

Werk

Titel: Henselsche Äquivalenz von Singularitäten

Autor: ROCZEN, M.

Jahr: 1975

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?301416052_0004|log11

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

Henselsche Äquivalenz von Singularitäten

MARKO ROCZEN

1. Einführung

Die Klassifikation von Singularitäten ist ein Problem, von dessen Lösung wir auch in recht einfachen Fällen noch ein Stück entfernt sind. Zur Motivierung unserer Untersuchung gehen wir von folgender Fragestellung aus: Durch die Nullstellen eines Polynoms in den Variablen X und Y werde eine analytisch irreduzible Kurve K der komplexen Ebene $\mathbb{C}^2$ definiert. Der Koordinatenursprung 0 sei ein Punkt unserer Kurve mit der Multiplizität n . Dann läßt sich K in einer Umgebung von 0 durch die n -te Wurzel aus einer der beiden Variablen lokal uniformisieren; man erhält die Puiseuxreihe von K , die bei geeigneter Normierung die Gestalt

$$K: \begin{cases} X = t^n, \\ Y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{k+n} \end{cases}$$

bekommt. Es tritt nun die Frage auf, ob eventuell die Kenntnis endlich vieler Koeffizienten dieser Reihenentwicklung schon ausreicht, um die Kurve K im betrachteten Punkt (bis auf lokale analytische Isomorphie) vollständig zu charakterisieren. Tatsächlich gilt der folgende

Satz. Es existiert eine natürliche Zahl v_0 mit folgender Eigenschaft: Ist K' eine zweite ebene Kurve mit einer entsprechenden Puiseuxreihenentwicklung und stimmen die Puiseuxreihen von K, K' bis zum Koeffizienten a_{v_0} überein, so sind K und K' lokal analytisch isomorph. Für die Zahl v_0 kann man die Bettizahl von K wählen.

Einen Beweis dieser Aussage findet man bei HIRONAKA [5], wobei es zweckmäßig ist, noch auf [10] zu verweisen.

Dieser Satz ist schon deshalb besonders schön, weil nach einem älteren Resultat von BRAUNER [2] die Kenntnis gewisser charakteristischer Koeffizienten der Puiseuxreihe von K ausreichend ist, die Kurve K bis auf lokale topologische Äquivalenz zu bestimmen. Einfache Beispiele zeigen aber, daß lokal homöomorphe Kurven noch nicht lokal analytisch isomorph zu sein brauchen.

Wir kommen nun zum Anliegen dieser Arbeit. Es besteht in der Untersuchung entsprechender Fragestellungen für beliebige Dimensionen und läßt sich hier etwa so formulieren: Wir betrachten eine Kategorie geometrischer Räume (etwa die Kate-

gorie der Schemata oder die Kategorie der analytischen Räume), und wir wählen ein Objekt X , versehen mit einer abgeschlossenen Einbettung (definiert durch die Idealgarbe J von $\mathcal{O}_X$), die den singulären Ort von X enthält. Wir fragen nun: Existiert eine natürliche Zahl ν_0 mit folgender Eigenschaft: Es sei (X', J') ein zweites derartiges Paar und $\nu \geq \nu_0$ eine natürliche Zahl, für die die durch J^ν bzw. J'^ν definierten Einbettungen von X bzw. X' isomorph sind („ ν “-Äquivalenz von X und X'); sind dann auch schon „Umgebungen“ (in einem geeigneten Sinne) von $V(J) \subseteq X$ und $V(J') \subseteq X'$ zueinander isomorph? Eine positive Antwort würde bedeuten, daß wir (ähnlich wie bei unserer anfänglich betrachteten ebenen Kurve) alle Mannigfaltigkeiten mit einem vorgegebenen Einbettungsindex ν_0 in gewissem Sinne „parametrisieren“ könnten. Unserer Fragestellung wurden bereits im analytischen Fall umfangreiche Untersuchungen durch GRAUERT [3] sowie HIRONAKA und ROSSI [6] gewidmet. Dabei wurden Äquivalenzsätze vom genannten Typ für isolierte Singularitäten bewiesen. Eine entsprechende Untersuchung für den Fall formaler Schemata stammt von HIRONAKA [5]. Die vorliegende Arbeit befaßt sich nun mit dem Problem der Äquivalenz beliebiger Singularitäten affiner Schemata. Hier ist es zunächst klar, daß die „Umgebungen“ im Sinne der Zariski-Topologie unserer Fragestellung in keiner Weise entsprechen. Wir müssen daher als „Ersatz“ die Etaltopologie verwenden. Die Techniken beim Beweis des Äquivalenzsatzes kommen einerseits aus der von KURKE [8] entwickelten Theorie der Henselschen Schemata und andererseits aus der von HIRONAKA geschaffenen Theorie der Auflösung von Singularitäten [7], sind also zunächst für Grundkörper der Charakteristik 0 anwendbar. Es wird dabei versucht, die für analytische Räume gewonnenen Ergebnisse aus [6] möglichst weitgehend auch für den Fall der Schemata zu verifizieren und zu verallgemeinern. Diese Annäherung wird durch die Henselschen Schemata vollzogen. Eines der großen offenen Probleme aus dieser Theorie ist die Frage, ob auch hier die Kohomologie quasikohärenter Modulgarben über einem affinen Schema trivial ist. Ihre positive Beantwortung würde zur Lösung des Äquivalenzproblems in seiner bestmöglichen Form führen. So jedoch unterwerfen wir die beiden betrachteten Schemata noch einer kohomologischen Bedingung (K) (vgl. 3.13.) und erhalten dann in 3.18., daß sich eine (ν)-Äquivalenz ($\nu \geq \nu_0(X)$) affiner Schemata (X, J) und (X', J') , die rein n -dimensionale Integritätsschemata sind und so, daß der singuläre Ort von X in $V(J)$ enthalten ist, zu einem Isomorphismus der Henselschen Abschließungen fortsetzen läßt. Anders gesagt: Es existieren strenge Etalumgebungen U von $V(J) \subseteq X$ und U' von $V(J') \subseteq X'$, die zueinander isomorph sind. Der Beweis dieser Aussage ist eine Ausführung des Programms, das ich in [11], § 7, vorgezeichnet habe. Einige Ergebnisse, die in [9] enthalten sind, werden als bekannt vorausgesetzt.

Die vorliegende Arbeit ist die Aufzeichnung eines Seminarvortrages, gehalten im Forschungsseminar der Universitäten Berlin—Halle—Leipzig—Rostock im Herbstsemester 1972. Meine Arbeit an dieser Fragestellung begann in einem Themenkollektiv unter Leitung von Herrn Prof. Dr. habil. H. KURKE, der mir durch zahlreiche Hinweise und durch sein anhaltendes Interesse die Behandlung dieser Problematik ermöglichte.

2. Etalumgebungen und Henselsche Schemata

An den Anfang unserer Untersuchung stellen wir einige bekannte Definitionen und Sätze, deren ausführliche Beweise etwa in [9] zu finden sind.

2.1. Definition. Der Schemamorphismus $f: X \rightarrow Y$ sei lokal von endlicher Darstellung. f heißt *etalisiert*, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist.

- (i) X ist lokal Y -isomorph zu einem offenen Unterschema von $\text{Spec } (A[T]/(f))_f$, $f \in A[T]$ normiert und $\text{Spec } A$ eine hinreichend kleine offene Teilmenge von Y .
- (ii) f ist flach, und die geometrischen Fasern von f sind diskret und reduziert.
- (iii) Das Schema X ist lokal Y -isomorph zu einem offenen Unterschema von $\text{Spec } A[T_1, \dots, T_n]/(f_1, \dots, f_n)$, wobei die f_i Polynome in den T_i sind, für die $\det(\partial f_i / \partial T_j)$ eine Einheit im Faktoring ist ($\text{Spec } A \subseteq Y$ eine hinreichend kleine offene Teilmenge).

Wir bemerken, daß nach (iii) für den universellen Differentialmodul eines Etalmorphismus f offenbar $\Omega_{X/Y} = 0$ gilt. Überdies sind Etalmorphismen stets offen, und schränken wir unsere Betrachtungen auf die Kategorie der Schemata ein, die über einem algebraisch abgeschlossenen Grundkörper k lokal von endlichem Typ sind, so sind die Bedingungen aus 2.1. noch äquivalent zu:

- (iv) In jedem Punkt $x \in X$ (genauer: jedem abgeschlossenen Punkt) ist der durch f induzierte Morphismus $\mathcal{O}_{\hat{Y}, f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{\hat{X}, x}$ der Kompletierungen ein Isomorphismus.

Ist die letzte Bedingung nur in einem Punkt von X richtig, so überträgt sie sich stets auf eine offene Umgebung.

Einen ganzen Etalmorphismus bezeichnen wir als Etalüberlagerung. Zur Veranschaulichung betrachten wir den Fall, in dem $k = \mathbb{C}$ der Grundkörper der komplexen Zahlen ist. In diesem Fall läßt sich auf natürliche Weise ein Funktor angeben, der jedem algebraischen Schema über $\mathbb{C}$ einen analytischen Raum zuordnet, der, Morphismus f gehe hierbei in $f^{\text{an}}: X^{\text{an}} \rightarrow Y^{\text{an}}$ über. Nun können wir in der Bedingung (iv) die Kompletierungen der lokalen Ringe durch die konvergenten Potenzreihenringe in den entsprechenden Punkten ersetzen und sehen, daß beim betrachteten Funktor $(\text{Sch})/\mathbb{C} \xrightarrow{(\cdot)^{\text{an}}} (\text{Analyt. Räume})$ die Etalmorphismen genau den lokalen Isomorphismen analytischer Räume entsprechen. Die Etalüberlagerungen eines Schemas Y entsprechen hierbei übrigens genau den endlichen topologischen Überlagerungen des analytischen Raumes Y^{an} (Riemannscher Existenzsatz).

2.2. Definition. $f: X \rightarrow Y$ sei Etalmorphismus. Dann heißt f *strenge Etalumgebung* des abgeschlossenen Unterschemas W von Y , wenn der durch f induzierte Morphismus $X \times_Y W \rightarrow W$ ein Isomorphismus ist.

Wir bemerken, daß 2.2. äquivalent ist zu der Bedingung: f induziert eine bijektive Abbildung der Punkte von $f^{-1}(V)$ und V . Es sei nun $U \rightarrow X = \text{Spec } A$ eine strenge Etalumgebung der abgeschlossenen Teilmenge V von X . Da die Klasse der Etalmorphismen universell ist, bilden die strengen Etalumgebungen von (X, V) ein gefiltertes projektives System. Die entsprechenden Koordinatenringe bilden ein induktives System, dessen Limes wir mit A_V^h bezeichnen. Es gilt sogar

$$A_V^h = \lim \text{ind } (B, \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A \text{ strenge Etalumgebung von } V).$$

Unser Ziel ist die Konstruktion eines geometrischen Raumes, der sich lokal als „Durchschnitt der strengen Etalumgebungen“ der abgeschlossenen Teilmengen affiner Schemata darstellen läßt. Die oben definierte Zuordnung $A \rightarrow A_V^h$ ist offensichtlich ein Funktor der Kategorie K in sich, die folgendermaßen definiert wird: Ihre Objekte sind Paare A_V , A ein Ring, $V \subseteq \text{Spec } A$ eine abgeschlossene Teilmenge. Ein Morphismus $A_V \rightarrow A_{V'}$ ist ein Ringhomomorphismus $f: A \rightarrow A'$, für den $\text{Spec } (f)(V') \subseteq V$ ist. Die Bildkategorie unseres Funktors bezeichnen wir mit H .

2.3. Satz. Der Funktor $h: K \rightarrow H$ hat folgende Eigenschaften:

- (i) Er ist linksadjungiert zum Inklusionsfunktor $H \rightarrow K$.
- (ii) A_V^h ist eine flache A -Algebra.
- (iii) J sei ein Ideal von A mit $V(J) = V$. Dann induziert der Adjunktionsmorphismus $A \rightarrow A_V^h$ einen Isomorphismus $A/J \cong A_V^h/JA_V^h$ ($V^h = V(JA_V^h)$).
Ist es klar, auf welche abgeschlossene Teilmenge V von $\text{Spec } A$ wir uns beziehen, so schreiben wir künftig einfach A^h anstelle von A_V^h . Wir bemerken noch, daß der Funktor h mit gefilterten induktiven Limites vertauschbar ist und daß für $A_V \in H$ der Adjunktionsmorphismus $A \rightarrow A^h$ ein Isomorphismus ist.

2.4. Definition/Satz. Ein Paar $A_V \in K$ heißt Henselscher Ring („ A ist Henselsch in V “), falls eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- (i) $A_V \in H$.
- (ii) Es sei J ein beliebiges Ideal von A mit $V(J) = V$. Dann ist J enthalten im Jacobsonradikal von A , und es gilt: Jedes normierte Polynom $f \in A[T]$ mit $f(0) \in J$, für das $f'(0)$ Einheit mod J ist, besitzt eine Nullstelle in J .
- (iii) J sei Ideal mit $V(J) = V$. Dann liegt J im Jacobsonradikal von A , und es gilt: Es seien $F_1, \dots, F_k \in A[T_1, \dots, T_n]$ Polynome und $n \geq k$. Ist nun $F_i(0, \dots, 0) \in J$ für $i = 1, \dots, k$ und $\det(\partial F_i / \partial T_j)_{i \leq k}$ an der Stelle $(0, \dots, 0)$ eine Einheit mod J , dann existiert ein n -Tupel $(t_1, \dots, t_n)$ von Elementen aus J , das eine gemeinsame Nullstelle der Polynome $F_1, \dots, F_k$ ist und das durch die Zusatzbedingung $t_{k+1}, \dots, t_n = 0$ eindeutig bestimmt ist.

Die Bedingung (iii) bezeichnen wir auch als „Satz über implizite Funktionen“. Für die Henselsche Abschließung eines Ringes führen wir noch folgende zweckmäßige Bezeichnungsweise ein: Es sei A Unterring von B und $M \subseteq B$ eine Teilmenge. Dann bezeichnen wir die Henselsche Abschließung des Ringes $A' = A[M]$ in dem von M in A' erzeugten Ideal mit $A\langle M \rangle$.

Für die Anwendung der Henselschen Ringe ist folgendes Ergebnis besonders wichtig (vgl. [8, 9]).

2.5. Satz. Es sei A eine endlich erzeugte $\mathbb{k}$ -Algebra ($\mathbb{k}$ ein Körper). Dann ist $A\langle M \rangle$ gleich der algebraischen Abschließung des Ringes $A[M]$ in seiner Kompletterung $A[[M]]$, falls M eine endliche Menge ist.

Ist also z. B. A selbst ein Körper, so ist die Henselsche Abschließung des Polynomringes über A genau der Ring der algebraischen Potenzreihen über A . Ganz allgemein können wir nun in 2.4.(iii) den Ring $A[T_1, \dots, T_n]$ durch $A\langle T_1, \dots, T_n \rangle$ ersetzen und nennen diese Aussage dann den „Satz über implizite Funktionen für algebraische Potenzreihen“.

Wir betrachten nun das affine Schema $X = \text{Spec } A$. Wir wollen auch ihm eine Henselsche Abschließung X_V^h zuordnen. Diese definieren wir als den geometrischen (d. h. lokal geringten) Raum, dessen zugrunde liegender topologischer Raum V ist und dessen Strukturgarbe $\mathcal{O}$ wir so erklären: Die offenen Mengen $D^h(f) =: D(f) \cap V$ ($f \in A$) bilden eine Basis der Topologie in V . Wir definieren daher $\mathcal{O}(D^h(f))$ als die Henselsche Abschließung des Ringes A_f in $D^h(f)$. Den so entstandenen geometrischen Raum bezeichnen wir mit $\text{Henspec } A_V$. Es sei noch bemerkt, daß man in Analogie zum Fall gewöhnlicher affiner Schemata jedem A -Modul M eine quasikohärente Modulgarbe auf $\text{Henspec } A_V$ zuordnen kann, die wir mit $M^{\sim h}$ bezeichnen. Ist $A_V \in H$, so ist dies ein voller und treuer Funktor von $\text{mod } A$ in die Kategorie der

quasikohärenten Modulgarben über $\text{Henspec } A_V$, der zum Funktor der globalen Schnitte linksadjungiert ist.

2.6. Definition. *Ein Henselsches Schema ist ein geometrischer Raum, in dem jeder Punkt eine offene Umgebung hat, die zu einem geometrischen Raum vom Typ $\text{Henspec } A_V$ („affines Henselsches Schema“) isomorph ist.*

Die volle Unterkategorie der Kategorie der geometrischen Räume, deren Objekte die Henselschen Schemata sind, bezeichnen wir als „Kategorie der Henselschen Schemata“ (HSch). Ist X ein beliebiges Schema, V eine abgeschlossene Teilmenge, so können wir diesem Paar auf offensichtliche Weise ein Henselsches Schema X_V^h zuordnen, und diese Zuordnung ist funktoriell. Es sei nun $Z \in (\text{HSch})$, N_Z die Idealgarbe von $\mathcal{O}_Z$, die aus den in keinem Punkt umkehrbaren Elementen besteht. Ist etwa $Z = X_V^h$ und J eine Idealgarbe von $\mathcal{O}_X$, die V definiert, so wird N_Z gerade das Radikal der Idealgarbe $J\mathcal{O}_Z$. Völlig erwartungsgemäß gilt auch die Adjungiertheitsbeziehung

$$\text{Hom}_{(\text{HSch})}(Y, \text{Henspec } A_V) \cong \text{Hom}_H(A_V, \mathcal{O}_Y(Y)_{N_Y(Y)}).$$

Wir wollen nun etwas den geometrischen Hintergrund der Konstruktion der Henselschen Schemata beleuchten. Zunächst kann man aus der Konstruktion der Henselschen Abschließung leicht folgern:

2.7. Bemerkung. *Es sei $U \xrightarrow{f} X$ eine strenge Etalumgebung der abgeschlossenen Teilmenge V des Schemas X . Dann ist der Morphismus $f^h: U_{f^{-1}(V)}^h \rightarrow X_V^h$ ein Isomorphismus.*

Aussagen über Henselsche Schemata sind also Aussagen über hinreichend feine strenge Etalumgebungen abgeschlossener Teilmengen gewöhnlicher Schemata; geht man von einer beliebigen strengen Etalumgebung aus, so erhält man durch Anwendung des Funktors $(\cdot)^h$ stets wieder das ursprüngliche Henselsche Schema. Wir wollen diese Hinweise etwas präzisieren.

