Beiträge zur Algebra und Geometrie
3 (1974), 37 – 39

Über die Hilbert-Samuel-Koeffizienten von lokalen Ringen der Multiplizität 1

WOLFGANG VOGEL

Seit längerer Zeit werden die Hilbert-Samuel-Koeffizienten von (lokalen) Cohen Macaulay-Ringen untersucht; siehe beispielsweise C. P. L. RHODES [10] und die dort zitierte Literatur. Nun sind Cohen-Macaulay-Ringe mit der Multiplizität 1 regulär. Daher schlägt M. HERRMANN, Berlin, vor, analoge Untersuchungen für lokale Ringe mit der Multiplizität 1 durchzuführen. Mit den folgenden Bemerkungen wollen wir auf die Fragestellung aufmerksam machen.
Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring (noethersch, kommutativ mit Einselement). Für genügend großes n betrachten wir das Hilbert-Samuel-Polynom

$$l(A/\mathfrak{m}^{n+1}) = e_0 \cdot \binom{n+d}{d} - e_1 \cdot \binom{n+d-1}{d} + \cdots + (-1)^d e_d\,,$$

wobei $d = \dim A$ und $e_i =: e_i(\mathfrak{m}, A)$ ganz rationale Zahlen sind, die sogenannten *Hilbert-Samuel-Koeffizienten*.

Satz. *Wenn* $e_0(\mathfrak{m}, A) = 1$ *ist, dann gilt* $e_1(\mathfrak{m}, A) \leqq 0$.

Beweis. Da wir eine Aussage über die Hilbert-Samuel-Koeffizienten machen, können wir voraussetzen, daß A komplett ist (siehe [8], S. 199, Bemerkung 1). Die noetherschen, kompletten semilokalen Ringe sind nun nach H. MATSUMURA [6], S. 259, exzellente Ringe. Wir dürfen daher für den Beweis des Satzes o. B. d. A. annehmen, daß A ein exzellenter lokaler Ring ist. Damit stehen uns die Ergebnisse von B. M. BENNETT [1] zur Verfügung, insbesondere Theorem 2. Die Aussage dieses Theorems 2 können wir nach [4], Lemma, wie folgt aufschreiben:
Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein exzellenter lokaler Ring, dann gilt

$$l(A/\mathfrak{m}^{n+1}) \geqq \sum_{p+q=n} l(A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^{p+1} A_\mathfrak{p}) \cdot \binom{q+r-1}{r-1} \qquad (*)$$

für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset A$ und $r = \dim A/\mathfrak{p}$.

Nach dem Additions- und Reduktionssatz für Multiplizitäten (siehe [8], Corollary 1, S. 220) folgt aus der Voraussetzung $e_0(\mathfrak{m}, A) = 1$, daß das Nullideal in A nur ein minimales Primoberideal $\mathfrak{p}$ besitzt und $l(A_\mathfrak{p}) = 1$. Da $A_\mathfrak{p}$ ein nulldimensionaler Ring ist, muß $A_\mathfrak{p}$ ein Cohen-Macaulay-Ring sein und $e_0(\mathfrak{p} \cdot A_\mathfrak{p}, A_\mathfrak{p}) = l(A_\mathfrak{p}) = 1$. Damit haben wir, daß $A_\mathfrak{p}$ regulär ist. Mit diesem Primideal $\mathfrak{p}$ betrachten wir (*) und erhalten:

$$l(A/\mathfrak{m}^{n+1}) \geqq \binom{n+d}{d} \quad \text{mit} \quad d = \dim A \, .$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert die Behauptung, q. e. d.

Korollar 1. *Wenn* $e_0(\mathfrak{m}, A) = 1$ *und* $e_1(\mathfrak{m}, A) = \cdots = e_{i-1}(\mathfrak{m}, A) = 0$ *für ein* i *mit* $2 \leqq i \leqq d$, *dann gilt* $(-1)^i \cdot e_i(\mathfrak{m}, A) \geqq 0$.

Wir wollen jetzt den Fall $i = 2$ in dem Korollar 1 diskutieren.
E. BÖGER, Darmstadt, gab ein Beispiel (unveröffentlicht), das das Korollar 1 für $i = 2$ bestätigt. Er betrachtet über dem Körper der komplexen Zahlen C den lokalen Ring

$$A =: C\langle\langle x_0, x_1, x_2, x_3\rangle\rangle \,/\, (x_0^2, x_0x_1, x_0x_2).$$

Der Formenring bezüglich des maximalen Ideals $\mathfrak{m} \subset A$ ist mit dem Polynomring

$$C[x_0, x_1, x_2, x_3] \,/\, (x_0^2, x_0x_1, x_0x_2)$$

isomorph. Daher findet er durch Abzählung der linear unabhängigen Formen i-ten Grades das Hilbert-Samuel-Polynom

$$l(A/\mathfrak{m}^{n+1}) = \binom{n+3}{3} + \binom{n+1}{1} - 1\, ,$$

also $e_0(\mathfrak{m}, A) = 1$, $e_1(\mathfrak{m}, A) = 0$ und $e_2(\mathfrak{m}, A) = 1 > 0$.

