Beiträge zur Algebra und Geometrie
3 (1974), 23 – 35

Rechtsteilweise geordnete Halbgruppen mit Teilbarkeitsordnungen

HEINZ MITSCH

In [7] wurde der Begriff der *rechtsteilweise geordneten Halbgruppe* (kurz: rtwg.) eingeführt; wir verstehen darunter eine Menge H mit einer binären Operation „$\circ$" und folgenden Eigenschaften:

1. H bildet bezüglich „$\circ$" eine Halbgruppe,
2. H ist bezüglich „$\leqq$" eine teilweise geordnete Menge,
3. $a \leqq b$ mit $a, b \in H \Rightarrow a \circ c \leqq b \circ c \ \forall \ c \in H$ (Rechtsisotonie).

Ist die Relation „$\leqq$" eine Totalordnung, so heißt H *rechtsangeordnet* (kurz: rang.). Bildet H bezüglich „$\circ$" eine Gruppe, so sprechen wir von einer *rechtsteilweise geordneten Gruppe* (siehe auch [9]).
Gilt in einer rtwg. Halbgruppe H noch die *Linksisotonie* (aus $a \leqq b$ mit $a, b \in H$ folgt $c \circ a \leqq c \circ b \ \forall \ c \in H$), so liegt eine *teilweise geordnete Halbgruppe* vor (siehe FUCHS [5]).

Unter einer rtwg. Halbgruppe *mit Teilbarkeitsordnung* wollen wir eine solche rtwg. Halbgruppe verstehen, in der die Operation „$\circ$" außer durch die Rechtsisotonie noch durch die Eigenschaft mit der Ordnungsrelation „$\leqq$" verbunden ist, daß $a \leqq b$ die Teilbarkeit von b durch a (d. h. $b = c \circ a$ oder $b = a \circ d$ für $c, d \in H$) oder von a durch b bedeutet. Im Falle einer teilweise geordneten Halbgruppe sprechen wir unter solchen Voraussetzungen von einer *natürlichen Ordnung* (siehe FUCHS [5]). Mit Hilfe dieses zusätzlichen Zusammenhanges von Operation und Ordnung haben wir in [7] gezeigt, daß jede Halbgruppe ohne assoziierte Elemente durch eine Teilbarkeitsordnung rechtsteilweise geordnet werden kann (Satz 2, § 2) und daß eine rtwg. Halbgruppe mit einer gewissen Teilbarkeitsordnung eine teilweise geordnete Halbgruppe ist (Satz 3, § 2).

In § 1 geben wir die verschiedenen Teilbarkeitsordnungen an, die wir in dieser Arbeit benützen werden: rechtsnatürliche, linksnatürliche und natürliche und solche, wo aus der Vergleichbarkeit zweier Elemente die Teilbarkeit folgt, aber nicht umgekehrt. Wir untersuchen, wann eine Halbgruppe eine Teilbarkeitsordnung zuläßt, und können daraus schließen, wann eine Halbgruppe rechts(links-) teilweise geordnet werden kann. Weiters geben wir ein Kriterium an, wann — neben dem oben erwähnten Fall — eine rtwg. Halbgruppe eine teilweise geordnete Halbgruppe ist. In § 2 betrachten wir verschiedene spezielle Elemente wie maximale, prime und unzerlegbare, und zeigen die Äquivalenz dieser Begriffe in gewissen rechtsnatürlich rtwg. Halbgruppen. § 3 enthält Bedingungen, wann in einer rtwg. Halbgruppe jedes Element in Primfaktoren zerlegt werden kann, und ein Korollar, wann diese Primelemente paarweise vertauschbar sind, d. h. wann die rtwg. Halbgruppe kommutativ ist. In § 4 untersuchen wir jene rtwg. Halbgruppen, die positiver Kegel einer rtwg. Gruppe sind, und geben für nach oben gerichtete rtwg. Halbgruppen notwendige und hinreichende Bedingungen für diese Eigenschaft an. In § 5 betrachten wir archimedisch rechtsnatürlich rang. Halbgruppen; wir zeigen, daß solche Halbgruppen unter Voraussetzung eines kleinsten Elementes kommutativ sind; weiters beweisen wir für solche Halbgruppen einige Sätze, die von Clifford [2] hergeleitet wurden (im kommutativen Fall). Diese Aussagen folgen bei Clifford aus der ordinalen Irreduzibilität (siehe [7]) der kommutativen, natürlich angeordneten Halbgruppe; sein Kriterium für diese Eigenschaft können wir analog für linkspositive rtwg. Halbgruppen beweisen (§ 6).

§ 1. Definitionen und grundlegende Eigenschaften

Wir unterscheiden auf Grund des oben genannten Satzes 2 aus § 2 in [7] folgende Teilbarkeitsordnungen auf einer Halbgruppe:

Definition. Es sei H eine Halbgruppe, versehen mit einer teilweisen Ordnung „$\leqq$". Wir nennen H *rechtsnatürlich* (r-nat.) geordnet, wenn

1. jedes Element $a \in H$ linkspositiv ist, d. h. $a \circ x \geqq x \ \forall\, x \in H$,
2. aus $a < b$, $a, b \in H$ folgt $b = c \circ a$ für ein $c \in H$.

H heißt *links-natürlich* (l-nat.) geordnet, wenn

1. jedes Element $a \in H$ rechtspositiv ist, d. h. $x \circ a \geqq x \ \forall\, x \in H$,
2. aus $a < b$ mit $a, b \in H$ folgt $b = a \circ d$ für ein $d \in H$.

Ist H sowohl r-nat. als auch l-nat. geordnet, so sprechen wir von einer *natürlich geordneten Halbgruppe* (siehe Fuchs [5]).
Durch die dualen Bedingungen definieren wir *dual r-nat.*, *dual l-nat.* und *dual natürlich* geordnet. Weiters werden wir auch solche rtwg. Halbgruppen betrachten, wo aus $a < b$ die Existenz eines $c \in H$ folgt, so daß $b = c \circ a$ (bzw. $a = c \circ b$), und ebenso, wo aus $a < b$ folgt $b = a \circ d$ (bzw. $a = b \circ d$) für ein $d \in H$.

