Werk

Titel: Normalformen für Flächen 3. Ordnung

Autor: Keller, O.H.

Jahr: 1974

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?301416052_0003|log6

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Beiträge zur Algebra und Geometrie
3 (1974), 11 – 21

Normalformen für Flächen 3. Ordnung

OTT-HEINRICH KELLER

SYLVESTER entdeckte 1851, daß sich die allgemeine kubische Quaternärform über dem algebraisch abgeschlossenen Grundkörper k als Summe von fünf Kuben darstellen läßt:

$$F \equiv \sum_{i,k,l=0}^{3} a_{ikl} x_i x_k x_l = \sum_{p=1}^{5} c_p \left(\sum_{m=0}^{3} u_{pm} x_m \right)^3 . \tag{0.1}$$

Ist dabei $\pi(ikl)$ eine Permutation von ikl, so sei $a_{\pi(ikl)} = a_{ikl}$. Die Linearformen $u_p \equiv \sum_{m=0}^{3} u_{pm} x_m$ stellen fünf Ebenen dar. Ihre Konfiguration heißt das *Sylvestersche Pentaeder*.

Die $u_{pm} (m = 0, \ldots, 3)$ sind für jedes p nur bis auf einen gemeinsamen Faktor λ_p bestimmt. Wir nennen λ_p einen *Multiplikator*. Wir setzen $\lambda_p u_p = y_p$ und wählen λ_p so, daß $c_p = 1$ wird ($p = 1, \ldots, 5$); dann wird

$$\sum a_{ikl} x_i x_k x_l = \sum y_p^3 . \tag{A}$$

Die Ebenen $y_p \equiv \sum_{m=0}^{3} y_{pm} x_m$ sind linear abhängig; es wird

$$\sum b_p y_p = 0 \qquad \left(b_p \in k(a_{ikl})\right) .^{1)} \tag{R}$$

(A) und (R) stellen zusammen eine Normalform für die Flächen 3. Ordnung dar. CLEBSCH [1] gab zuerst einen Beweis. Er ging dabei von der Polarentheorie aus und fragte nach Punkten, deren quadratische Polare hinsichtlich der Kubik zerfällt (Knotenpunkte). Für sie hat die Hessesche Matrix $\mathfrak{H} = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \, \partial x_k} \right)$ höchstens den Rang 2. Im allgemeinen gibt es zehn solcher Knotenpunkte; sie liegen so, daß sie als Eckpunkte eines Pentaeders aufgefaßt werden können; die Ebenen des Pentaeders führen auf die Darstellung (A). Sie ist im allgemeinen eineindeutig.

---

[1]) CLEBSCH normierte anders als ich hier, nämlich so, daß $\sum y_p = 0$ wird; dann treten in (A) noch Koeffizienten auf. Die beiden Normierungen führen auf verschiedene Arten von Spezialfällen. Da ich gerade sie ins Auge fassen will, mußte ich anders normieren.

CLEBSCH richtete sein Augenmerk allein auf die allgemeine Fläche und untersuchte nicht, für welche speziellen Flächen seine Überlegungen gelten und für welche sie versagen. Daher kennt man bis heute noch kein Kriterium dafür, und man kennt keine einzige spezielle Kubik (die nicht rückwärts gerechnet wäre), die sich in der Form (A) darstellen läßt. CLEBSCH wußte sicherlich, daß sich gewisse singuläre Flächen, z. B. Regelflächen, nicht in der Form (A) darstellen lassen. Er formulierte deshalb seinen Satz so, als ob jede nicht-singuläre Fläche die Darstellung (A) gestattete. So ist der Satz aber falsch. B. SEGRE [5] hat ihn korrigiert und die Ausnahmen angegeben, sich aber immer noch streng auf nicht-singuläre Flächen beschränkt.
Nun scheint mir, daß die Einteilung der Flächen in singuläre und nicht-singuläre der Fragestellung nicht gemäß ist. Es gibt Flächen mit vier Doppelpunkten, die (A) gestatten, und nicht-singuläre Flächen, die das nicht tun. Wir wollen daher von dieser Unterscheidung nicht ausgehen.
Es ist hier also seit hundert Jahren eine echte Lücke offen, und es erscheint mir ganz und gar nicht überflüssig, nach einem solchen Sortiment von Normalformen zu suchen, daß sich jede Kubik durch eine und im allgemeinen nur eine dieser Normalformen darstellen läßt. Wie sich die singulären Flächen dabei einordnen, wird sich ergeben.