2.8. Definition. *Wir fixieren eine Indexmenge I und erklären die Kategorie C_I der strengen Etalüberdeckungen (in Abwandlung unserer bisherigen Sprechweise) durch folgende Vereinbarungen:*

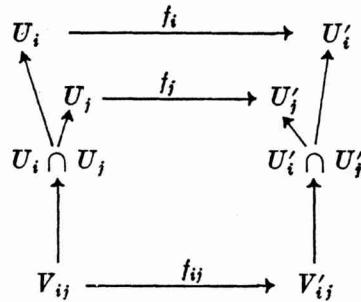
(i) *Objekte von C_I sind die Tripel $((U_i)_I, X, V)$, wobei X ein Schema, V eine abgeschlossene Teilmenge von X und $(U_i)_I$ eine Menge etalierter X -Schemata $p_i: U_i \rightarrow X$ ist, so daß $V \subseteq \bigcup_I p_i(U_i)$ und $U_i \rightarrow p_i(U_i)$ strenge Etalumgebung von $p_i(U_i) \cap V$ ist.*

Für diesen Sachverhalt schreiben wir auch: „ $(U_i)_I \rightarrow X$ ist eine strenge Etalüberdeckung von (X, V) “.

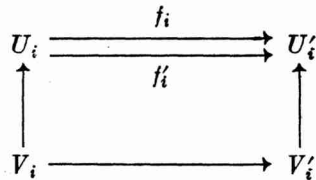
(ii) *Ein Morphismus $F: ((U_i)_I, X, V) \rightarrow ((U'_i)_I, X', V')$ ist eine Äquivalenzklasse $F = \text{cls}(f_i)_I$,*

$$(f_i) \in \times_I \text{Hom}_{(\text{Sch})}(U_i, U'_i),$$

so daß strenge Etalumgebungen (im alten Sinne) $V_{ij} \rightarrow U_i \cap U_j$ bezüglich V und $V'_{ij} \rightarrow U'_i \cap U'_j$ bezüglich V' sowie Morphismen $f_{ij}: V_{ij} \rightarrow V'_{ij}$ existieren, für die alle Diagramme



kommutativ sind. Unter dem „Durchschnitt“ ist hierbei natürlich stets das Faserprodukt über dem entsprechenden Grundschema zu verstehen. Die Äquivalenzklassen definieren wir so: $(f_i)_I$ und $(f'_i)_I$ heißen äquivalent, falls strenge Etalumgebungen (im alten Sinne) $V_i \rightarrow U_i$ bezüglich V und $V'_i \rightarrow U'_i$ bezüglich V' existieren zusammen mit Morphismen $V_i \rightarrow V'_i$, so daß die Diagramme

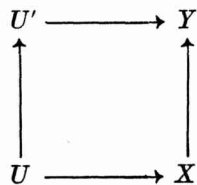


kommutativ sind.

(iii) Es wird vereinbart, daß Objekte, die durch Permutation der Indizes bzw. durch Mehrfachindizierung auseinander hervorgehen, als gleich angesehen werden.

Unser besonderes Interesse gilt der Kategorie der Schemata, die über einem festen algebraisch abgeschlossenen Grundkörper $\mathbb{k}$ von endlichem Typ und separiert sind. Wenn auch für einige der nächsten Folgerungen diese Voraussetzungen nicht alle erfüllt zu sein brauchen, so wollen wir sie doch stets als gegeben hinnehmen. Zunächst bilden die Etalüberdeckungen von (X, V) offenbar eine Halbordnung, und es gilt

2.9. Bemerkung. Es sei $X \rightarrow Y$ eine abgeschlossene Einbettung, W eine abgeschlossene Teilmenge von Y und $V = X \cap W$. Dann ist jede strenge Etalumgebung $U \rightarrow X$ von (X, V) nach eventueller Verfeinerung darstellbar als Durchschnitt einer strengen Etalumgebung $U' \rightarrow Y$ von (Y, W) mit X , d. h., wir haben ein universelles Diagramm



Beweis. Das Problem ist lokal, d. h. o.B.d.A. $Y = \text{Spec } A$, $X = \text{Spec } A/K$, K Ideal in A . Nun gilt

$$(A/K)_V^h \cong A^h/KA^h \cong \lim \text{ind } A_i/K \quad (\lim \text{ind } A_i) \cong \lim \text{ind } A_i/KA_i,$$

wobei der induktive Limes hierbei über alle strengen affinen Etalumgebungen $\text{Spec } A_i \rightarrow \text{Spec } A$ von (Y, W) gebildet wird. Daher ist X_V^h schon Durchschnitt derjenigen strengen Etalumgebungen von (X, V) , die durch solche von (Y, W) induziert werden, q.e.d.

Aus der Konstruktion der Kategorie der strengen Etalüberdeckungen ergibt sich auch leicht

2.10. Bemerkung.

(i) Der Funktor $h: C \rightarrow (\text{HSch})$

$$((U_i), X, V) \mapsto X_V^h$$

ist eine treue Einbettung.

(ii) Ist $f: X_V^h \rightarrow X_V'^h$ ein Morphismus, so existieren strenge Etalumgebungen $U \rightarrow X$ von (X, V) und $U' \rightarrow X'$ von (X', V') sowie ein Morphismus $F: U \rightarrow U'$, so daß $F^h = f$ ist.

(iii) Es sei f Isomorphismus (Bezeichnungen aus (ii)). Dann existiert sogar ein solcher Morphismus $F = \text{cls}(f_i)$, daß alle f_i Isomorphismen sind.

Wir beweisen etwa (ii) und (iii): Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $X = \text{Spec } A$, $X' = \text{Spec } A'$, $s: A'^h \rightarrow A^h$ der Ringhomomorphismus mit $\text{Henspec } s = f$. Es sei B' eine A' -Algebra, die einer strengen Etalumgebung entspricht. B' ist nun homomorphes Bild von $k[X]$ (Polynomring in n Unbestimmten, n geeignet), und es gibt ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 A^h & \xleftarrow{s} & A'^h \\
 \uparrow & \nearrow p & \uparrow \\
 B & \xleftarrow{t} & B' \\
 & \searrow & \uparrow j \\
 & & k[X]
 \end{array}$$

Es sei nun $J = (j_1, \dots, j_k) = \ker j$. Dann ist offenbar $p(J) = 0$. Nun ist A^h induktiver Limes aller strengen Etalumgebungen von A_V ; daher existiert eine strenge Etalumgebung B , in der alle $p(X_i)$ enthalten sind, und nach weiterer Verfeinerung können wir sogar voraussetzen, daß in B sogar die k Relationen $p(j_l) = 0$ ($l = 1, \dots, k$) erfüllt sind. Daher erhalten wir eine Fortsetzung zu einem Morphismus $t: B' \rightarrow B$, für den dann offenbar $t^h = s$ gilt. Ist nun s Isomorphismus, so ist t nach 2.1. (iv) etaliert, daher $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A'$ eine strenge Etalumgebung von (X', V') , q.e.d.

3. Ein Äquivalenzsatz für die Singularitäten affiner Schemata

Die folgenden Untersuchungen haben das Ziel festzustellen, ob Singularitäten affiner Schemata, die bis auf die ν -ten Potenzen ihrer definierenden Ideale (ν eine hinreichend große natürliche Zahl) übereinstimmen, bereits als Henselsche Schemata isomorph

sind. Hierbei spielen die von HIRONAKA [7] sowie HIRONAKA und ROSSI [6] entwickelten Techniken eine große Rolle. Die Grundlinie unserer Untersuchung entspricht ganz der bekannten Methode, die Singularitäten aufzulösen und zwischen den Aufblasungen einen Isomorphismus zu konstruieren, der sich dann auf die Ausgangsschemata überträgt. Die Schwierigkeit besteht jedoch darin, daß man im singularitätenfreien Fall zwar sehr leicht lokale Isomorphismen angeben kann, die aufgeblasenen affinen Schemata aber nicht mehr affin sind. Es treten also automatisch kohomologische Probleme auf, die uns die meisten Sorgen bereiten werden. Zunächst sollen einige Resultate zusammengestellt werden, deren ausführliche Beweise in [11] bzw. [9] zu finden sind.

3.1. Definition/Satz. *Es sei X ein Henselsches Schema, J eine Idealgarbe von $\mathcal{O}_X$. In der Kategorie der geometrischen Räume gibt es einen auf natürliche Weise definierten Morphismus $Y = (\text{Supp } \mathcal{O}_X/J, \mathcal{O}_X/J) \rightarrow X$. Dann ist Y Henselsches Schema, und wir nennen solche Morphismen abgeschlossene Einbettungen Henselscher Schemata. Diese bilden eine universelle und multiplikativ abgeschlossene Klasse von Monomorphismen in (HSch).*

Wir wollen künftig das abgeschlossene Unterschema (bzw. Henselsche Unterschema) von X , das durch die Idealgarbe J definiert ist, einfach mit X/J bezeichnen. Ist etwa X Henselsches Schema, so können wir das abgeschlossene Henselsche Unterschema X/N_X bilden, das stets ein Schema ist. Ist X Henselsche Abschließung eines Schemas Y , $X = Y_W^h$, so ist X/N_X gerade das reduzierte abgeschlossene Unterschema von Y , das zur Punktmenge W gehört. Ist L eine Idealgarbe von $\mathcal{O}_X$, deren Radikal N_X ist, so wollen wir (X, L) als Henselsches Paar bezeichnen.