Wir wollen untersuchen, welche Halbgruppen r-nat. bzw. l-nat. geordnet werden können:

Lemma 1. *Eine Halbgruppe H mit einer teilweisen Ordnung „$\leqq$" ist genau dann r-nat. geordnet, wenn $a < b \Leftrightarrow a \neq b, b = c \circ a$ für ein $c \in H$. H ist damit eine rtwg. Halbgruppe; ein eventuelles Einselement von H ist dann kleinstes Element von H.*

Beweis. Ist H r-nat. geordnet, so folgt aus $b = c \circ a$ und $a \neq b$ wegen $a \circ x \geqq x \ \forall\, a, x \in H$, daß $b > a$; nach Voraussetzung gilt aber auch: $a < b \Rightarrow a \neq b$ und $b = c \circ a$. — Umgekehrt ist wegen der angegebenen Bedingung in der Definition der Punkt 2 trivial erfüllt und jedes Element $a \in H$ linkspositiv: Aus $y = a \circ x$ folgt für $y \neq x$ gleich $y > x$, also insgesamt $\forall\, x \in H\ a \circ x \geqq x$. Nach dem Beweis zu Satz 2 aus § 2 in [7] ist H mit dieser Ordnungsrelation (der r-nat. Ordnung) eine rtwg. Halbgruppe. Ein Einselement e in H ist wegen $x = x \circ e \ \forall\, x \in H$, d. h. $x \geqq e \ \forall\, x \in H$, das kleinste Element von H.

Auf ähnliche Weise zeigt man: Eine Halbgruppe H mit einer teilweisen Ordnung „$\leqq$" ist genau dann l-nat. geordnet, wenn $a < b \Leftrightarrow a \neq b$ und $b = a \circ d$ für ein $d \in H$; H wird dadurch zu einer *linksteilweise geordneten* Halbgruppe, d. h., es gilt die Linksisotonie.
Nach [7] nennen wir zwei Elemente a, b einer Halbgruppe H *l-assoziiert*, wenn $a \neq b$ und $a = x \circ b$, $b = y \circ a$ für $x, y \in H$. Mit dem folgenden Lemma beantworten wir die Frage, wann durch die Bedingung aus dem Lemma 1 überhaupt eine teilweise (und damit rechtsteilweise) Ordnung auf einer Halbgruppe definiert ist:

Lemma 2. *In einer Halbgruppe H ist durch: $a < b \Leftrightarrow a \neq b$ und $b = c \circ a$ für ein $c \in H$, genau dann eine teilweise Ordnung gegeben, wenn H keine l-assoziierten Elemente besitzt.*

Beweis. Die Bedingung ist nach Satz 2 aus § 2 in [7] hinreichend. Ist umgekehrt durch $a < b \Leftrightarrow a \neq b$, $b = c \circ a$ auf H eine teilweise Ordnung definiert, so können $a < b$ und $b < a$ nicht zugleich gelten, also ist $a \neq b$, $b = x \circ a$, $a = y \circ b$ $(x, y \in H)$ niemals in H möglich, d. h., es gibt in H keine l-assoziierten Elemente.

Korollar. *Eine Halbgruppe H kann genau dann rechtsnatürlich geordnet werden, wenn sie keine l-assoziierten Elemente besitzt.*

Analog zu Lemma 2 zeigt man: Eine Halbgruppe H ohne r-assoziierte Elemente (d. h. Elemente a, b mit $a \neq b$, $a = b \circ x$, $b = a \circ y$, $x, y \in H$) kann l-nat. und damit linksteilweise geordnet werden. Also: Eine Halbgruppe gestattet genau dann eine natürliche Ordnung (siehe Fuchs [5]), wenn sie keine l- und keine r-assoziierten Elemente besitzt.
Nach Satz 3 aus § 2 in [7] ist jede l-natürlich rtwg. Halbgruppe eine teilweise geordnete Halbgruppe. Weiters erfüllen noch folgende rtwg. Halbgruppen die Linksisotonie:

Lemma 3. *Eine r-nat. rtwg. Halbgruppe ist eine teilweise geordnete Halbgruppe, wenn jedes Element rechtspositiv ist. Besitzt sie ein Einselement, dann gilt auch die Umkehrung.*

Beweis. Es seien $a, b \in H$ mit $a \leqq b$; ist $a = b$, so $x \circ a = x \circ b \; \forall \, x \in H$; ist $a < b$, so gilt $b = c \circ a$ für ein $c \in H$. Da $x \circ c \geqq x \; \forall \, x \in H$, so $x \circ c \circ a \geqq x \circ a$, d. h. $x \circ b \geqq x \circ a \; \forall \, x \in H$. Ist e Einselement der Halbgruppe H, so gilt $e \leqq c \; \forall \, c \in H$ und wegen der Linksisotonie $x \leqq x \circ c \; \forall \, x \in H$.

Lemma 4. *Eine rtwg. Halbgruppe H mit Linkseinselement $\bar{e}$, das zugleich größtes Element von H ist, und mit $a \leqq b \Rightarrow b = c \circ a$ für ein $c \in H$ besteht nur aus einem Element, $\bar{e}$.*

Beweis. Da $a \leqq \bar{e} \; \forall \, a \in H$, so gilt $\bar{e} = a' \circ a$ für $a' \in H$; d. h., jedes Element aus H besitzt bezüglich der Linkseinheit $\bar{e}$ ein Linksinverses. Also ist H eine (rtwg.) Gruppe, die $\bar{e}$ als Einheit und als größtes Element hat. Daher ist $H = \{\bar{e}\}$, denn $x \leqq \bar{e} \Rightarrow \bar{e} \leqq x^{-1} \Rightarrow x^{-1} = \bar{e} \Rightarrow x = \bar{e} \; \forall \, x \in H$.

§ 2. Spezielle Elemente und deren Zusammenhang

Unter einem linksnegativen (bzw. linkspositiven) Element einer rtwg. Halbgruppe H verstehen wir ein Element $a \in H$ mit $a \circ x \leqq x \; \forall \, x \in H$ (bzw. $a \circ x \geqq$ $\geqq x \; \forall \, x \in H$). Besitzt H ein Einselement e, welches kleinstes (bzw. größtes) Element in H ist, dann ist jedes Element von H linkspositiv (bzw. linksnegativ). Existiert e in H nicht, so gilt für rang. Halbgruppen mit einer einfachen Teilbarkeitsordnung:

Lemma 1. *Ist H eine rang. Halbgruppe mit $a < b \Rightarrow b = a \circ d$ für ein $d \in H$, dann ist ein Element $x \in H$ linksnegativ, wenn es ein $t \in H$ mit $x \circ t < t$ gibt, und ein Element $y \in H$ linkspositiv, wenn es ein $t \in H$ mit $y \circ t > t$ gibt.*

Beweis. Es sei $c \in H$ mit $c \circ t < t$ für ein $t \in H$; ist $x \in H$ und $x < t$, so gilt $t = x \circ u$ für ein $u \in H$, also $c \circ x \circ u < x \circ u$. Daher gilt $c \circ x \leqq x$, denn aus $c \circ x > x$ würde $c \circ x \circ u \geqq x \circ u$ folgen. Ist $x \in H$ und $x > t$, so gilt $x = t \circ v$ für ein $v \in H$; wegen $c \circ t < t$ ist $c \circ t \circ v \leqq t \circ v$, also $c \circ x \leqq x$. D. h. $c \circ x \leqq x$ $\forall\, x \in H$. — Für $d \in H$ mit $d \circ t > t$ für ein $t \in H$ verläuft der Beweis dual.

Lemma. *Eine rtwg. Halbgruppe mit größtem Element i und rechter (bzw. linker) Kürzungsregel, in der jedes Element linkspositiv (bzw. rechtspositiv) ist, besteht nur aus einem Element, i.*

Beweis. Es sei $a \in H$ beliebig; dann gilt $a \circ i \geqq i$ und $i \circ i \geqq i$, also $a \circ i = i \circ i = i$ und daher $a = i$ $\forall\, a \in H$.

Korollar. *Eine rtwg. Halbgruppe mit größtem Element und rechter Kürzungsregel kann nur im trivialen Fall r-nat. geordnet werden.*

Im folgenden untersuchen wir den Zusammenhang von *unzerlegbaren* ($c \in H$, wenn $c = a \circ b \Rightarrow a = c$ oder $b = c$), *primen* ($p \in H$, wenn $a \circ b \leqq p \Rightarrow a \leqq p$ oder $b \leqq p$) und *maximalen* ($m \in H$, wenn $m < x \leq e \Rightarrow x = e$) Elementen — siehe [7] — in rtwg. Halbgruppen mit Einselement e, die eine Teilbarkeitsordnung aufweisen. Allgemein haben wir in [7] gezeigt, daß in jeder rtwg. Halbgruppe mit e, das zugleich größtes Element von H ist ($e = i$), jedes maximale Element unzerlegbar und jedes negative Primelement auch unzerlegbar ist.

Lemma 3. *In einer rtwg. Halbgruppe* mit

1. $e = i$,
2. $a < b \Rightarrow a = c \circ b$ *für ein* $c \in H$,
3. $a = a \circ b \Rightarrow b = e$

ist jedes unzerlegbares Element $c \neq e$ maximal in H.

Beweis. Wäre $c \neq e$ unzerlegbar und nicht maximal in H, so wäre $c < x < e$ für ein $x \in H$; also wäre $c = d \circ x$ für ein $d \in H$. Ist $d = c$, so $c = c \circ x$ und daher $x = e$; ist $d \neq c$, so muß $c = x$, da c unzerlegbar ist, d. h. in beiden Fällen: Widerspruch.

Lemma 4. *In einer rtwg. Halbgruppe H mit*

1. $e = i$,
2. $a < b \Rightarrow a = c \circ b$ *für ein* $c \geqq a$ aus H,
3. $a = a \circ b \Rightarrow b = e$

ist jedes prime Element maximal.

Beweis. Es sei p ein Primelement mit $p < x < e$, $x \in H$; dann existiert ein $y \in H$ mit $y \geqq p$ und $p = y \circ x$; für $y = p$ erhalten wir $x = e$. Also bleibt nur $y \circ x \leqq p$, $y \nleqq p$, $x \nleqq p$, was aber wegen der Primeigenschaft von p nicht möglich ist; und die Annahme ist auf einen Widerspruch geführt.

Die Aussagen von Lemma 3 und 4 gelten auch in rtwg. Halbgruppen H mit den Eigenschaften

1. $e = i$,
2. $a < b \Rightarrow a = b \circ d$ für ein $d \in H$,
3. $a = b \circ a \Rightarrow b = e$

(da wegen $b \leqq e$ gilt $a = b \circ d \leqq d$, d. h. $d \geqq a$).

Lemma 5. *In einer rang. Halbgruppe mit $e = i$ ist jedes maximale Element auch prim.*

Beweis. Es sei m maximales Element in H und $x \circ y \leqq m$; wäre sowohl $x \nleqq m$ als auch $y \nleqq m$, so müßte $x > m$ und $y > m$ gelten, woraus wegen der Maximalität von m folgen würde: $x = y = e$, im Widerspruch zu $x \circ y \leqq m < e$.

Wir erhalten also zusammenfassend folgenden zu Dubreil [4] (über teilweise geordnete Halbgruppen) ähnlichen

Satz. *Genügt eine rang. Halbgruppe H mit $e = i$ den Bedingungen*

1. *$a < b \Rightarrow a = c \circ b$ für ein $c \geqq a$ aus H,*
2. *$a = a \circ b \Rightarrow b = e$,*

dann sind die Begriffe des maximalen, unzerlegbaren und primen Elements in H äquivalent.

§ 3. Primfaktorzerlegungen

Fuchs und Steinfeld [6] haben ein Kriterium dafür angegeben, daß in einer teilweise geordneten Halbgruppe H jedes Element eindeutig als Produkt von Primelementen aus H darstellbar ist; es zeigte sich, daß unter den angegebenen Bedingungen H notwendig kommutativ ist. Auf Grund dieser Überlegungen wird ein weiteres Kriterium angeben, wann eine rtwg. Halbgruppe eine teilweise geordnete Halbgruppe ist.

Wie üblich nennen wir eine rtwg. Halbgruppe H *der Maximalbedingung genügend*, wenn jede nichtleere Teilmenge von H ein maximales Element besitzt.

Lemma 1. *Genügt eine rtwg. Halbgruppe H mit $e = i$ den Bedingungen*

1. *$a < b \Rightarrow a = b \circ d$ für ein $d \in H$,*
2. *$a = b \circ a \Rightarrow b = e$,*
3. *der Maximalbedingung,*

dann läßt sich jedes Element ($\neq e$) aus H als endliches Produkt von maximalen Elementen darstellen.

Beweis. Es sei $a \in H$ mit $a \neq e$; ist a nicht maximal in H, so existiert ein maximales Element $p_1 \in H$ mit $a < p_1$ (sonst gäbe es eine Kette nichtmaximaler Elemente $a < x_1 < x_2 < \cdots$, die nicht abbricht, im Widerspruch zu Bedingung (3). Also gibt es ein $a_1 \in H$ mit $a = p_1 \circ a_1$; da $p_1 \leqq e$, so $a \leqq a_1$. Ist $a = a_1$, so folgt aus $a = p_1 \circ a$, daß $p_1 = e$, im Widerspruch zur Maximalität von p_1. Durch analoge Schlußweise für a_1 erhalten wir: $a = p_1 \circ a_1 = p_1 \circ p_2 \circ a_2 = \cdots$, wobei die p_i maximale Elemente in H sind und gilt: $a < a_1 < a_2 < \cdots$. Diese Folge der a_i besitzt wegen Bedingung 3 ein maximales Element; nach endlich vielen Schritten finden wir daher ein maximales Element $p_n (= a_n)$, so daß $a = p_1 \circ p_2 \circ \cdots \circ p_n$.

Nach Lemma 5 aus § 2 ergibt sich für Totalordnungen folgender

Satz 1. *Genügt eine rang. Halbgruppe H mit $e = i$ den Bedingungen 1, 2, 3 von Lemma 1, dann läßt sich jedes* Element ($\neq e$) *in ein Produkt von endlich vielen Primelementen zerlegen.*

Im Falle, wo die Ordnung von H nur eine teilweise ist, zeigen wir die Primfaktorzerlegung unter folgender Voraussetzung: Wir sagen, eine rtwg. Halbgruppe H besitzt *Rechtsquotienten*, wenn für alle $a, b \in H$ die Menge ${}_aM_b = \{x \in H \mid a \circ x \leqq b\}$ ein größtes Element (= Rechtsquotient) besitzt (siehe FUCHS [5]).

Lemma 2. *In einer rtwg. Halbgruppe H mit $e = i$ und Rechtsquotienten ist jedes maximale Element auch prim in H.*

Beweis. Es sei p maximales Element und $a \circ b \leqq p$, $a \nleqq p$, $b \nleqq p$; die Menge ${}_aM_b$ aller $x \in H$ mit $a \circ x \leqq p$ besitzt ein größtes Element m, d. h. $a \circ m \leqq p$. Da $a \circ p \leqq p$, so $p \leqq m$; ist $p = m$, so ist wegen $b \leqq m$ auch $b \leqq p$, was nicht möglich ist; also muß $p < m \leqq e$ gelten, und daher $m = e$. Aus $a \circ m \leqq p$ erhalten wir $a \leqq p$, also ebenfalls einen Widerspruch. —

Satz 2. *Genügt eine rtwg. Halbgruppe H mit $e = i$ und Rechtsquotienten den Bedingungen von Lemma 1, dann läßt sich jedes Element ($\neq e$) aus H als Produkt endlich vieler Primelemente aus H darstellen.*

Wir bemerken, daß Lemma 1 und 2, Satz 1 und 2 richtig bleiben, wenn in H anstelle von Bedingung 1 und 2 vorausgesetzt wird:

1′. $a < b \Rightarrow a = c \circ b$ für ein $c \geqq a$ aus H,
2′. $a = a \circ b \Rightarrow b = e$.

In Lemma 3 aus § 1 haben wir gezeigt, daß jede dual r-nat. rtwg. Halbgruppe H mit Einselement e genau dann eine teilweise geordnete Halbgruppe ist, wenn jedes Element von H rechtsnegativ ist. Genügt aber eine rtwg. Halbgruppe den Bedingungen von Satz 2, so gilt die Linksisotonie in H schon, wenn nur jedes Primelement von H rechtsnegativ ist. Diese Bedingung ist dann trivial auch notwendig, da wir zeigen, daß H kommutativ ist:

Lemma 3. *Die rechtsnegativen Primelemente einer rtwg. Halbgruppe H mit $e = i$ und*

1. $a < b \Rightarrow a = c \circ b$ *für ein* $c \geqq a$ *aus* H,
2. $a = a \circ b \Rightarrow b = e$

sind paarweise vertauschbar.

Beweis. Es seien p, q zwei rechtsnegative Primelemente mit $p \neq q$; da $p \circ q \leqq p$, so gilt $p \circ q = c \circ p$ für ein $c \in H$, wobei $p \circ q \leqq q$, also $c \circ p \leqq q$. Nach Lemma 4 aus § 2 sind p und q maximal in H, d. h. sicher $p \nleqq q$; also muß $c \leqq q$; daher gilt $c \circ p \leqq q \circ p$, d. h. $p \circ q \leqq q \circ p$. Ebenso: $q \circ p \leqq q$, also $q \circ p = d \circ q$ für ein $d \in H$, wobei $q \circ p \leqq p$; also $d \circ q \leqq p$ und $d \leqq p$ (wegen $q \nleqq p$); daher $d \circ q \leqq p \circ q$, d. h. $q \circ p \leqq p \circ q$, und q und p sind vertauschbar.

Nach der obigen Bemerkung ergeben sich daraus folgende Kriterien:

Korollar 1. *Genügt eine rang. Halbgruppe H mit $e = i$ den Bedingungen*

1. $a < b \Rightarrow a = c \circ b$ *für ein* $c \geqq a$ *aus* H,
2. $a = a \circ b \Rightarrow b = e$,
3. *der Maximalbedingung,*

so ist H genau dann kommutativ (und damit teilweise geordnete Halbgruppe), wenn jedes Primelement (d. h. maximale Element) rechtsnegativ ist.

Korollar 2. *Genügt eine rtwg. Halbgruppe H mit $e = i$ und Rechtsquotienten den Bedingungen*

1. $a \lessdot b \Rightarrow a = c \circ b$ *für ein* $c \geqq a$ *aus* H,
2. $a = a \circ b \Rightarrow b = e$,
3. *der Maximalbedingung,*

so ist H genau dann kommutativ, wenn jedes Primelement in H rechtsnegativ ist.

§ 4. Positive Kegel von rtwg. Gruppen

Es sei G eine rtwg. Gruppe mit dem Einselement e; die Menge $P = \{x \in G | x \geqq e\}$ heißt der *positive Kegel von G*. P ist eine rtwg. Halbgruppe mit Einselement e und Kürzungsregeln; sie ist rechtsnatürlich geordnet: Ist $a \lessdot b$, mit $a, b \in P$ (wo „$\leqq$" die durch die rtwg. Gruppe induzierte teilweise Ordnung auf P bedeutet), so existiert ein $c \in P$ (nämlich $c = b \circ a^{-1}$) mit $b = c \circ a$; ist umgekehrt $b = c \circ a$ für $a \neq b$, $c \in P$, so folgt wegen $c \geqq c$ auch $b = c \circ a > a$ in P.

Umgekehrt sind gewisse Halbgruppen mit dieser Teilbarkeitsordnung der positive Kegel von rtwg. Gruppen (für natürlich teilweise geordnete Halbgruppen siehe Nakada [8]):

Satz 1. *Eine rtwg. Halbgruppe H ist der positive Kegel einer rtwg. Gruppe, wenn H folgende Eigenschaften hat:*

1. *H besitzt ein Einselement e;*
2. *in H gelten beide Kürzungsregeln;*
3. *H ist rechtsnatürlich geordnet;*
4. *H ist rechts-regulär, d. h., zu $a, b \in H$ gibt es $c, d \in H$ mit $a \circ c = b \circ d$.*