§ 1. Eine rationale Abbildung und ihre Fundamentalelemente

Es sei $\mathfrak{A}$ der projektive 19-Raum der Koeffizienten a_{ikl} und $\mathfrak{Y}$ der projektive 19-Raum der Koeffizienten y_{pm}. Durch (A) ist eine rationale Abbildung ϱ von $\mathfrak{Y}$ in $\mathfrak{A}$ gegeben. Nach den Untersuchungen von CLEBSCH ist die Bildmannigfaltigkeit von ϱ der ganze Raum $\mathfrak{A}$. Für allgemeine Punkte von $\mathfrak{A}$ ist ϱ algebraisch umkehrbar, und zwar 5!-deutig, weil die Reihenfolge der y_p noch beliebig gewählt werden kann. Wir setzen zur Abkürzung $(y_1, \ldots, y_5) = y$.
Die Darstellung (A) versagt, wenn bei einer Spezialisierung der y_{pm} alle $a_{ikl} = 0$ werden. Man nennt diese Werte von y die *Fundamentalelemente* y^0 der Abbildung ϱ. Wir können dann den Bildpunkt von y^0 nicht durch einfaches Einsetzen bekommen, sondern müssen zuerst y zu einem allgemeinen Punkt einer 1-Varietät $\mathfrak{T}$ spezialisieren, auf der y^0 liegt. Dieser allgemeine Punkt hängt noch von einem Parameter t ab, und wir dürfen annehmen, daß der Wert $t = 0$ dem Fundamentalpunkt y^0 entspricht. Wir können aus $\sum_{p=1}^{5} y_p^3$ eine gewisse Potenz von t herausheben; dann liefert die Spezialisierung $t \to 0$ einen Punkt von $\mathfrak{A}$. Durch verschiedene Wahl von $\mathfrak{T}$ können wir verschiedene Punkte von $\mathfrak{A}$ ansteuern. Es sind immer unendlich viele.

Hilfssatz 1. *In jedem Fundamentalelement ist der Rang der Ebenen y_p^0 höchstens* 2.

Angenommen, es gebe drei unabhängige unter den Ebenen y_p^0. Wir legen das Koordinatensystem so, daß $y_p^0 \equiv x_{p-1}$ $(p = 1, 2, 3)$ wird. Soll nun

$$\sum_{p=1}^{5} (y_p^0)^3 = 0 \tag{1.1}$$

sein, so muß

$$y_{4i}^2\, y_{4j} + y_{5i}^2\, y_{5j} = 0 \qquad (i, j = 0, 1, 2) \tag{1.2}$$

werden. Für kein i kann $y_{4i} = y_{5i} = 0$ sein, weil sich sonst x_i^3 in (1.1) nicht wegheben könnte. Aus $y_{40} = 0$ und (1.2) folgt $y_{51} = y_{52} = 0$ und daraus wieder

$y_{41} = y_{42} = 0$, was nicht möglich ist. Sind alle y_{4i} und y_{5i} von 0 verschieden, so folgt aus (1.2):

$$\begin{vmatrix} y_{4i} & y_{4j} \\ y_{5i} & y_{5j} \end{vmatrix} = 0 ,$$

also $\lambda y_4 = \mu y_5$ mit $\lambda^3 + \mu^3 = 1$. Dann könnte sich aber $x_0^3 + x_1^3 + x_2^3$ in (1.1) nicht wegheben.

Hilfssatz 2. *Sind unter den y_p^0 mehrere einander proportional, so müssen sich diese in (1.1) untereinander wegheben. Die Summe der übrigen muß ebenfalls für sich 0 ergeben.*

Wir legen das Koordinatensystem so, daß die proportionalen Ebenen durch $\alpha_p x_0$ ($p = 1, 2, \ldots$) und eine weitere Schar proportionaler Ebenen (falls es eine solche gibt) durch $\beta_p x_1$ ($p = 3, 4, \ldots$) dargestellt werden. Gibt es keine weitere solche Schar, aber wenigstens eine weitere von 0 verschiedene Linearform unter den y_p^0, so sei diese als Koordinate x_1 gewählt. Die anderen Ebenen sind nach Hilfssatz 1 Linearformen $\gamma_{p0} x_0 + \gamma_{p1} x_1$. Es kann höchstens zwei Ebenen geben, für die γ_{p1} und γ_{p0} von 0 verschieden sind, und diese könnten nach Konstruktion nicht proportional sein. Dann könnten sich aber ihre dritten Potenzen nicht wegheben. Also sind alle Ebenen y_p^0 entweder zu x_0 oder zu x_1 proportional oder 0. Daraus folgt die Behauptung.

§ 2. Regelflächen

Wir betrachten zunächst den Fall, daß in einem Fundamentalelement y^0 alle fünf Ebenen paarweise voneinander und von 0 verschieden sind. Nach Hilfssatz 1 bilden sie ein Büschel M. Wir legen das Koordinatensystem so, daß x_0 und x_1 das Büschel M erzeugen. Es ist also

$$y_p^0 \equiv \alpha_p x_0 + \beta_p x_1 \qquad (p = 1, \ldots, 5) . \tag{2.1}$$

a) Zunächst gilt

Satz 2.1. *Zu je fünf paarweise verschiedenen Ebenen $u_p \equiv \alpha_p x_0 + \beta_p x_1$ eines Büschels lassen sich solche Multiplikatoren λ_p finden, daß*

$$\sum_p (\lambda_p u_p)^3 = 0 \tag{2.2}$$

wird. Die λ_p sind bis auf dritte Einheitswurzeln eindeutig bestimmt.

Wir schreiben von (2.2) die Koeffizienten der Potenzprodukte $x_0^i x_1^j$ heraus:

$$\sum \lambda_p^3 \alpha_p^3 = \sum \lambda_p^3 \alpha_p^2 \beta_p = \sum \lambda_p^3 \alpha_p \beta_p^2 = \sum \lambda_p^3 \beta_p^3 = 0 . \tag{2.3}$$

Dies sind vier lineare Gleichungen für die fünf Unbekannten λ_p^3. Die Determinanten ihrer Matrix sind van der Mondesche Determinanten und als solche von 0 verschieden.

b) Es bestehe nun das Fundamentalelement y^0 aus fünf paarweise verschiedenen Ebenen eines Büschels. Wir suchen eine 1-Mannigfaltigkeit von Pentaedern, deren allgemeines Element nicht fundamental ist, die aber y^0 enthält. Es sei also

$$y_p = y_p^0 + t\gamma_p z \qquad (z \text{ eine Linearform in } x;\ z \notin M) . \tag{2.4}$$

Wir dürfen annehmen, daß γ von α und β aus (2.1) unabhängig ist; denn wäre $\gamma_p = \lambda\alpha_p + \mu\beta_p$ $(p = 1, \ldots, 5)$, so könnten wir y^0 durch

$$y^{0\prime} = \alpha(x_0 + \lambda t z) + \beta(x_1 + \mu t z)$$

ersetzen, und $y^{0\prime}$ wäre auch ein Fundamentalelement, was nicht sein sollte. Es wird jetzt nach (2.4)

$$\sum y_p^3 = \sum (y_p^0)^3 + 3t \sum (y_p^0)^2 z\gamma_p + o(t^2)\,. \tag{2.5}$$