3.2. Definition. *Zwei Henselsche Paare (X, L) und (X', L') heißen (v) -äquivalent, wenn $X/L' \cong X'/L'$ ist, $(X, L) \stackrel{(v)}{\sim} (X', L')$.*

3.3. Bemerkung. *Es sei $(X, N_X) \stackrel{(v)}{\sim} (X', N_{X'})$. Dann ist $(X, N_X) \stackrel{(\mu)}{\sim} (X', N_{X'})$ für $1 \leq \mu \leq v$.*

Einige elementare Kenntnisse über die Konstruktion der Aufblasungen (monoidalen Transformationen) in der Kategorie der Schemata wollen wir voraussetzen. Für Henselsche Schemata lassen sich Aufblasungen durch die entsprechende Universal-eigenschaft definieren, und in [11] wurde gezeigt, daß sie auch hier stets existieren und überdies die folgende Eigenschaft haben.

3.4. Bemerkung. *$f: X \rightarrow Y$ sei ein Morphismus in der Kategorie der Schemata und dort die Aufblasung der Idealgarbe K von $\mathcal{O}_Y$. Ist W abgeschlossene Teilmenge von Y und $V = f^{-1}W$, so ist der durch f induzierte Morphismus $f^h: X_V^h \rightarrow Y_W^h$ Aufblasungsmorphismus in (HSch) bezüglich der Idealgarbe $K|_{\mathcal{O}_{Y^h}}$.*

Für die weiteren Betrachtungen fixieren wir wieder einen Grundkörper $\mathbb{k}$ und setzen voraus, daß die betrachteten Schemata über ihm von endlichem Typ und separiert sind; die betrachteten Henselschen Schemata sollen der analogen Bedingung genügen.

Auf dem Henselschen Schema X läßt sich die kohärente Garbe $\Omega_{X/\mathbb{k}}$ der Differentialformen definieren. Ihre duale Garbe $\Theta_{X/\mathbb{k}}$ bezeichnen wir wie üblich als Garbe der Vektorfelder auf X . Die Garbe der Differentialformen hat die folgende nahegelegende Eigenschaft: Ist $j: X = Y_W^h \rightarrow Y$ der kanonische Morphismus, so ist $\Omega_{X/\mathbb{k}} = j^*\Omega_{Y/\mathbb{k}}$. Wichtige technische Vorzüge der Kategorie (HSch) sind die beiden folgenden Sätze, die für Schemata im allgemeinen falsch sind.

3.5. Satz. $f: X \rightarrow Y$ sei ein Morphismus Henselscher Schemata, der eine (v) -Äquivalenz von X und Y induziert. Dann ist f abgeschlossene Einbettung, falls $v \geq 2$ ist.

Dies bedeutet nichts weiter, als daß ein Morphismus $A \rightarrow B$ Henselscher Ringe (B Henselsch in $V(K)$), der surjektiv mod K^2 ist, schon selbst surjektiv ist.

3.6. Satz (lokale Fortsetzbarkeit). X, X' seien singularitätenfreie, rein n -dimensionale Henselsche Schemata, $K \subseteq N_X$ und $K' \subseteq N_{X'}$ zwei Idealgarben, für die ein Isomorphismus $f: X/K \xrightarrow{\sim} X'/K'$ existiert. Dann sind X und X' lokal isomorph, so daß f respektiert wird.

Dies gibt uns die Möglichkeit, jede (v) -Äquivalenz lokal zu einem Isomorphismus fortzusetzen. Die verwendete Bezeichnung „rein n -dimensional“ soll hier bedeuten, daß alle lokalen Ringe in den abgeschlossenen Punkten dieselbe Dimension n haben. Bei der Untersuchung isolierter Singularitäten sind für uns nur solche Henselschen Schemata von Interesse, die auf keiner offenen Teilmenge eine Schemastruktur besitzen. Diese Eigenschaft wollen wir als „Echtheit“ bezeichnen. Sprechen wir künftig von der Aufblasung eines Henselschen Schemas X , so meinen wir stets die Aufblasung in einer fest gewählten Idealgarbe L , so daß (X, L) Henselsches Paar ist.

3.7. Satz (Invarianzprinzip). Es sei X ein rein n -dimensionales Henselsches Schema, das echt und reduziert ist, $f: \tilde{X} \rightarrow X$ seine Aufblasung. Dann existiert ein Paar (v_0, μ_0) natürlicher Zahlen mit folgender Eigenschaft: $f: \tilde{X}' \rightarrow X'$ sei die Aufblasung eines rein n -dimensionalen Henselschen Schemas, das echt und reduziert ist. Für jede ganze Zahl $v \geq v_0$ induziert dann eine (v) -Äquivalenz von X und X' stets eine $(v - \mu)$ -Äquivalenz von X und X' für alle $\mu \geq \mu_0$ mit $v - \mu \geq 1$.

Dieser Satz ist das algebraische Analogon eines von HIRONAKA und ROSSI [6] bewiesenen Satzes für analytische Räume. Ein Beweis mit Mitteln der Henselschen Geometrie ist in [11] bzw. [9] gegeben. Dort wird auch gezeigt:

3.8. Satz. Es sei X ein singularitätenfreies, rein n -dimensionales Henselsches Schema, das exzeptionell ist (d. h. Aufblasung eines „Punktes“). Dann existiert eine natürliche Zahl v_0 , so daß man jede (v) -Äquivalenz von X und X' (X' rein n -dimensional) mit $v \geq v_0$ zu einer $(v + \mu)$ -Äquivalenz von X und X' erweitern kann für beliebige natürliche Zahlen μ .

Das bedeutet, wir können aus einer (v_0) -Äquivalenz von X und X' einen Isomorphismus der entsprechenden formalen Schemata gewinnen. Wir können nun unsere Untersuchung von Singularitäten in Angriff nehmen. Der einfachste Spezialfall des Äquivalenzsatzes ist der folgende

3.9. Satz. Wir betrachten hier nur Integritätsschemata. X sei eine algebraische Kurve mit der isolierten Singularität $x \in X$. Dann gibt es ein Paar (v_0, μ_0) natürlicher Zahlen mit folgender Eigenschaft: Es sei X' eine Kurve und $x' \in X'$ mit $(X, x) \stackrel{(v)}{\sim} (X', x')$, $v \geq v_0$. Dann existiert ein Isomorphismus $X_x^h \xrightarrow{\sim} X_{x'}^h$, der die gegebene Äquivalenz bis zur Ordnung $v - \mu_0$ respektiert.

In der Sprache der Schemata heißt dies: Es existieren (über einem algebraisch abgeschlossenen Grundkörper) strenge Etalumgebungen von $x \in X$ bzw. $x' \in X'$, die zueinander isomorph sind. Bevor wir den Satz beweisen, machen wir noch eine

3.10. Bemerkung. A sei Integritätsbereich von endlichem Typ über $\mathbb{k}$, J ein Ideal in A , für das $\text{Spec } A - V(V = V(J))$ ein normales Schema ist. Ist $\bar{A}$ die ganze Abschlie-

β ung von A (im Quotientenkörper), dann ist der Ringhomomorphismus $A_V^h \rightarrow \bar{A}_{V(J\bar{A})}^h$ injektiv, und es gibt eine natürliche Zahl ν mit $J^\nu \bar{A}^h \subseteq A^h$.

Beweis. Zunächst existiert eine Zahl ν mit $J^\nu \bar{A} \subseteq A$. Wir zeigen, daß sie die gewünschte Eigenschaft hat. Dazu betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & \bar{A} \\ \downarrow & & \downarrow \\ A^h & \xrightarrow{i^h} & \bar{A}^h \\ \downarrow & & \downarrow \\ A^\wedge & \xrightarrow{i^\wedge} & \bar{A}^\wedge \end{array}$$

in dem die Henselschen Abschließungen jeweils die algebraischen Abschließungen der entsprechenden Ringe in ihren Kompletierungen sind. Dabei ist $i^\wedge$ injektiv; denn konvergiert in $\bar{A}^\wedge$ eine Cauchyfolge von Elementen aus A gegen 0, so muß sie wegen $J^\nu \bar{A} \subseteq J^{\nu-\nu} A$ auch in $A^\wedge$ schon gegen 0 konvergieren. Nun ist auch i^h injektiv, und es bleibt zu zeigen, daß für $j \in J$ stets $j\bar{A}^h \subseteq A^h$ ist. Es sei $(f_t) \in \bar{A}^h$ eine Cauchyfolge. Dann ist $(jf_t) \in A^\wedge$ und genügt offenbar einer Gleichung mit Koeffizienten aus A , q.e.d.