Beweis. Wegen der Eigenschaften 2 und 4 ist die Halbgruppe H in eine Gruppe G (die Quotientengruppe von H) einbettbar, deren Elemente x die Form haben: $x = a \circ b^{-1}$ für $a, b \in H$. G ist rtwg. Gruppe, wenn man definiert: $x \leqq_1 y$ genau dann, wenn ein $c \in H$ existiert mit $y = c \circ x$. Denn „$\leqq_1$" ist auf G eine teilweise Ordnung: $x \leqq_1 x$ (da $e \in H$); aus $x \leqq_1 y$ und $y \leqq_1 z$ folgt $y = c \circ x$, $z = d \circ y$ mit $c, d \in H \Rightarrow z = d \circ c \circ x \Rightarrow x \leqq_1 z$; aus $x \leqq_1 y$ und $y \leqq_1 x$ folgt $y = c \circ x$, $x = d \circ y$ mit $c, d \in H \Rightarrow y = c \circ d \circ y \Rightarrow$ nach Eigenschaft 2: $c \circ d = e$, wo $c, d \geqq e \Rightarrow c \circ d \geqq d \geqq e \Rightarrow d = c = e \Rightarrow x = y$. G ist mit „$\leqq_1$" rtwg., da $x \leqq_1 y \Rightarrow y = c \circ x$ für $c \in H \Rightarrow y \circ z = c \circ (x \circ z) \Rightarrow x \circ z \leqq_1 y \circ z \;\forall\, z \in H$. Es bleibt zu zeigen, daß die Einschränkung der Ordnung „$\leqq_1$" von G auf H gleich der Ordnung „$\leqq$" auf H ist: Ist $a \leqq_1 b$ in G mit $a, b \in H$, so $b = c \circ a$ für ein $c \in H$, also nach Eigenschaft 3 $b \geqq a$ in H; ist umgekehrt $a \leqq b$ in H mit $a, b \in H$, so ist nach Eigenschaft 3 $b = d \circ a$ für ein $d \in H$, also $b \geqq_1 a$ in G. Sonst siehe Lemma 2 unten. —

Wie oben gezeigt wurde, sind die Bedingungen 1, 2, 3 auch notwendig, 4 im allgemeinen aber nicht. Ist jedoch die rtwg. Halbgruppe eine nach oben gerichtete Menge (bezüglich ihrer Ordnungsrelation „$\leqq$"), so ist diese Eigenschaft äquivalent zur Linksregularität der Halbgruppe (d. h., zu $a, b \in H$ gibt es $x, y \in H$ mit $x \circ a = y \circ b$):

Lemma 1. *Eine r-nat. rtwg. Halbgruppe H ist genau dann linksregulär, wenn H bezüglich ihrer Ordnung eine nach oben gerichtete Menge ist.*

Beweis. Ist H linksregulär, so gibt es zu beliebigen $a, b \in H$ Elemente $c, d \in H$, so daß $c \circ a = d \circ b = m$, also $m \geqq a$ und $m \geqq b$; ist H nach oben gerichtet, so gibt es zu $a, b \in H$ stets ein $c \in H$ mit $c \geqq a$ und $c \geqq b$, d. h., es existieren $x, y \in H$ mit $c = x \circ a = y \circ b$.

Da in Satz 1 die Bedingung der Rechtsregularität durch die Linksregularität ersetzt werden kann, ergibt sich folgender

Satz 2. *Eine nach oben gerichtete rtwg. Halbgruppe H ist genau dann der positive Kegel einer rtwg. Gruppe, wenn*

1. *H ein Einselement e besitzt,*
2. *in H beide Kürzungsregeln gelten,*
3. *H rechtsnatürlich geordnet ist.*

Dieser Satz gilt also sicher für rtwg. Halbgruppen, deren Ordnung eine Totalordnung oder eine Verbandsordnung ist und die die Eigenschaften 1, 2, 3 aufweisen.

Nach Satz 1 ist eine rtwg. Halbgruppe H unter den Bedingungen 1 bis 4 der positive Kegel ihrer Quotientengruppe $G = \{a \circ b^{-1} | a, b \in H\}$. Ist H der positive Kegel P ihrer Quotientengruppe G, dann ist H notwendig auch rechtsregulär: sind $a, b \in H$ beliebig, so gilt $a^{-1} \circ b \in G$, d. h., es existieren Elemente $x, y \in H$ mit $a^{-1} \circ b = x \circ y^{-1}$; also $a \circ x = b \circ y$.

Korollar. *Eine rtwg. Halbgruppe H ist genau dann der positive Kegel ihrer Quotientengruppe $G = \{a \circ b^{-1} | a, b \in H\}$, wenn H den Bedingungen 1 bis 4 aus Satz 1 genügt.*

Dies sind Aussagen, die von CONRAD [3] für angeordnete Halbgruppen bewiesen wurden; Satz 2.2 aus [3] enthält genauer noch

Lemma 2. *Eine rtwg. Halbgruppe H mit Einselement e ist genau dann im positiven Kegel P ihrer Quotientengruppe G (falls diese existiert) enthalten, wenn jedes Element von H linkspositiv ist. H enthält P, wenn H rechtsnatürlich geordnet ist.*

Beweis. Ist $H \subseteqq P$, so $a \geqq e \; \forall \; a \in H$, und daher $a \circ x \geqq x \; \forall \in H$; ist umgekehrt $a \circ x \geqq x \; \forall \; a, x \in H$, so gilt wegen $e \in H$ auch $a \circ e \geqq e$, und wir haben $H \subseteqq P$. Ist nun H r-nat. geordnet, so gilt für alle $a \in P$: $a \geqq e$, $a = x \circ y^{-1}$ mit $x, y \in H$ und $x \geqq y$; daher gibt es ein $c \in H$, so daß $x = c \circ y$ gilt. also ist $a = x \circ y^{-1} = c \circ y \circ y^{-1} = c \in H$, d. h. $P \subseteqq H$.

Eine rtwg. Halbgruppe H, die positiver Kegel ihrer Quotientengruppe G ist und eine etwas stärkere Teilbarkeitsordnung trägt, erfüllt bereits die Linksisotonie:

Lemma 3. *Eine rtwg. Halbgruppe H ist eine teilweise geordnete Halbgruppe, wenn H ein kleinstes Einselement besitzt, beiden Kürzungsregeln genügt und wenn $a \leqq b \Rightarrow b = c \circ a = a \circ d$ für $c, d \in H$ in H gilt.*

Beweis. Nach den Voraussetzungen erfüllt H die Bedingungen 1, 2, 3 aus Satz 1; ebenso Bedingung 4: sind $a, b \in H$ beliebig, so gilt wegen $a \geqq e$ auch $a \circ b \geqq b$, d. h. $a \circ b = b \circ d$ für ein $d \in H$ und H ist rechtsregulär. Daher ist H (nach Satz 1) der positive Kegel ihrer Quotientengruppe $G = \{a \circ b^{-1} | a, b \in H\}$, die bezüglich der Ordnungsrelation „$\leqq$": $x \leqq y \Leftrightarrow y = c \circ x$ für ein $c \in H$, eine rtwg. Gruppe bildet. Wir zeigen, daß $x \circ a \geqq x$ für alle $a, x \in H$: ist $a \in H$, so $a \geqq e$ in $H = P$, und daher $a \circ x^{-1} \geqq x^{-1}$ in G für alle $x^{-1} \in G$, wo $x \in H$; also gilt $a \circ x^{-1} = x^{-1} \circ d$ für ein $d \in H$, und wir erhalten $x \circ a \circ x^{-1} = x \circ x^{-1} \circ d = d \geqq e$, d. h. $x \circ a \geqq x$ $\forall\, x, a \in H$. Nach Lemma 3 aus § 1 ist daher H eine teilweise geordnete Halbgruppe, denn wegen $a \geqq e\ \forall\ a \in H$ gilt $a \circ x \geqq x\ \forall x \in H$ und H ist rechtsnatürlich geordnet.