Da $\sum (y_p^0)^3 = 0$ ist, können wir t aus (2.5) herausheben und erhalten für $t \to 0$ eine Darstellung unserer Kubik

$$F = 3 \sum (y_p^0)^2 z\gamma_p\,. \tag{2.6}$$

Wir wollen uns überzeugen, daß die rechte Seite von (2.6) nicht identisch verschwindet. Das würde nämlich bedeuten

$$\sum \alpha_p^2\gamma_p = \sum \alpha_p\beta_p\gamma_p = \sum \beta_p^2\gamma_p = 0\,. \tag{2.7}$$

Wir betrachten (2.7) als Gleichungssystem für γ_p. Es hat den Rang 3, denn die Determinanten seiner Matrix sind van der Mondesche Determinanten und könnten nur verschwinden, wenn zwei Paare α_p, β_p einander proportional wären.
Der Rang des Lösungssystems von (2.7) ist also 2. Nun kennen wir zwei unabhängige Lösungen von (2.7), nämlich α und β. Jede Lösung γ von (2.7) müßte also von α und β abhängig sein, und das hatten wir ausgeschlossen. Wir haben also in (2.6) eine echte Darstellung von F. Der Träger des Büschels M ist Doppelgerade von (2.6), weil er es für jeden Summanden ist. Wir haben also

Satz 2.2. *Sind die Ebenen y^0 eines Fundamentalelementes paarweise voneinander und von 0 verschieden, so hat die Fläche F eine Doppelgerade und ist eine Regelfläche.*

c) So, wie wir in (2.4) eine Linearform z ins Spiel gebracht haben, können wir es auch mit mehreren tun. Wir setzen also

$$y_p = y_p^0 + t \sum_i \gamma_{pi} z_i \tag{2.8}$$

und erhalten in Analogie zu (2.6)

$$F = 3 \sum_{p=1}^{5} (y_p^0)^2 \sum_i \gamma_{pi} z_i\,. \tag{2.9}$$

Satz 2.3. *Der Ansatz (2.9) führt auf jede Regelfläche, für die $x_0 = x_1 = 0$ die Doppelgerade ist.*

Die allgemeinste Regelfläche dieser Art ist

$$x_0^2 z_1 + x_0 x_1 z_2 + x_1^2 z_3 = 0\,. \tag{2.10}$$

Wir bestimmen nun in (2.8) die γ_{pi} so, daß

$$\sum \alpha_p^2\gamma_{p1} = 1\,,\qquad \sum \alpha_p\beta_p\gamma_{p1} = 0\,,\qquad \sum \beta_p^2\gamma_{p1} = 0\,, \tag{2.11}$$

$$\sum \alpha_p^2\gamma_{p2} = 0\,,\qquad \sum \alpha_p\beta_p\gamma_{p2} = 1\,,\qquad \sum \beta_p^2\gamma_{p2} = 0\,, \tag{2.12}$$

$$\sum \alpha_p^2\gamma_{p3} = 0\,,\qquad \sum \alpha_p\beta_p\gamma_{p3} = 0\,,\qquad \sum \beta_p^2\gamma_{p3} = 1 \tag{2.13}$$

wird. Von jedem dieser drei Gleichungssysteme hat die linke Seite den Rang 3. Daher sind sie lösbar und liefern (2.10).

Für die Regelflächen sind Normalformen seit langem bekannt.

$$F = x_0^2 x_2 + x_1^2 x_3 . \tag{B}$$

$$F = x_0^3 + x_0 x_1 x_2 + x_1^2 x_3 . \tag{C}$$

Sie erscheinen hier abgeleitet aus der Pentaederform (A) als Fundamentalelemente der Abbildung ϱ.

d) Wir wollen nun noch die Dimensionen abzählen. Die Mannigfaltigkeit der Ebenenquintupel vom Rand 2 hat die Dimension 9. Die Mannigfaltigkeit der kubischen Regelflächen (2.10) mit der festen Doppelgeraden g hat die Dimension 9. Die Mannigfaltigkeit derjenigen Paare einer Regelfläche und eines Ebenenquintupels, die durch die Abbildung ϱ verknüpft sind und in der beschriebenen Weise fundamental sind, hat die Dimension $18 = 19 - 1$, in Übereinstimmung mit einem Satz von VAN DER WAERDEN [7].