Beweis von 3.9. Es sei $X = \text{Spec } A$, A ein Integritätsbereich, $\bar{A}$ seine ganze Abschließung und J der Führer von $\bar{A}$ in A . $\text{Spec } \bar{A}$ ist dann offenbar die Singularitätenauflösung von X ; sie ist gleich der Aufblasung von X in $J\mathcal{O}_X$. Wir wählen nun für (ν_0, μ_0) das in Satz 3.7. gefundene Zahlenpaar, bei dem der erste Bestandteil noch um die Zahl ν aus 3.10. vergrößert wurde, und setzen voraus, wir hätten einen Isomorphismus $A/J^\nu \cong A'/J'^\nu$ ($X' = \text{Spec } A'$), der unserer (ν) -Äquivalenz entspricht. Nach dem Invarianzprinzip 3.7. erhalten wir nun eine $(\nu - \mu_0)$ -Äquivalenz der Aufblasungen, die als Henselsche Schemata diskret und daher (nach der lokalen Fortsetzbarkeitseigenschaft 3.6.) isomorph sind. Dieser Isomorphismus sei durch $g: B \rightarrow \bar{A}^h$ gegeben (Henspec B Aufblasung von X'^h). Wir betrachten das bezüglich der $(\nu - \mu_0)$ -Äquivalenz kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A^h & \xrightarrow{(\nu - \mu_0)} & A'^h \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bar{A}^h & \xleftarrow{g} & B \end{array}$$

Wir konstruieren nun einen Morphismus $f: A'^h \rightarrow A^h$. Es sei $a \in A'^h$. Dann gibt es ein $a_1 \in A^h$ mit $g(a) - a_1 \in J^{\nu - \mu_0} \bar{A}^h$. Nach 3.10. ist also $g(a) - a_1 = a_2 \in A^h$. Wir definieren $f(a) = a_1 + a_2$. Der so erklärte Ringhomomorphismus f ist offenbar injektiv und nach 3.5. auch surjektiv, q.e.d.

Es ist nun unser Wunsch, diesen Satz auch für beliebige Dimensionen zu beweisen. Zur Auflösung der Singularitäten nach HIRONAKAS Theorie [7] müssen wir dabei

voraussetzen, daß der Grundkörper die Charakteristik 0 hat. Da die Aufblasungen nicht mehr affin sind, treten kohomologische Probleme auf, die nun untersucht werden.

3.11. *Bemerkung. Es sei (X, L) ein singularitätenfreies Henselsches Schema, K eine Idealgarbe von $\mathcal{O}_X$. Mit $\text{Aut}(\nu)$ bezeichnen wir die Garbe der Automorphismen von $\mathcal{O}_X/LK^{\nu+1}$, die mod LK^ν die Identität induzieren. Für $\nu \geq 2$ ist dann*

$$\text{Aut}(\nu) \cong \mathcal{O}_X \otimes L \otimes K^\nu/K^{\nu+1}.$$

Beweis. Der Morphismus

$$\text{Aut}(\nu) \rightarrow \text{Der}(\mathcal{O}_X, LK^\nu/LK^{\nu+1}),$$

der dem Automorphismus s die Derivation $d = s - \text{id}$ zuordnet, ist offenbar ein Isomorphismus, daher ist $\text{Aut}(\nu) \cong \mathcal{O}_X \otimes L \otimes K^\nu/K^{\nu+1}$.

3.12. *Lemma. Die Bezeichnungen von 3.11. werden beibehalten. Überdies sei $L \subseteq N_X^2$, und K definiere ein singularitätenfreies Unterschema der Kodimension 1, so daß $K \cdot L = K \cap L$ ist. Mit $\text{An}(1)$ bezeichnen wir die Automorphismen von KL/K^2L , die durch solche aus $\text{Aut}(1)$ induziert werden. Für die Garbe $\text{An}(1)$ gilt dann:*

(i) *Es gibt eine exakte Folge*

$$0 \rightarrow L \otimes K/K^2 \otimes \mathcal{O}_{X/K} \xrightarrow{\varphi} \text{Aut}(1) \xrightarrow{\psi} \text{An}(1) \rightarrow 1.$$

(ii) $\text{An}(1) \cong 1 + L(\mathcal{O}_X/K)$.

Beweis. φ definieren wir durch $\varphi(a) = \sigma_a$,

$$\sigma_a: \mathcal{O}_X/K^2L \rightarrow \mathcal{O}_X/K^2L,$$

$$f \mapsto f - adf;$$

der Homomorphismus σ_a ist Automorphismus, da offenbar σ_{-a} zu ihm invers ist. ψ wird nun auf offensichtliche Weise erklärt. Es bleibt zu zeigen, daß im $\varphi \supseteq \ker \psi$ ist: Es sei $\sigma \in \ker \psi$. Wir haben ein Element a aus $\text{Hom}(\Omega_{\mathcal{O}_X/K}, L \otimes K/K^2)$ zu definieren, für das $a(df) = f - \sigma(f)$ gilt, und dafür genügt es zu zeigen, daß gerade diese Zuordnung repräsentantenunabhängig ist. Dafür genügt uns eine lokale Betrachtung. In einem beliebigen Punkt gilt $\ker(d: \mathcal{O}_X \rightarrow \Omega_{X/K}) = K + \mathfrak{k}$ (als Gruppenhomomorphismus betrachtet). Wir haben uns daher nur davon zu überzeugen, daß für $f \in K/K^2L$ stets $\sigma(f) = f$ gilt. Da unser lokaler Ring aber faktoriell ist und $K \not\supseteq L$, erhält man dies durch leichte Rechnung. Wir beweisen nun (ii): Die Elemente von $\text{An}(1)$ sind offenbar $\mathcal{O}_X/K$ -Modulhomomorphismen. Es sei σ Schnitt von $\text{An}(1)$ über einer beliebigen offenen Menge, die nur hinreichend, klein gewählt ist. Dann ist $\sigma(a) = fa$ für alle $a \in KL/K^2L$, und die Funktion f ist mod K eindeutig bestimmt und definiert ein Element von $1 + L(\mathcal{O}_X/K)$. Das sieht man so: Es sei $K = (k)$, $L = (l)$. Aus $\sigma \in \text{Aut}(1)$ erhalten wir

$$\sigma(l) = l + qkl \mod k^2l,$$

$$\sigma(k) = k + q'kl \mod k^2l,$$

$$\sigma(kl) = fkl \mod k^2l,$$

woraus wegen $\sigma(kl) = \sigma(k) \cdot \sigma(l)$ leicht folgt, daß $kl = kl + q'kl^2 \bmod k^2l$ ist, d. h. $f = 1 + q'l \bmod k$. Wir erhalten so eine injektive Abbildung

$$\text{An } (1) \rightarrow 1 + L(\mathcal{O}_X/K),$$

von der wir nun zeigen, daß sie surjektiv ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $X = \text{Henspec } A^h$, $\text{Spec } A$ singularitätenfrei, und $\mathbb{f}[Z] \rightarrow A$ mit $Z = (Z_1, \dots, Z_n)$ Unbestimmten induziere einen Etalmorphismus. Nun ist $k = k(Z)$ algebraische Potenzreihe, und unter den $\partial k(Z)/\partial Z_i$ ist eine Einheit in A , sagen wir für $i = 1$. Es sei

$$G(T) = k(T, Z_2, \dots, Z_n) - f \cdot k(Z_1, \dots, Z_n), \quad f \in A,$$

ein fest gewählter Repräsentant eines Elementes aus $1 + L(\mathcal{O}_X/K)$. Wir sehen, daß aus der Lösbarkeit der Gleichung $G(T) = 0$ in A die Existenz eines Automorphismus von $\mathcal{O}_X/K^2L$ folgt, der mod KL gleich der Identität ist und bei obiger Abbildung in f übergeführt wird: denn ist $t \equiv Z_1 \bmod KL$ eine Lösung unserer Gleichung, dann kann man die Zuordnung $Z_1 \mapsto t, Z_i \mapsto Z_i$ ($i \geq 2$), nach weiterer Lokalisierung zu einem Isomorphismus $A \xrightarrow{\sim} A$ erweitern, der die Gleichheit mod KL respektiert (vgl. auch 3.6., lokale Fortsetzbarkeit). Es ist nun $G(Z_1) = k \cdot (1 - f) \in KL$ und $G_T(Z_1) = \partial k(Z)/\partial Z_1$ Einheit. Da A in L (und folglich auch in KL) Henselsch ist, können wir nach dem Satz über implizite Funktionen eine Nullstelle t von G in A finden, für die $t \equiv Z_1 \bmod KL$ gilt, q.e.d.

In Anlehnung an eine aus der Schematheorie bekannte Eigenschaft ampler invertierbarer Garben geben wir die folgende

3.13. Definition. X sei Henselsches Schema, L eine umkehrbare $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe. Dann heißt L *ampel*, wenn für alle kohärenten $\mathcal{O}_X$ -Modulgarben F eine natürliche Zahl n_0 existiert, so daß für alle $n \geq n_0$ stets $H^1(X, F \otimes_{\mathcal{O}_X} L^n) = 0$ ist.

3.14. Lemma. (X, L) sei singularitätenfreies Henselsches Schema, K, L invertierbare Idealgarben, so daß X/K singularitätenfrei und L ampel ist sowie $K \cdot L = K \cap L$. Es sei $\text{Aut}(\nu, \mu)$ die Garbe der Automorphismen von $\mathcal{O}_X/K^{\nu+1}L^\mu$, die mod $K^\nu L^\mu$ gleich der Identität sind. Dann existiert für alle ganzen Zahlen $\nu \geq 1$ eine Zahl μ_0 , so daß für $\mu \geq \mu_0$ stets

$$H^1(X, \text{Aut}(\nu, \mu)) = 0$$

ist.