Korollar 1. *Eine rtug. Halbgruppe H, die positiver Kegel ihrer Quotientengruppe G ist, ist genau dann teilweise geordnete Halbgruppe, wenn in H gilt: $a \leqq b \Rightarrow b = a \circ d$ für ein $d \in H$.*

Beweis. Die Bedingung ist nach Lemma 3 hinreichend; sie ist notwendig, da in einer teilweise geordneten Halbgruppe H aus $a \leqq b$ folgt, daß $e \leqq a^{-1} \circ b$, also $b = a \circ d$ für $d = a^{-1} \circ b \in H$.

Korollar 2. *Eine rtug. Gruppe ist genau dann eine teilweise geordnete Gruppe, wenn aus $a \leqq b$ folgt $b = a \circ d$ für ein $d \geqq e$.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, daß für jedes Element $u = x \circ c \circ x^{-1}$ mit $c \geqq e$, $x \in G$ gilt $u \geqq e$: Da sich jedes Element $x \in G$ in der Form $x = a \circ (x^{-1} \circ a)^{-1}$ d. h. $x = a \circ y^{-1}$ mit $a \geqq e$ und $y \in G$ schreiben läßt, so haben wir mit $y \in G$, $a, c \geqq e$ aus G: $u = a \circ y^{-1} \circ (c \circ y) \circ a^{-1}$; wegen $c \geqq e$ ist $c \circ y \geqq y$, also $c \circ y = y \circ d$ für ein $d \geqq e$, und daher $u = a \circ d \circ a^{-1}$ mit $a, d \geqq e$; analog zum Beweis von Lemma 3 folgt, daß $u \geqq e$. Ist nun $x \leqq y$ mit $x, y \in G$, so ist damit äquivalent: $y \circ x^{-1} = c \geqq e$; wir haben dann für alle $z \in G$: $(z \circ y) \circ (z \circ x)^{-1} = z \circ y \circ x^{-1} \circ z^{-1} = z \circ c \circ z^{-1} \geqq e$, da $c \geqq e$; also $z \circ x \leqq z \circ y\ \forall\ z \in G$.

Die Notwendigkeit der Bedingung folgt aus der Linksisotonie: $a \leqq b \Rightarrow e \leqq a^{-1} \circ b = d$ und $b = a \circ d$ mit $d \geqq e$.

§ 5. Archimedisch rang. Halbgruppen

Analog FUCHS [5], S. 225, geben wir folgende

Definition. Eine rang. Halbgruppe H heißt *archimedisch*, wenn für linkspositive Elemente $a, b \in H$ mit $a^n < b\ \forall\ n > 0$ folgt, daß a Einselement von H ist, und wenn für linksnegative Elemente $c, d \in H$ aus $c^m > d\ \forall\ m > 0$ folgt, daß c Einselement von H ist.

Unter der Voraussetzung einer Teilbarkeitsordnung in der rang. Halbgruppe erhalten wir folgende Charakterisierung (die für angeordnete Halbgruppen von CLIFFORD [2] gegeben wurde):

Satz 1. *Eine archimedisch r-nat. rang. Halbgruppe mit kleinstem Element ($> e$, falls existiert) ist kommutativ, d. h. angeordnete Halbgruppe.*

Beweis. Für das kleinste Element $a \neq e$ gilt $a < a^2$; denn wegen der r-nat. Ordnung ist $a \leqq a^2$; wäre $a = a^2$, so unterscheiden wir zwei Fälle: 1. Es gibt kein $b \in H$ mit $b > a$, also $H = \{a(> e)\}$, was sicher kommutativ ist; 2. es existiert $b \in H$ mit $a < b$, also wäre $a^n < b\ \forall\ n > 0$ und daher $a = e$ (da H archimedisch und r-nat. geordnet, d. h. a linkspositiv). Also: $a < a^2 \leqq a^3 \leqq \cdots$. Sei $b \in H$ beliebig mit $b \neq e, b \neq a$, also $b > a$; dann existiert ein $k > 0$, so daß $a^k < b \leqq a^{k+1}$. Denn wäre 1. $b < a^k\ \forall\ k > 0$, so $b < a$; 2. $a^k < b\ \forall\ k > 0$, so $a = e$; 3. $a^i < b$

$< a^{i+1}$ für ein $i > 0$, so wäre $b = c \circ a^i$ für ein $c \in H$, wobei $c \geqq a$, d. h. $a^{i+1} \leqq \leqq c \circ a^i = b < a^{i+1}$, was nicht möglich ist. Daher ist jedes Element von H eine Potenz von a, und H ist eine zyklische, d. h. kommutative Halbgruppe.

Es sei H eine r-nat. rang. Halbgruppe und a ein Element aus H. Dann gilt entweder: $a^n < a^{n+1}$ für alle $n > 0$, oder es gibt ein $k > 0$, so daß $a < a^2 < \cdots < < a^k = a^{k+1} = \cdots$. Im letzten Fall nennen wir (analog zu CLIFFORD [2]) k den Index von a.

Satz 2. *Besitzt eine archimedisch rang. Halbgruppe H ein maximales Element i und ein minimales Element e, welches Einselement von H ist, dann hat jedes Element $a \neq e$ einen Index n, und es gilt $a^n = i$.*

Beweis. Da jedes Element $a \in H$ linkspositiv und H archimedisch ist, so gibt es ein $k > 0$, so daß $a^k \geqq i$ (sonst wäre $a = e$); also muß $a^k = i$, und das kleinste k ist der Index von a.