§ 3. Mehrere Pentaederebenen fallen zusammen

Es sei etwa $y_p^0 = \alpha_p u$ $(p = 1, \ldots, k)$ mit einer festen Linearform u, und die Ebenen $y_p^0 = 0$ seien für $p > k$ von der Ebene $u = 0$ verschieden $(k = 2, 3, 4, 5)$. Wir betrachten wieder eine 1-Mannigfaltigkeit mit dem Parameter t, die y^0 für $t = 0$ enthält. Es sei

$$y_p = \alpha_p \left(u + \sum_i t\beta_{pi} z_i \right) + o(t) \qquad (p \leqq k) . \tag{3.1}$$

Wir dürfen o. B. d. A. annehmen, daß die y_p alle verschieden sind, da wir sie sonst in (A) zusammenfassen könnten. Durch geeignete Wahl der Basis der z_i können wir erreichen, daß die β_{p1} alle verschieden sind. Wir lassen in β_p den weiteren Index 1 weg.

Soll y^0 ein Fundamentalelement sein, so muß $\sum_{p=1}^{k} \alpha_p^3$ nach Hilfssatz 2 verschwinden. Aus $\sum y_p^3$ muß sich dann eine Potenz von t herausheben lassen, etwa t^m.

a) Wir betrachten zunächst den Fall, daß $m \geqq k - 1$ ist; dann muß

$$\begin{aligned} \sum \alpha_p^3 &= 0 , \\ \sum \alpha_p^3 \beta_p &= 0 , \\ \cdots&\cdots\cdots \\ \sum \alpha_p^3 \beta_p^{k-2} &= 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

sein. (Da $k \leqq 5$, ist $k - 2 \leqq 3$.) Dann sind β_p^i $(i = 0, 1, \ldots, k - 2)$ Lösungen der Gleichung

$$\sum \alpha_p^3 x_p = 0 . \tag{3.3}$$

Sie sind linear unabhängig, denn die Determinanten ihrer Matrix sind van der Mondesche Determinanten und verschwinden nicht. Also sind sie eine Basis aller Lösungen von (3.3).

Es kann nicht noch $\sum_p \alpha_p^3 \beta_p^{k-1} = 0$ sein, denn β_p^{k-1} sind von den übrigen β_p^i linear unabhängig, wieder, weil die Vandermondesche Determinante nicht verschwindet.

Wir denken uns jetzt die Entwicklung (3.1) als Reihe nach Potenzen von t weitergeführt. Es seien $\varphi(t)$ Funktionen von t, für die $\left.\frac{\varphi(t)}{t}\right|_{t=0} = 0$ wird.
Ist $\gamma_p \varphi(t)\, z$ $(p = 1, \ldots, k)$ je ein Zusatzglied und soll sich

$$\sum \alpha_p^3 \cdot 3u^2 \gamma_p \varphi(t)\, z$$

in $\sum y_p^3$ herausheben, so muß der Vektor $(\gamma_p)_{p=1,\ldots,k}$ eine Linearkombination der Vektoren $(\beta_p^i)_{p=1,\ldots,k}$ $(i = 0, \ldots, k-2)$ sein. Wir fassen in allen diesen Zusatzgliedern jeweils die gleichen Potenzen von β_p zusammen und machen den Ansatz

$$y_p = \alpha_p\big(u + \beta_p t z_1 + \varphi_2(t)\beta_p^2 z_2 + \cdots + \varphi_{k-2}(t)\,\beta_p^{k-2} z_{k-2}\big) + o(t^{k-2})\,. \qquad (3.4)$$

Wir sammeln nun in $\sum y_p^3$ die Glieder mit β_p^{k-1}; sie haben die Form

$$\sum_{p=1}^{k} \sigma \alpha_p^3 u^h t^i \beta_p^{k-1} z_1^i \varphi_\nu^j(t) z_\nu^j \qquad (3.5)$$

mit

$$h + i + j = 3\,, \qquad i + \nu j = k - 1 \qquad (\sigma = 1, 3 \text{ oder } 6)\,. \qquad (3.6)$$