In dem Beweis des folgenden Korollars 2 wollen wir eine weitere Methode zur Berechnung der Hilbert-Samuel-Koeffizienten zur Diskussion stellen, indem wir die (klassische) Hilbertfunktion betrachten (siehe hierzu [8], S. 199).

Korollar 2. *Wenn* $e_0(\mathfrak{m}, A) = 1$ *ist, dann ist* $e_2(\mathfrak{m}, A)$ *nicht notwendig eine nichtnegative ganze Zahl; sie kann auch negativ sein.*

Beweis. Nach dem Korollar 1 muß $e_1(\mathfrak{m}, A) < 0$ sein. Wir betrachten den folgenden lokalen Ring:

$$A =: C\langle\langle x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\rangle\rangle \,/\, (x_0, x_1^2, x_1x_2)\, .$$

Der Formenring bezüglich des maximalen Ideals $\mathfrak{m} \subset A$ ist mit dem Polynomring $C[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]/\mathfrak{A}$ isomorph, mit

$$\mathfrak{A} =: (x_0, x_1^2, x_1x_2) = (x_0, x_1) \cap (x_0, x_1^2, x_2)\, .$$

Wir berechnen zunächst die Hilbertfunktion $H(t, \mathfrak{A})$ für genügend großes t in $C[x_0, \ldots, x_4]$, siehe z. B. [2]. In [5] wird für Potenzproduktideale eine brauchbare Methode angegeben, um die Hilbertfunktion zu berechnen. Danach ergibt sich:

$$H(t, \mathfrak{A}) = h_0 \cdot \binom{t}{2} + h_1 \cdot \binom{t}{1} + h_2 \quad \text{mit } h_0 = 1,\ h_1 = 3 \text{ und } h_2 = 1\, .$$

Hieraus können wir — bis auf den letzten Hilbert-Samuel-Koeffizienten — die $e_i(\mathfrak{m}, A)$ für $i = 0, \ldots, d-1$ berechnen. Allerdings benötigen wir die Darstellung der Hilbertfunktion in der von E. MARCHIONNA [7] angegebenen Form. In [3] finden wir aber die Umrechnungsformeln für die gewünschte Darstellung. Hieraus ergibt sich:

$$e_0(\mathfrak{m}, A) = h_0(\mathfrak{A}) = 1\,, \quad -1 \cdot e_1(\mathfrak{m}, \mathfrak{A}) = h_1 - h_0 \cdot 2 = 1\,,$$

$$e_2(\mathfrak{m}, A) = h_2 - h_1 \cdot 1 + h_0 = -1\,, \text{ q. e. d.}$$

Bemerkung. Mit der Methode, die im Beweis von Korollar 2 benutzt wurde, läßt sich der Beweis von Theorem 2 in [9] vereinfachen. Zunächst aber nur für das maximale Ideal $\mathfrak{m} \subset A$. Um diese Betrachtungen auch für $\mathfrak{m}$-primäre Ideale heranziehen zu können, benötigen wir eine entsprechende Theorie der charakteristischen Hilbertfunktion in homogenen Ringen über Ringen mit Vielfachkettensatz; die liegt aber schon in [11], [12] vor.

LITERATUR

[1] Bennett, B. M.: On the characteristic functions of a local ring. Ann. Math. *91* (1970), 25–87.

[2] Gröbner, W.: Moderne algebraische Geometrie. Die idealtheoretischen Grundlagen. Springer-Verlag, Wien-Innsbruck 1949.

[3] Gröbner, W.: Über das arithmetische Geschlecht einer algebraischen Mannigfaltigkeit. Arch. Math. (Basel) *3* (1952), 312–359.

[4] Herrmann, M., und W. Vogel: Normal flatness and Hilbert-Samuel functions. In: Proceedings of the Colloquium on „Associative rings, modules and radicals" of the Bolyai Janos Math. Society, Hungary 1971, North Holland Publ. Comp.

[5] Kummer, R., und B. Renschuch: Potenzproduktideale II. Publ. Math. Debrecen *18* (1971), 273–288.

[6] Matsumura, H.: Commutative Algebra. W. A. Benjamin, Inc., New York 1970.

[7] Marchionna, E.: Sur la postulation des variétés algébriques et questions connexes. 3ème Colloque de géometrie algébrique, Bruxelles 1959, CBRM, 43–64, Librairie Universitaire, Louvain/Gauthier-Villars, Paris 1960.

[8] Nagata, M.: The theory of multiplicity in general local rings. In: Proc. Intern. Symp. of algebraic number theory, Tokyo and Nikko (1965), 191–226.

[9] Narita, M.: A note on the coefficients of Hilbert characteristic functions in semiregular local rings. Proc. Cambr. Phil. Soc. *59* (1963), 269–275.

[10] Rhodes, C. P. L.: The Hilbert-Samuel polynomial in a filtered module. J. London Math. Soc. (2) *3* (1971), 73–85.

[11] Vogel, W.: Zur Theorie der charakteristischen Hilbertfunktion im homogenen Ringen über Ringen mit Vielfachkettensatz. Math. Nachr. *33* (1967), 39–60.

[12] Vogel, W.: Idealtheoretische Schnittpunktsätze in homogenen Ringen über Ringen mit Vielfachkettensatz. Math. Nachr. *34* (1967), 277–295.

Manuskripteingang: 15. 4. 1972

VERFASSER:

Wolfgang Vogel, Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg