Beiträge zur Algebra und Geometrie
4 (1975), 23–27

Zwei Klassen algebraischer Varietäten 3. Ordnung und deren Homologiegruppen

Günther Schiemann

0. Einführung

Wir betrachten zwei Klassen k_1 und k_2 von irreduziblen projektiven algebraischen Varietäten[1]) V_d^3 der Ordnung 3 und beliebiger Dimension d.

k_1 enthalte alle und nur solche V_d^3, die nicht Hyperfläche eines projektiven Raumes R_{d+1} sind. — Nach [1], S. 213, liegt V_d^3 dann in einem R_{d+2}. Man könnte solche V_d^3 „gewunden" nennen.

k_2 enthalte alle und nur solche V_d^3, die Hyperfläche eines R_{d+1} sind und einen singulären R_{d-1} enthalten. — Dies sind gerade die nicht normalen kubischen Hyperflächen: jede von ihnen ist Projektion einer $V_d^3 \in k_1$.

Nach dem von Drechsler in [3] gezeigten Verfahren lassen sich die Homologiegruppen dieser Varietäten aus einem Vergleich gewisser Homologiesequenzen bestimmen.

Um dieses Verfahren hier anwenden zu können, müssen wir die V_d^3 aus k_1 bzw. k_2 birational auf einen R_d projizieren, und zwar die $V_d^3 \in k_2$ aus einer Tangente, die mit V_d^3 nur den (regulären) Berührungspunkt gemeinsam hat, und die $V_d^3 \in k_2$ aus einem Doppelpunkt.

Die Ausnahmeörter dieser birationalen Abbildung seien $A \subset V_d^3$ und $A' \subset R_d$. Wir finden, daß A und A' nur Komponenten erster und zweiter Ordnung haben. Die Homologiegruppen $H_i(A)$ und $H_i(A')$ sind also bekannt oder leicht zu bestimmen.

Wir schreiben nun die exakten Homologiesequenzen der Paare (V_d^3, A) und (R_d, A') auf:

$$\cdots \to H_i(A) \to H_i(V_d^3) \to H_i(V_d^3/A) \to \cdots, \tag{I}$$

$$\cdots \to H_i(A') \to H_i(R_d) \to H_i(R_d/A') \to \cdots. \tag{II}$$

Mit (II) lassen sich die $H_i(R_d/A')$ ermitteln. Damit sind in (I) die $H_i(V_d^3/A)$ bekannt wegen der Isomorphie $H_i(V_d^3/A) \simeq H_i(R_d/A')$. Mit (I) lassen sich dann die $H_i(V_d^3)$ bestimmen.

---

[1]) Irreduzible projektive algebraische Varietäten verstehen wir als Nullstellengebilde von Primidealen aus $K[x_0, \ldots, x_n]$. K ist der Körper der komplexen Zahlen.

1. Die drei Typen der $V_d^3 \in k_1$

Eine $V_d^3 \in k_1$ muß im Schnitt zweier quadratischer Kegel K_{d+1}^2, $K_{d+1}'^2$ des R_{d+2} liegen. Außer V_d^3 muß $K \cap K'$ noch einen R_d enthalten.
Wir wählen das Koordinatensystem so, daß R_d durch $x_0 = x_1 = 0$ gegeben ist. Damit erhalten wir zunächst für K und K' die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} K\colon\ 0 &= Q(x_0, x_1) + x_0 L_0(x_3, \ldots, x_{d+2}) + x_1 L_1(x_3, \ldots, x_{d+2}), \\ K'\colon 0 &= Q'(x_0, x_1) + x_0 L_0'(x_3, \ldots, x_{d+2}) + x_1 L_1'(x_3, \ldots, x_{d+2}). \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Hierin sind die Q quadratische, die L lineare Formen.

Fallunterscheidungen

1.1. Es sei zunächst Rang $(L_0, L_1, L_0', L_1') = 4$.
Wir dürfen annehmen:

$$L_0 \equiv x_3,\quad L_1 \equiv x_2,\quad L_0' \equiv x_5,\quad L_1' \equiv x_4.$$

Mit einer regulären projektiven Transformation lassen sich noch Q und Q' beseitigen; wir erhalten, indem wir für die neuen Koordinaten wieder x_i schreiben,

$$\begin{aligned} K\colon\ 0 &= x_0 x_3 - x_1 x_2, \\ K'\colon 0 &= x_0 x_5 - x_1 x_4. \end{aligned} \qquad (2)$$

Durch die zusätzliche Bedingung

$$0 = x_2 x_5 - x_3 x_4 \qquad (3)$$

wird R_d aus $K \cap K'$ eliminiert, und wir erhalten

$$V_d^3\colon\ 0 = x_0 x_3 - x_1 x_2 = x_0 x_5 - x_1 x_4 = x_2 x_5 - x_3 x_4. \qquad (4)$$

Für $d = 3$ ist dies eine singularitätenfreie Varietät im R_5. Das sieht man aus der Parameterdarstellung

$$(x_0, \ldots, x_5) = (u_0 v_0, u_0 v_1, u_1 v_0, u_1 v_1, u_2 v_0, u_2 v_1). \qquad (5)$$

Hierin sind (v_0, v_1) bzw. (u_0, u_1, u_2) projektive Punktkoordinaten einer Geraden bzw. einer Ebene. V_3^3 ist also homöomorph zu $R_1 \times R_2$. Wir wollen diese Varietät künftig mit C_3^3 bezeichnen.
Für beliebiges $d \geqq 3$ ist (4) ein Kegel

$$V_d^3 = C_3^3 R_{d-4} \subset R_{d+2}$$

mit der Basis C_3^3 und der Spitze R_{d-4}.[1])

1.2. Es sei Rang $(L_0, L_1, L_0', L_1') \leqq 3$.
Durch eine reguläre projektive Transformation läßt sich erreichen, daß in (1) nur die Koordinaten $x_0, \ldots, x_4$ bzw. $x_0, \ldots, x_3$ vorkommen.
Wenn dann in $K \cap K'$ überhaupt eine irreduzible gewundene V_d^3 liegt, kann dies nur sein die — bis auf projektive Äquivalenz einzige — kubische Normregelfläche $C_2^3 \subset R_4$

[1]) Wir definieren $C_j^3 R_{-1} =: C_j^3$.

oder die — ebenfalls bis auf projektive Äquivalenz einzige — kubische Normkurve $C_1^3 \subset R_3$ oder ein Kegel

$$V_d^3 = C_2^3 R_{d-3} \subset R_{d+2}, \quad d \geqq 2,^{1})$$

bzw.

$$V_d^3 = C_1^3 R_{d-2} \subset R_{d+2}, \quad d \geqq 1.^{1})$$

1.3. Die sämtlichen irreduziblen gewundenen V_d^3 sind also gegeben durch

$$V_d^3 = C_j^3 R_{d-j-1} \subset R_{d+2}, \quad j = 1, 2, 3, \quad d \geqq j.$$

Darin sind C_1^3 die kubische Normkurve des R_3, C_2^3 die kubische Normregelfläche des R_4, C_3^3 der kubische „Normraum" des R_5.

2. Die fünf Typen der $V_d^3 \in k_2$

Der singuläre R_{d-1} einer $V_d^3 \in k_2$ möge o. B. d. A. durch $x_0 = x_1 = 0$ gegeben sein. Die Gleichung der V_d^3 hat dann die Form

$$\begin{aligned} 0 = C(x_0, x_1) + x_0^2 L_{00}(x_2, \ldots, x_{d+1}) + x_0 x_1 L_{01}(x_2, \ldots, x_{d+1}) \\ + x_1^2 L_{11}(x_2, \ldots, x_{d+1}), \end{aligned}$$

worin C eine kubische und die L Linearformen sind.

Fallunterscheidungen

2.1. Es sei Rang $(L_{00}, L_{01}, L_{11}) = 3$.
Wir können setzen:

$$L_{00} \equiv x_2, \quad L_{01} \equiv x_3, \quad L_{11} \equiv x_4.$$

Durch eine reguläre projektive Transformation lassen wir noch die Form C in (6) verschwinden und erhalten, wenn wir wieder x_i für die neuen Koordinaten setzen,

$$0 = x_0^2 x_2 + x_0 x_1 x_3 + x_1^2 x_4. \tag{7}$$

Für $d = 3$ bezeichnen wir diese Hyperfläche mit F_3^3, sonst mit

$$V_d^3 = F_3^3 R_{d-4} \subset R_{d+1}, \qquad d \geqq 3.$$

2.2. Es sei Rang $(L_{00}, L_{01}, L_{11}) \leqq 2$.
Wir können erreichen, daß in (6) höchstens die Koordinaten $x_0, \ldots, x_3$ vorkommen. Wenn (6) irreduzibel ist, kann nur einer der wohlbekannten — bis auf projektive Äquivalenz einzigen — Fälle vorliegen[2]:

— die ebene Kubik F_1^3 mit gewöhnlichem Doppelpunkt,
— die ebene Kubik $'F_1^3$ mit Spitze,
— die Cayleysche Regelfläche $'F_2^3$ des R_3,
— die allgemeine kubische Regelfläche F_2^3 des R_3,

oder ein Kegel über einer von diesen.