Beweis. Ist $\nu \geq 2$, dann folgt die Behauptung unmittelbar aus 3.11., wenn wir dort L durch L^μ ersetzen. Wir nehmen daher $\nu = 1$ an. Nach 3.12. genügt es zu zeigen, daß $H^1(X, 1 + L^\mu(\mathcal{O}_X/K)) = 0$ ist für hinreichend große μ . Nun ist aber

$$1 \rightarrow 1 + L^\mu(\mathcal{O}_X/K) \rightarrow (\mathcal{O}_X/K)^* \rightarrow (\mathcal{O}_X/K + L^\mu)^* \rightarrow 1$$

exakt, denn es gilt $\ker(\mathcal{O}_X/K \rightarrow \mathcal{O}_X/K + L^\mu) = L^\mu(\mathcal{O}_X/K)$. Wir haben daher nur zu zeigen:

- (i) $H^0(X, (\mathcal{O}_X/K)^*) \rightarrow H^0(X, (\mathcal{O}_X/K + L^\mu)^*)$ ist surjektiv.
- (ii) $\text{Pic}(X/K) \rightarrow \text{Pic}(X/K + L^\mu)$ ist injektiv.

Zu (i) ist nur zu bemerken, daß $H^1(X, L^\mu(\mathcal{O}_X/K)) = 0$ für große μ und daher $H^0(X, \mathcal{O}_X/K) \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X/K + L^\mu)$ surjektiv ist. Wenn ein Element e des letzten Ringes Einheit ist, ist es Bild eines $a \in H^0(X, \mathcal{O}_X/K)$. Nun wird L^μ aber auf das Ja-

cobsonradikal dieses Ringes abgebildet, und daher ist auch a Einheit. Für den Beweis von (ii) setzen wir $X/K = Y$. Auf Y haben wir die exakte Folge

$$0 \rightarrow L^\mu/L^{\mu+1} \rightarrow (\mathcal{O}_Y/L^{\mu+1})^* \rightarrow (\mathcal{O}_Y/L^\mu)^* \rightarrow 1,$$

$$f \mapsto 1 + f.$$

Da $H^1(Y, L^\mu/L^{\mu+1}) = H^1(Y, L^\mu(\mathcal{O}_Y/L)) = 0$ ist für große μ , gilt dann $\text{Pic}(Y/L^{\mu+1}) \cong \text{Pic}(Y/L^\mu)$, daher $\text{Pic}(Y/L^{\mu+1}) \cong \text{Pic}(Y^\wedge)$, und wir haben nur zu zeigen, daß

$$\text{Pic}(Y) \rightarrow \text{Pic}(Y^\wedge),$$

$$F \mapsto F \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y^\wedge}$$

injektiv ist. Es sei $F^\wedge$ das Bild der umkehrbaren Garbe F bei dieser Abbildung und $F^\wedge \cong \mathcal{O}_{Y^\wedge}$. Dabei entspreche $s \in \Gamma(F^\wedge)$ dem Einsschnitt von $\mathcal{O}_{Y^\wedge}$. Da $\Gamma(F) \rightarrow \Gamma(F/L^\mu F)$ für große μ surjektiv ist, existiert ein $t \in \Gamma(F)$, das in $F/L^\mu F$ dasselbe Bild hat wie s . Nach dem Lemma von NAKAYAMA ist t nun erzeugendes Element von F , daher $F \cong \mathcal{O}_Y$, q.e.d.

Mit $\mathfrak{A}^m$ bezeichnen wir künftig den m -dimensionalen affinen Raum, mit $\mathfrak{P}^t$ den t -dimensionalen projektiven Raum über unserem Grundkörper. Die beiden folgenden Aussagen liefern die typischen Voraussetzungen für die von GRAUERT [3] sowie HIRONAKA und ROSSI [6] verwendete Methode der Normalenprojektion.

3.15. Lemma. $\text{Char } \mathfrak{k} = 0$, $X = \text{Spec } A$, $L = (f_0, \dots, f_t)$ ein Ideal von A und $\tilde{X} \rightarrow X$ die Aufblasung von X in L , $\tilde{X}$ singularitätenfrei. Dann existiert ein $g \in A$ und eine umkehrbare Idealgarbe K von $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$, so daß $g\mathcal{O}_{\tilde{X}} = K \cdot L$ ist und K ein singularitätenfreies Unterschema von X definiert. Überdies ist $\tilde{X}/K$ die Aufblasung von $W = \text{Spec } A/(g)$ in $L\mathcal{O}_W$.

Beweis. Es sei $g = a_0 f_0 + \dots + a_t f_t$, $a_i \in \mathfrak{k}$. Es ist $X = \bigcup D_+(f_i)$, und auf der offenen Menge $D_+(f_i)$ gilt $g = f_i \cdot k_i$, $k_i = g f_i^{-1}$ ein Schnitt auf $D_+(f_i)$. Die k_i definieren eine umkehrbare Idealgarbe K_a . Da das durch $g = g(a)$ gegebene lineare System keinen Basispunkt hat (die f_i erzeugen $L\mathcal{O}_{\tilde{X}}$) und X singularitätenfrei ist, existiert nach dem Satz von BERTINI ein $a \in \mathfrak{k}^{t+1}$, für das $\tilde{X}/K_a$ nichtsingulär ist. Der Rest der Behauptung ist trivial.

3.16. Lemma. $X = \text{Spec } A \hookrightarrow \mathfrak{A}^m$ sei abgeschlossene Einbettung, g eine Funktion auf $\mathfrak{A}^m$, so daß $V(g) \cap X$ alle singulären Punkte von X enthält. Dann existiert eine $m \times m$ -Matrix $A(y)$ mit Koeffizienten aus $\Gamma(\mathcal{O}_{\mathfrak{A}^m})$, so daß die linearen Teilräume

$$N_y = \{z \in \mathfrak{A}^m, z = y + A(y)t, t \in \mathfrak{k}_m\}$$

von $\mathfrak{A}^m$ ein Normalenfeld zu X in den Punkten $y \in X \cap D(g)$ bilden (d. h., für diese y ist N_y Komplementärraum zum Tangentialraum in y).

Beweis. Wir schreiben $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathfrak{A}^m}$, $\Omega = \Omega_{\mathfrak{A}^m}$ usw. Dem Morphismus

$$\Omega \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_X \rightarrow \Omega_X$$

entspricht die Injektion

$$\mathcal{O}_X \hookrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\Omega \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) = \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\Omega, \mathcal{O}) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_X = \mathcal{O}/X.$$

Wir bilden die exakte Folge

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}/X \xrightarrow{\pi} N \rightarrow 0, \quad (*)$$

aus der wir eine exakte Folge

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \operatorname{Hom}(N, \Theta_X) &\xrightarrow{p} \operatorname{Hom}(N, \Theta/X) \\ &\xrightarrow{q} \operatorname{Hom}(N, N) \rightarrow \operatorname{Ext}^1(N, \Theta_X) \end{aligned} \quad (**)$$

erhalten. Nun sind Θ_X sowie Θ/X auf $D(g)$ lokal trivial; daher ist $\operatorname{Ext}^1(N, \Theta_X) = 0$ auf $D(g)$, der Träger dieser Garbe liegt also in $V(g)$. Daher existiert eine natürliche Zahl s mit $g^s \cdot \operatorname{Ext}^1(N, \Theta_X) = 0$, d. h., es existiert ein $\eta \in q^{-1}(g^s \cdot \operatorname{id}_N)$. Wir definieren $\alpha: \Theta/X \rightarrow \Theta/X$ durch $\alpha = \eta \cdot \pi$. Die durch π induzierte Abbildung $\pi: \operatorname{im} \alpha \rightarrow N$ ist in den Punkten von $D(g)$ ein Isomorphismus (da $\pi\alpha = q(\eta)\pi = g^s\pi$ ist). Daher zerfällt (*) dort in der Form

$$0 \rightarrow \Theta_X \rightarrow \Theta_X \oplus \operatorname{im} \alpha \xrightarrow{\pi} N \rightarrow 0.$$

Da Θ frei ist, können wir α durch eine Matrix repräsentieren, die das gewünschte Normalenfeld liefert.

3.17. Projektionssatz. *Es sei $Y = \mathbb{A}^m \times \mathbb{P}^t$, V eine abgeschlossene Teilmenge von Y , $X \hookrightarrow Y$ ein singularitätenfreies, abgeschlossenes Unterschema, $g \in \Gamma(\mathcal{O}_Y)$, $V(g) \supseteq V$. Weiter sei X' ein singularitätenfreies Schema, für das $X'_V \hookrightarrow Y_V$ ein abgeschlossenes Henselsches Unterschema ist, so daß $X'_V/(g^v) = X_V/(g^v)$ für eine große Zahl $v = v(X)$ ist. Dann existieren eine affine strenge Etalüberdeckung (U_i) von (Y, V) und abgeschlossene Unterschemata $X'_i \hookrightarrow U_i$ mit $X'_{iV} = U_i \cap X'_V$ und $X \cap U_i/(g^v) = X'_i/(g^v)$. Es sei überdies*

$$N(y) = \{z \in \mathbb{A}^m \times \mathbb{P}^t, z = y + A(y)t, t \in \mathbb{k}^{m+t+1}\}$$

ein Normalenfeld zu X in den Punkten $y \in X \cap D(g)$.

