrak{q}) = \frac{B(R)}{(1 - Z^2)^k (1 + Z)^{d-k}}$$

und

$$B(R^{**}/\mathfrak{q}^{**}) = \frac{B(R^{**})}{(1 - Z^2)(1 + Z)^{d-1}}.$$

Wegen $R^{**}/\mathfrak{q}^{**} \cong R/\mathfrak{q}$ (Lemma 2.1) folgt die Behauptung durch Vergleich. Der Fall $k = 0$ wird entsprechend abgehandelt.

LITERATUR

[1] Burosch, G.: Über einen Satz von Zariski. Beiträge zur Algebra und Geometrie *1* (1971), 135–139.

[2] Burosch, G., und J. Dassow: Zwei Sätze über monoidale Transformationen. Math. Nachr. *52* (1971), 247–253.

[3] Dassow, J.: Normalität und Loewy-Invarianten bei monoidalen Transformationen. Math. Nachr. *53* (1972), 256–262.

[4] Davis, E. D.: Ideals of the principal class, R-sequences and a certain monoidal transformation. Pacific J. Math. *20* (1967), 197–205.

[5] Davis, E. D.: Regular sequences and minimal bases. Pacific J. Math. *36* (1971), 323–326.

[6] Gulliksen, T. H., und G. Levin: Homology of local rings. Queens papers in pure and appl. Math. *20* (1969).

[7] Matsuoka, T.: Some remarks on a certain transformation of Macaulay rings. J. Math. Kyoto Univ. *11* (1971), 301–309.

[8] Northcott, D. G.: On the algebraic foundations of the theory of local dilatations. Proc. London Math. Soc. (3) *6* (1956), 267–285.

[9] Sakuma, M., und H. Okuyama: On the Betti series of local rings. J. Math. Tokushuma Univ. *1* (1967), 1–10.

[10] Sally, J.: Regular overrings of regular local rings. Trans. Amer. Math. Soc. *171* (1972), 291 bis 300.

[11] Scheja, G.: Über die Betti-Zahlen lokaler Ringe. Math. Ann. *155* (1964), 155–172.

Manuskripteingang: 23. 4. 1973

VERFASSER:

Jürgen Dassow, Sektion Mathematik der Universität Rostock