Für natürlich angeordnete Halbgruppen zeigte CLIFFORD [2]:

Satz 3. *Es sei H eine archimedisch r-nat. rang. Halbgruppe, in der die rechte Kürzungsregel nicht gilt; dann besitzt H ein maximales Element i, und jedes Element a $(\neq e)$ aus H, hat einen Index n, mit $a^n = i$.*

Beweis. Nach Voraussetzung existieren $a, b, c \in H$ derart, daß $b \circ a = c \circ a$ und $b < c$; dann gibt es ein $x \in H$ mit $c = x \circ b$ (und $x \neq e$, falls existiert); also haben wir $b \circ a = x \circ b \circ a$. Für $y = b \circ a$ gilt daher: $y \neq e$ (sonst $x = e$) und $y = x^n \circ y$ $\forall\, n > 0$. Da H archimedisch und jedes Element linkspositiv ist, gibt es ein $k > 0$ mit $x^k \geqq y$ (da $x \neq e$), also $x^k \circ y \geqq y^2$, d. h. $y > y^2$. Andererseits ist auch y linkspositiv, d. h. $y^2 \geqq y$, also $y^2 = y$ und $y^n = y$ $\forall\, n > 0$. Zu y und a $(\neq e)$ gibt es ein $m > 0$ mit $y^m \geqq a$, d. h. $y \geqq a$; daher ist y größtes Element von H. Analog gibt es zu y $(\neq e)$ und $a \neq e$ aus H stets ein $n > 0$, so daß $a^n \geqq y$; daher gilt $a^n = y$, und das kleinste $n > 0$ mit dieser Eigenschaft ist der Index von a.

Im folgenden sei H eine rang. Halbgruppe, die den Bedingungen von Satz 3 genügt. Analog zu CLIFFORD [2] beweisen wir

Lemma 1. *Sind $a, b \in H$ mit $a \circ b = b$, so $b = i$; ebenso: $a \circ b = a \Rightarrow a = i$.*

Beweis. Es sei $a \circ b = b$; dann gilt für alle $k > 0$: $a^k \circ b = b$, also für $n =$ Index von a folgt $i \circ b = b$; analog gilt für den Index m von b, daß $i \circ b = b^m \circ b = b^{m+1} = b^m = i$; also $b = i$.

Lemma 2. *Sind $a, b, c \in H$ mit $b \circ a = c \circ a \neq i$, so folgt $b = c$.*

Beweis. Wäre o. B. d. A. $b < c$, so wäre $c = x \circ b$ für ein $x \in H$; also wäre $b \circ a = c \circ a = x \circ b \circ a$. Für $b \circ a = y$ gilt also $x \circ y = y$ und $y \neq i$; nach Lemma 1 ist aber wegen $x \circ y = y$ auch $y = i$: Widerspruch.

Ist H' eine archimedisch rang. Halbgruppe mit: $a < b \Rightarrow b = a \circ d$ für ein $d \in H'$, in der die linke Kürzungsregel nicht gilt, dann besitzt (analog zu Satz 3) H' ein maximales Element i, und jedes Element $a \neq e$ von H' hat einen Index n, so daß $a^n = i$. Daher gilt analog zu Lemma 2: Sind $a, b, c \in H'$ mit $a \circ b = a \circ c \neq i$, so folgt $b = c$.

Lemma 3. *Die Gleichung $a = x \circ b$ mit $a \neq i$ ist in H genau dann eindeutig lösbar, wenn $a > b$ gilt.*

Beweis. Existiert ein $c \in H$ mit $a = c \circ b$ als Lösung, so gilt $a \geqq b$. Nach Lemma 1 ist $a \neq b$. — Ist $a > b$, so gilt $a = c \circ b$ für ein $c \in H$; wäre auch für $d \in H$: $a = d \circ b$, so wäre $c \circ b = d \circ b = a \neq i$ und nach Lemma 2: $c = d$.

Für die Gleichung $a = b \circ y$ ist dies im allgemeinen nicht richtig.

Lemma 4. *Besitzt H kein minimales Element und sind $a, b \in H$ mit $a < b$, dann gibt es entweder ein $c \in H$ mit $a < c < b$, oder es gibt einen unteren Nachbarn u von i mit $a = u$ und $b = i$.*

Beweis. Sind $a, b \in H$ mit $a < b$, so ist $b = c \circ a$ für ein $c \in H$; da in H stets ein d existiert mit $d < c$, so gilt: $a \leqq d \circ a \leqq c \circ a = b$. Wir haben jedoch $a < d \circ a$, sonst wäre wegen Lemma 1: $a = i$, im Widerspruch zu $a < b \leqq i$; also gibt es im Fall $a < d \circ a < c \circ a = b$ ein $x \in H$ mit $a < x < b$. Ist aber $d \circ a = c \circ a = b$, so wäre für $b \neq i$ nach Lemma 2: $d = c$; daher muß $b = i$ gelten, und a ist unterer Nachbar von i.

Schließen wir den Fall aus, daß H auch die Linksisotonie erfüllt, d. h. eine archimedisch angeordnete Halbgruppe ist (von Clifford [2] betrachtet), so kann H nach Satz 1 im obigen Lemma 4 kein minimales Element besitzen (sonst wäre sie kommutativ). Wir erhalten also für „echte" rang. Halbgruppen zusammenfassend folgenden (für angeordnete Halbgruppen von Clifford [2] bewiesenen)

Satz 4. *Es sei H eine rang. Halbgruppe, die archimedisch ist und $a < b \Rightarrow b = c \circ a$ für ein $c \in H$ (bzw. $b = a \circ d$ für ein $d \in H$) erfüllt. Genügt H nicht der rechten (bzw. linken) Kürzungsregel, dann gilt:*

1. *H besitzt ein maximales Element i,*
2. *jedes $a \in H$ hat einen endlichen Index n mit $a^n = i$,*
3. *aus $a \circ c = b \circ c \neq i$ (bzw. $c \circ a = c \circ b \neq i$) folgt $a = b$,*
4. *H ist in sich überall dicht außer bei i, d. h., zu $x, y \in H$ mit $x < y$ gibt es entweder ein $z \in H$ mit $x < z < y$, oder es ist $y = i$ und x unterer Nachbar zu i.*

Es sei nun H eine r-nat. rang. archimedische Halbgruppe. Für jedes $a \in H$, welches einen Index n besitzt, ist a^n ein idempotentes Element. Allgemein können wir über ein idempotentes Element sagen:

Lemma 5. *Ist H eine archimedisch r-nat. rang. Halbgruppe, dann ist ein idempotentes Element aus H entweder das kleinste (und dann Einselement von H) oder das größte Element von H.*

Beweis. Es sei $a \in H$ idempotentes Element; es gibt zwei Möglichkeiten: 1. a ist kleinstes Element von H; dann ist entweder $H = \{a\}$, und a ist trivial Einselement von H, oder es existiert ein $b \in H$ mit $b > a$, also $a^n < b \;\forall\; n > 0$ und a ist Einselement von H. 2. a ist nicht kleinstes Element in H; also gilt $a \neq e$ (das Einselement); existiert kein $b \in H$ mit $a < b$, so ist a größtes Element von H; der andere Fall ist nicht möglich, da wegen der archimedischen Eigenschaft $a = e$ gelten würde.