Behauptung. (U_i) läßt sich so verfeinern, daß die Normale auf $X \cap U_i$ (bzw. deren Urbild in U_i) einen eindeutig bestimmten Schnittpunkt mit X'_i hat und die Schnittfunktion eindeutig bestimmte Morphismen $f_i: X \cap U_i \rightarrow X'_i$ liefert, die mod g^s gleich der Identität sind ($\sigma = \sigma(X)$ eine hinreichend große, fest vorgegebene ganze Zahl). Die f_i lassen sich dann offenbar zu einem Isomorphismus $X_V^h \xrightarrow{\sim} X'_V$ zusammenfügen ($\sigma \geq 2$).

Beweis. Das Problem ist lokal in den Punkten von $V \subseteq Y$. Durch eine lineare Koordinatentransformation in Y können wir erreichen, daß der betrachtete Punkt dem Ursprung 0 in $\operatorname{Spec} \mathbb{k}[Z_1, \dots, Z_n, W_1, \dots, W_k]$ entspricht ((Z, W) geradlinige Koordinaten auf Y); überdies können wir annehmen, daß X in einer Umgebung U von 0 vollständiger Durchschnitt ist und durch die k Gleichungen

$$u_1(Z, W) = 0, \dots, u_k(Z, W) = 0$$

definiert wird, so daß $\det(\partial u_i / \partial W_j)_0 \neq 0$ ist. Es gibt daher eindeutig bestimmte algebraische Potenzreihen $f_1(Z), \dots, f_k(Z)$ aus $\mathbb{k}\langle Z \rangle$ mit $u_i(Z, f(Z)) = 0$, und ist $A = \mathbb{k}[Z, W]/(u_1, \dots, u_k)$ der Koordinatenring von X , so ist offenbar

$$A \cong \mathbb{k}[Z_1, \dots, Z_n, f_1(Z), \dots, f_k(Z)].$$

Es sei f das Spalten- k -Tupel der f_i , $f = (\partial f_i / \partial Z_j)_{i,j}$ und $(\tilde{Z}, \tilde{W}) \in U$ ein Punkt von X . Der Tangentialraum zu X ist dann in diesem Punkt durch die Gleichung

$$W - \tilde{W} = f'(\tilde{Z})(Z - \tilde{Z})$$

gegeben. Es sei nun $V = k^{n+k}$ mit dem Ursprung $(\tilde{Z}, \tilde{W}) \notin V(g)$ und T und N Tangentialraum bzw. Normale zu X in $(\tilde{Z}, \tilde{W})$. Es ist $T \oplus N = V$, und

$$\left. \begin{aligned} Z^* &= Z - \tilde{Z}, \\ W^* &= W - \tilde{W} - f'(\tilde{Z}) \cdot Z^* \end{aligned} \right\} \quad (i)$$

ist offenbar eine Basis des dualen Raumes V^* . Nun ist $W^*: V \rightarrow \mathbb{A}^k$ eine lineare Abbildung mit dem Kern T , d. h. $W^*/N: N \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^k$, d. h., $W_1^*, \dots, W_k^*$ ist Basis von N^* , und wir können eine eindeutig bestimmte Matrix $B(\tilde{Z})$ finden, so daß

$$Z^* = -B(\tilde{Z}) \cdot W^* \quad \text{auf } N \quad (ii)$$

gilt. B ist eine rationale Funktion in den Elementen von $A(Z)$, die auf $D(g)$ definiert ist. (ii) liefert die Normalengleichung im Punkt $(\tilde{Z}, \tilde{W})$. Wir nehmen an, die Zahlen ν, σ seien so gewählt, daß für $\mu = \text{Minimum}(\nu - 1, \nu - \sigma, \sigma)$ die rationale Funktion

$$g^{\mu-1}B \text{ auf ganz } U \text{ definiert} \quad (iii)$$

ist. Wir wählen weiter Funktionen $v_i(Z, W)$, die auf X' verschwinden und für die $u_i \equiv v_i \pmod{g^\nu}$ ist. Dann ist $\det(\partial v_i / \partial W_j) \neq 0$ und $v(Z, f(Z)) \equiv 0 \pmod{g^\nu}$, d. h., in $A^h = A\langle g \rangle$ existieren eindeutig bestimmte Funktionen $h_1(Z), \dots, h_k(Z)$ mit $v(Z, h(Z)) = 0$; diese liefern uns das singularitätenfreie Schema X'_i . Dabei müssen wir gegebenenfalls annehmen, daß die h_i in einer noch kleineren strengen Etalumgebung U von $V(g) \subseteq Y$ definiert sind. Nun haben wir

$$\left. \begin{aligned} X &= V(W_1 - f_1(Z), \dots, W_k - f_k(Z)), \\ X' &= V(W_1 - h_1(Z), \dots, W_k - h_k(Z)), \end{aligned} \right\} \quad (iv)$$

und wenn wir von nun an mit $(\tilde{Z}, \tilde{W})$ die Koordinatenfunktionen auf X und mit (Z, W) dieselben Koordinatenfunktionen auf X' bezeichnen, so führt uns die Suche nach einem Schnittpunkt (Z, W) der Normalen auf X mit X' zum Gleichungssystem

$$\begin{aligned} Z^* + B(\tilde{Z}) \cdot W^* &= 0, \\ h(Z, W) &= 0 \end{aligned}$$

(vgl. (i), (ii)), und wir sind fertig, wenn wir nun zeigen können (vgl. (iv)):

$$\begin{aligned} (N) \quad G(\tilde{Z}, b) &= b + g^{-\sigma}(\tilde{Z}) B(\tilde{Z}) (h(Z) - f(\tilde{Z}) - f'(\tilde{Z}) (Z - \tilde{Z})) \\ &\text{mit } Z = \tilde{Z} + g^\sigma(\tilde{Z}) \cdot b \\ &\text{(dabei ist } G \in A^h\langle b \rangle, b = (b_1, \dots, b_n) \text{ Unbestimmte) hat eine Lösung} \\ &b(\tilde{Z}) \in A^h. \end{aligned}$$

Dann ist nämlich durch

$$\left. \begin{aligned} Z &\mapsto \tilde{Z} + g^\sigma(\tilde{Z}) \cdot b(\tilde{Z}), \\ W &\mapsto g(\tilde{Z} + g^\sigma(\tilde{Z}) \cdot b(\tilde{Z})), \end{aligned} \right\} X^h \rightarrow X'^h$$

der gesuchte Morphismus definiert. Wir beweisen also (N): Es sei $h(Z) - f(Z) = g^\nu(Z) \cdot a(Z)$. Es ist

$$\begin{aligned} h(Z) - f(\tilde{Z}) - f'(\tilde{Z}) (Z - \tilde{Z}) &= (h(\tilde{Z}) - f(\tilde{Z})) + (f(Z) - f(\tilde{Z}) - f'(\tilde{Z}) (Z - \tilde{Z})) \\ &\quad + (h(Z) - f(Z) - (h(\tilde{Z}) - f(\tilde{Z}))), \end{aligned}$$

daher

$$G(\tilde{Z}, b) = b + B(\tilde{Z}) (g^{v-\sigma}(\tilde{Z}) a(\tilde{Z}) + g^\sigma(\tilde{Z}) p(\tilde{Z}, b) + g^{v-1}(\tilde{Z}) q(\tilde{Z}, b))$$

mit

$$p(\tilde{Z}, b) = g^{-2\sigma}(\tilde{Z}) (f(Z) - f(\tilde{Z}) - f'(\tilde{Z}) (Z - \tilde{Z})),$$

$$q(\tilde{Z}, b) = g^{1-v-\sigma}(\tilde{Z}) (g^v(Z) a(Z) - g^v(\tilde{Z}) a(\tilde{Z})),$$

$$Z = \tilde{Z} + g^\sigma(Z) b.$$

Um den Satz über implizite Funktionen anwenden zu können, haben wir nur zu zeigen, daß

$$(1) \quad G(\tilde{Z}, 0) \equiv 0 \pmod{g},$$

$$(2) \quad \det (\partial G_i / \partial b_j)_{b=0} \text{ Einheit mod } g$$

ist. (1) ist klar. (2) ergibt sich, da wegen (iii)

$$(\partial G_i / \partial b_j)_{b=0} \equiv E_n \pmod{g}$$

ist, q.e.d.

Mit Hilfe von 3.17. können wir nun als Hauptresultat einen Äquivalenzsatz für die Singularitäten affiner Henselscher Schemata beweisen. Wir setzen für den Grundkörper dabei die Charakteristik 0 voraus und können so zu jedem affinen Schema X eine Idealgarbe J von $\mathcal{O}_X$ finden, deren Nullstellenmenge der singuläre Ort von X ist und deren Aufblasung $\tilde{X} \xrightarrow{f} X$ singularitätenfrei ist (vgl. [7]). Wir wissen nun, daß f eigentlich ist (vgl. [4]) und $L = J\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ relativ ampel bezüglich f , d. h., L erfüllt 3.13. Ob allerdings die entsprechende Aussage stets auch im Henselschen Sinne, d. h. für $L\mathcal{O}_Y$ ($Y = X_{v(L)}^h$) gilt, ist noch nicht bekannt. Wir wollen sagen, ein Paar (X, J) erfülle die Bedingung (K), falls die umkehrbare Idealgarbe $L\mathcal{O}_Y$ die Eigenschaft 3.13. hat. Der folgende Satz wird nun (zumindest in den höheren Dimensionen) von der Gültigkeit dieser Eigenschaft (K) für die beiden betrachteten affinen Schemata abhängen.