---

[1]) Wir definieren $C_j^3 R_{-1} =: C_j^3$.
[2]) Vgl. etwa [2].

2.3. Die sämtlichen irreduziblen kubischen Hyperflächen V_d^3 mit singulärem R_{d-1} sind also gegeben durch

$$\begin{aligned}
V_d^3 &= F_1^3 R_{d-2}, && d \geqq 1,\\
V_d^3 &= {}'F_1^3 R_{d-2}, && d \geqq 1,\\
V_d^3 &= {}'F_2^3 R_{d-3}, && d \geqq 2,\\
V_d^3 &= F_2^3 R_{d-3}, && d \geqq 2,\\
V_d^3 &= F_3^3 R_{d-4}, && d \geqq 3.
\end{aligned}$$

3. Die Homologiegruppen

Mit dem Verfahren aus [3] und dem eingangs angedeuteten Ansatz erhält man:

3.1.1. $H_j(C_1^3 R_{d-2}) \cong H_j(R_d)$;

3.1.2. $H_j(C_2^3 R_{d-3}) \cong \begin{cases} Z \oplus Z^{1)} & \text{für } j = 2(d-1), \\ H_j(R_d) & \text{sonst;} \end{cases}$

3.1.3. $H_j(C_3^3 R_{d-4}) \cong \begin{cases} Z \oplus Z & \text{für } j = 2(d-1),\ 2(d-2), \\ H_j(R_d) & \text{sonst;} \end{cases}$

3.2.1. $H_j(F_1^3 R_{d-2}) \cong \begin{cases} Z & \text{für } j = 2d-1, \\ H_j(R_d) & \text{sonst;} \end{cases}$

3.2.2. und 3.2.3.

$$H_j('F_1^3 R_{d-2}) \cong H_j('F_2^3 R_{d-3}) \cong H_j(R_d);$$

3.2.4. und 3.2.5.

$$H_j(F_2^3 R_{d-3}) \cong H_j(F_3^3 R_{d-4}) \cong \begin{cases} Z \oplus Z & \text{für } j = 2(d-1), \\ H_j(R_d) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir wollen nur 3.2.5 zeigen.

V_d^3 sei durch (7) gegeben und werde aus $(0, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ auf $x_2 = 0$ projiziert. Aus (7) lesen wir ab:

$$\begin{aligned}
A &= R_{d-1} \cup R'_{d-1} \quad \text{mit } R_{d-1}\colon\ x_0 = x_1 = 0 \quad \text{und} \quad R'_{d-1}\colon\ x_0 = x_4 = 0,\\
A' &= R''_{d-1} \quad \text{mit } R''_{d-1}\colon\ x_0 = x_2 = 0.
\end{aligned}$$

Aus bekannten $H_i(A')$ und $H_i(R_d)$ sowie der Exaktheit von (II) finden wir zunächst

$$H_i(R_d/A') \cong \begin{cases} Z & \text{für } i = 2d, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aus den damit bekannten $H_i(V_d^3/A)$, den leicht zu findenden

$$H_i(A) \cong \begin{cases} Z \oplus Z & \text{für } i = 2d, \\ H_i(R_d) & \text{sonst} \end{cases}$$

und der Exaktheit von (I) erhalten wir die Behauptung.

[1]) Z ist die additive Gruppe der ganzen Zahlen.

LITERATUR

[1] BERTINI, E.: Einführung in die projektive Geometrie mehrdimensionaler Räume. Wien 1924.
[2] BURAU, W.: Algebraische Kurven und Flächen. Berlin 1962.
[3] DRECHSLER, K.: Homologiegruppen rationaler Varietäten. Math. Nachr. *46* (1970), 107–136.
[4] VAN DER WAERDEN, B. L.: Topologische Begründung des Kalküls der abzählenden Geometrie, Math. Ann. *102* (1929), 337–362.

Manuskripteingang: 30. 1. 1973

VERFASSER:

GÜNTHER SCHIEMANN, Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle–Wittenberg