Fordern wir also in H, daß jedes Element $a (\neq e)$ einen endlichen Index n besitzt, so ist a^n idempotentes Element, welches nach Lemma 5 das größte Element i aus H ist: Wäre nämlich a^n das kleinste Element von H, so wäre $a^n = e$, woraus wegen $e = a^n \geqq a \geqq e = a^n$ folgen würde $a = e$ (r-nat. Ordnung). Also gilt für $x \in H$ mit Index $k > 0$, daß $x^k = i$ ist, und wir erhalten folgendes

Korollar. *Ist H ein archimedisch r-nat. rang. Halbgruppe, in der jedes Element ($\neq e$, falls existiert) einen endlichen Index hat, so besitzt H ein größtes Element i, und für $a \in H$ mit Index n gilt $a^n = i$.*

Wir können daher Satz 4 auch folgendermaßen formulieren: Ist H eine archimedisch rang. Halbgruppe mit $a < b \Rightarrow b = c \circ a, c \in H$ (bzw. $b = a \circ d, d \in H$), in der jedes Element einen endlichen Index hat, so gilt:

1. H besitzt ein größtes Element i und $a^n = i$ (n = Index a),
2. aus $a \circ c = b \circ c \neq i$ (bzw. $c \circ a = c \circ b \neq i$) folgt $a = b$,
3. H ist in sich überall dicht außer bei i.

§ 6. Ordinale Irreduzibilität

Die im vorigen Paragraphen bewiesenen Ergebnisse sind Resultate, die CLIFFORD [2] für ordinal irreduzible, natürlich angeordnete, kommutative Halbgruppen gezeigt hat. Für die ordinale Irreduzibilität gibt er mit Hilfe absorbierender Primideale ein Kriterium an (Lemma 1.2., [2]). Dieser Satz ist ohne Einschränkung auch für linkspositive rtwg. Halbgruppen richtig:

Gemäß [7] nennen wir eine rtwg. Halbgruppe H *ordinal reduzibel*, wenn sie als ordinale Summe zweier (oder mehrerer) ihrer Unterhalbgruppen dargestellt werden kann. Dabei heißt H *ordinale Summe* der rtwg. Halbgruppen H_k ($k \in K$), wenn $H = \bigcup H_k$ ($k \in K$) und

1. $a \circ b = b \circ a = b$ und $a < b$ für alle $a \in H_k, b \in H_l$ mit $k < l$,
2. Ordnungsrelation und Halbgruppenoperation in H_k ($\forall k \in K$) bleiben ungeändert,
3. die H_k ($k \in K$) sind paarweise disjunkt.

Es ist leicht ersichtlich, daß die ordinale Summe H der H_k ($k \in K$) genau dann r-nat. bzw. l-nat., rtwg. bzw. rang. ist, wenn dasselbe für jedes der H_k gilt.

Wir verstehen analog CLIFFORD [2] unter einem *absorbierenden Primideal* A einer rtwg. Halbgruppe H ein Halbgruppenideal in H, für welches gilt: $\forall a \in A$ und $\forall x \in H \setminus A$ ist $a \circ x = x \circ a = a$; wir nennen A *echt*, wenn $A \neq \emptyset$, $A \neq H$.

Satz. *Eine l-pos. rtwg. Halbgruppe H ist genau dann ordinal reduzibel, wenn sie ein echtes absorbierendes Primideal besitzt.*

Beweis. Ist P ein echtes absorbierendes Primideal von H, so bilden die Mengen $H \setminus P$ und P Unterhalbgruppen von H, deren Durchschnitt leer ist und für die $H = (H \setminus P) \cup P$ gilt. H ist (für diese Reihenfolge) ordinale Summe von $H \setminus P$ und P: Ist $a \in H \setminus P$ und $b \in P$, so haben wir $a \circ b = b \circ a = b$ und $a < b$, da $a \neq b$ und $b = b \circ a \geqq a$ (jedes Element ist linkspositiv).

Es sei nun umgekehrt $H = \bigcup H_k$ ($k \in K$) ordinale Summe ihrer Unterhalbgruppen H_k ($k \in K$), d. h. $|K| \geqq 2$; wir wählen aus der total geordneten Menge K eine echte Teilmenge $M \neq \emptyset$ so, daß mit $i \in M$ und $k > i$ auch $k \in M$. Wir zeigen, daß $P = \bigcup H_i$ ($i \in M$) ein echtes absorbierendes Primideal in H ist:

1. Sei $a \in P, x \in H$, d. h. $a \in H_i$ mit $i \in M$, $x \in H_k$ mit $k \in K$; ist $k < i$, so $a \circ x = x \circ a = a \in P$; ist $k = i$, so $a \circ x, x \circ a \in H_k \subseteqq P$; ist $k > i$, so $a \circ x = x \circ a = x \in H_k \subseteqq P$, da aus $i \in M$ folgt $k \in M$.

2. Seien $a, b \notin P$, d. h. $a \in H_k$, $b \in H_l$ mit $k, l \notin M$; ist $k > l$ oder $k < l$, so $a \circ b = b \circ a = a$ oder b; ist $k = l$, so $a \circ b$, $b \circ a \in H_k$; also in allen drei Fällen $a \circ b$, $b \circ a$ in H_k oder H_l, d. h. sicher nicht in P.

3. Sei $a \in P$, $x \notin P$, d. h. $a \in H_i$ mit $i \in M$, $b \in H_k$ mit $k \notin M$; also gilt $k < i$ und daher $a \circ x = x \circ a = a$.

Wegen $M \neq 0$, $M \neq K$ ist $P = \bigcup H_i$ $(i \in M)$ echtes Ideal, d. h. $P \neq 0$, $P \neq H$. —

LITERATUR

[1] BIRKHOFF, G.: Lattice Theory. 3. Auflage, New York 1967.

[2] CLIFFORD, A. H.: Naturally ordered commutative semigroups. Amer. J. Math. *76* (1954), 631 – 646.

[3] CONRAD, P.: Ordered Semigroups. Nagoya Math. J. *16* (1960), 51 – 64.

[4] DUBREIL, P.: Introduction à la théorie des demi-groupes ordonnés. Convegno Ital.-Franc. Alg. Astratta (Padova 1956), 1 – 36.

[5] FUCHS, L.: Teilweise geordnete algebraische Strukturen. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1966.

[6] FUCHS, L., and O. STEINFELD: Principal components and prime factorisation in p.o. semigroups. Ann. Univ. Sci. Budapest *6* (1964), 103 – 111.

[7] MITSCH, H.: Rechtsteilweise geordnete Halbgruppen. Beiträge zur Algebra und Geometrie *2* (1974), 61 – 72.

[8] NAKADA, O.: Partially ordered abelian semigroups. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. *11* (1951), 181 – 189.

[9] SAITO, T.: Ordered inverse semigroups. Trans. Amer. Math. Soc. *153* (1971), 99 – 138.

Manuskripteingang: 15. 4. 1972

VERFASSER:

HEINZ MITSCH, Mathematisches Institut der Universität Wien