3.18. Äquivalenzsatz. *Es sei $\text{Char } k = 0$, (X, J) ein rein n -dimensionales affines Integritätsschema mit dem singulären Ort J , d. h., seine Aufblasung in J sei die Desingularisierung. Wenn (X, J) die Bedingung (K) erfüllt, existiert ein Paar (v_0, μ_0) natürlicher Zahlen mit folgender Eigenschaft:*

Es sei (X', J') ein affines, rein n -dimensionales Integritätsschema mit der Eigenschaft (K) und $(X, J) \stackrel{(v)}{\sim} (X', J')$ mit $v \geq v_0$. Dann ist

$$X_{v(J)}^h \xrightarrow{\sim} X_{v(J')}^h,$$

und dieser Isomorphismus respektiert die gegebene (v) -Äquivalenz bis zur Ordnung $v - \mu_0$.

Beweis. Wie im Beweis von 3.9. können wir uns wieder auf den Fall beschränken, daß X und X' normale Schemata sind. Nach dem Invarianzsatz 3.7. überträgt sich die gegebene (v) -Äquivalenz auf die Aufblasungen $\tilde{X}, \tilde{X}'$ von X bzw. X' mit den entsprechenden Idealgarben $L = J\mathcal{O}_{\tilde{X}}, L' = J'\mathcal{O}_{\tilde{X}'}$. Können wir nun einen Isomorphismus $X_{v(L)}^h \cong \tilde{X}_{v(L')}^h$ konstruieren, der die (v) -Äquivalenz in der gewünschten Weise respektiert, so ist auch $X_{v(J)}^h \cong X_{v(J')}^h$, da für den Aufblasungsmorphismus $f: \tilde{X} \rightarrow X$ die

Gleichung $f_*(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) = \mathcal{O}_X$ gilt (X ist normal!) und entsprechend $f'_*(\mathcal{O}_{\tilde{X}'}) = \mathcal{O}_{X'}$. Zu zeigen ist also nur:

(*) $(\tilde{X}, L) \stackrel{(\nu)}{\sim} (\tilde{X}', L')$ seien singularitätenfreie, rein n -dimensionale Schemata, die durch Aufblasung affiner Schemata entstehen und für die $L\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ bzw. $L'\mathcal{O}_{\tilde{X}'}$ ampel sind, $\nu \geq \nu_0(X)$. Dann sind $\tilde{X}_{V(L)}^h = Z$ und $\tilde{X}'_{V(L')}^h = Z'$ isomorph, und dieser Isomorphismus respektiert die gegebene (ν) -Äquivalenz.

Wir beweisen (*) durch Induktion nach n : Der Fall $n = 1$ ist trivial. Wir nehmen nun an, die Aussage sei für die Dimension $n - 1$ bereits bewiesen. Mit L, L' bezeichnen wir der Einfachheit halber auch die Idealgarben $L\mathcal{O}_Z$ bzw. $L'\mathcal{O}_{Z'}$. Wir können annehmen, daß eine (von nun an fest gewählte) abgeschlossene Einbettung $\tilde{X} \hookrightarrow Y = \mathbb{A}^m \times \mathbb{P}^t$ existiert und eine auf Y definierte Funktion g , so daß $g\mathcal{O}_X = KL$ ist, K umkehrbare Idealgarbe auf X , $\tilde{X}/K$ singularitätenfrei, und daß auf $\tilde{X}$ in den Punkten außerhalb $V(g)$ ein Normalenfeld existiert (vgl. 3.15., 3.16.). Wir können weiter annehmen, daß sich unsere (ν) -Äquivalenz für beliebige natürliche Zahlen zu einer $(\nu + \mu)$ -Äquivalenz erweitern läßt (vgl. 3.8.), d. h., o. B. d. A. ist ν so groß, daß $H^1(Z', L'^\nu) = 0$ ist (vgl. (K)). Dann können wir einen Schnitt $g' \in \Gamma(\mathcal{O}_{Z'})$ finden, der bei der (ν) -Äquivalenz in g übergeht. Es ist $g \in L$, d. h. $g' \in L'$, und daher $(g') = K'L'$, K' umkehrbare Idealgarbe von $\mathcal{O}_{Z'}$ und Z'/K' singularitätenfrei. Überdies ist $(X/K)^h \stackrel{(\nu-1)}{\sim} Z'/K'$, und Z/K ist rein $(n - 1)$ -dimensional und hat die Eigenschaft (K), d. h., nach Induktionsvoraussetzung können wir $Z/K \cong Z'/K'$ annehmen, und dieser Isomorphismus zusammen mit $Z/L^\nu \cong Z'/L'^\nu$ ergibt

$$Z/K + L^\nu \cong Z'/K' + L'^\nu.$$

Man zeigt leicht, daß dadurch ein eindeutig bestimmter Isomorphismus

$$h: Z/K \cap L^\nu \cong Z'/K' \cap L'^\nu$$

induziert wird, und es ist $K \cap L^\nu = KL^\nu$ (z. B. da L auf Z/K umkehrbar ist), $K' \cap L'^\nu = K'L'^\nu$. Wir behaupten nun:

(**) Für alle natürlichen Zahlen σ existieren Isomorphismen

$$h_\sigma: Z/K^\sigma L^\nu \xrightarrow{\sim} Z'/K'^\sigma L'^\nu,$$

die miteinander verträglich sind.

Beweis durch Induktion nach σ : Für $\sigma = 1$ ist nichts zu beweisen. Wir zeigen für $\sigma \geq 1$, daß h_σ sich auf eindeutige Weise zu $h_{\sigma+1}$ fortsetzen läßt. Für große ν ist nämlich $H^1(Z, \text{Aut}(\sigma, \nu)) = 0$ (vgl. 3.14.). Nach der lokalen Fortsetzbarkeitseigenschaft 3.6. existieren nun eine Überdeckung (U_i) von Z und Isomorphismen $g_i: U_i \xrightarrow{\sim} U_i' \subseteq Z'$, die mit h_σ verträglich sind. Nun ist

$$g_{ij} = g_i^{-1} \cdot g_j: U_i \cap U_j \xrightarrow{\sim} U_i \cap U_j,$$

und (g_{ij}) definiert einen Kozyklus von $\text{Aut}(\sigma, \nu)$. Wir können daher (nach eventueller Verfeinerung der Überdeckung (U_i)) annehmen, daß $(\bar{g}_{ij})$ trivial ist, d. h.

$$\bar{g}_{ij} = s_i \cdot s_j^{-1}, \quad s_i: U_i/K^{\sigma+1}L^\nu \xrightarrow{\sim} U_i/K^{\sigma+1}L'^\nu,$$

und daher $\bar{g}_{ij}s_j = \bar{g}_is_i$ auf $U_i \cap U_j$; die Morphismen

$$\bar{g}_is_i: U_i/K^{\sigma+1}L^\nu \xrightarrow{\sim} U_i'/K'^{\sigma+1}L'^\nu$$

lassen sich also zu einem Isomorphismus

$$Z/K^{\sigma+1}L^{\nu} \xrightarrow{\sim} Z'/K'^{\sigma+1}L'^{\nu}$$

verkleben, was zu zeigen war.

(**) liefert uns nun für beliebig große μ einen Isomorphismus

$$Z/(g^{\mu}) \cong Z'/(g'^{\mu}),$$

und wegen (K) können wir annehmen, daß dieser mit einer Einbettung $Z' \hookrightarrow Y^h$ verträglich ist. Auf diese Situation wenden wir nun den Projektionssatz 3.17. an und erhalten $Z \cong Z'$, q.e.d.

LITERATUR

- [1] ARTIN, M.: Algebraic Approximation of Structures over Complete Local Rings. Publ. Math. IHES No. 36 (1969).
- [2] BRAUNER, K.: Zur Geometrie der Funktionen zweier komplexer Veränderlicher. Abh. Math. Sem. Hamburg 6 (1928), 1–55.
- [3] GRAUERT, H.: Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen. Math. Ann. 146 (1962), 331–368.
- [4] GROTHENDIECK, A.: Éléments de géométrie algébrique. Publ. Math. IHES No. 4, 8, 11, 17, 20, 24, 28 (1960–1964).
- [5] HIRONAKA, H.: On the equivalence of singularities. I. Proceedings of the Conference of Arithmetic Algebraic Geometry, Harvard 1964.
- [6] HIRONAKA, H., and H. ROSSI: On the equivalence of imbeddings of exceptional complex spaces. Math. Ann. 156 (1964), 313–333.
- [7] HIRONAKA, H.: Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. Ann. Math. 79 (1964), 109–326.
- [8] KURKE, H.: Grundlagen der Theorie der Henselschen Ringe und Schemata und ihrer Anwendungen. Habilitationsschrift, Berlin 1969.
- [9] KURKE, H., G. PFISTER und M. ROCZEN: Henselsche Ringe und algebraische Geometrie. Berlin 1975.
- [10] MILNOR, J.: Singular points of complex hypersurfaces. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1968.
- [11] ROCZEN, M.: Henselsche Schemata und (ν) -Äquivalenz. Dissertation, Berlin 1971.
- [12] ZARISKI, O.: Algebraic Surfaces. Springer, Berlin 1935.

Manuskripteingang: 23. 4. 1973

VERFASSER:

MARKO ROCZEN, Sektion Mathematik der Humboldt-Universität Berlin