Die Ordnung aller dieser Glieder in t soll dabei nicht kleiner sein als $k-1$. Dann darf auch die Ordnung von $\varphi_\nu(t)$ nicht kleiner sein als ν. Sollen alle Glieder (3.5) in der Endformel nach Herausholen von t^{k-1} vertreten sein, so muß die Ordnung von $\varphi_\nu(t)$ genau ν sein. Wir versehen nun die z_ν mit geeigneten Multiplikatoren und beachten (3.6). Wir versehen ferner beliebig gewählte $y_p (p > k)$, für die $y_p \to y_p^0$ bei $t \to 0$ gelte, mit dem Faktor $t^{(k-1)/3}$, summieren dann die Glieder (3.5), teilen durch t^{k-1} und spezialisieren t zu 0. Dann erhalten wir die folgenden Normalformen, wenn wir noch $u, y_{k+1}, \ldots, y_5$ durch $y_0, y_1, \ldots, y_{5-k}$ ersetzen:

$$(k = 2) \qquad 3y_0^2 z_1 + y_1^3 + y_2^3 + y_3^3\,, \qquad \text{(D)}$$

$$(k = 3) \qquad 3y_0 z_1^2 + 3y_0^2 z_2 + y_1^3 + y_2^3\,, \qquad \text{(E)}$$

$$(k = 4) \qquad z_1^3 + 6y_0 z_1 z_2 + 3y_0^2 z_3 + y_1^3\,, \qquad \text{(F)}$$

$$(k = 5) \qquad 3z_1^2 z_2 + 3y_0 z_2^2 + 6y_0 z_1 z_3 + 3y_0^2 z_4\,. \qquad \text{(G)}$$

b) Ebenso, wie einmal mehrere y_p zusammenfallen können, kann das auch mehrmals (allerdings höchstens zweimal) vorkommen. Je nachdem, ob dabei je zwei Ebenen in y_0 und y_1 oder einmal drei Ebenen in y_0 und zwei Ebenen in y_1 zusammenfallen, bekommen wir die Normalformen

$$3y_0^2 z_1 + 3y_1^2 z_2 + y_2^3\,, \qquad \text{(H)}$$

$$3y_0 z_1^2 + 3y_0^2 z_2 + 3\, y_1^2 z_3\,. \qquad \text{(I)}$$

c) Wir fragen nun nach Fundamentalelementen, für die $m < k - 1$ wird. Diese Möglichkeit besteht immer in dem Sinne, daß eine der k Ebenen überflüssig ist und wir auf eine Normalform stoßen, die bereits unter $k-1$ zusammenfallenden y_p aufgezählt ist. Diese Fälle lassen wir als uninteressant beiseite. Sie sind für $k = 2$ und $k = 3$ die einzigen.
Wir beginnen mit dem Fall $k = 4$, $m = 2$. Wir machen den Ansatz

$$y_p = \alpha_p(y_0 + \beta_p t u + \gamma_p t v) + o(t) \qquad (p = 1, \ldots, 4)\,. \qquad (3.7)$$

Dabei seien $\varepsilon = (1, 1, 1, 1)$, β und γ linear unabhängige Vektoren. Sollen sich alle Glieder mit t^1 wegheben, so muß

$$\sum \alpha_p^3 = 0\,, \qquad \sum \alpha_p^3\beta_p = 0\,, \qquad \sum \alpha_p^3\gamma_p = 0 \tag{3.8}$$

sein. Das Gleichungssystem $\sum \alpha_p^3 x_p = 0$ hat also die Lösungen $\varepsilon, \beta, \gamma$, und diese bilden eine Basis. Wenn wir nun die Glieder mit t^2 hinzunehmen, so wird

$$\sum y_p^3 = t^2 \sum \alpha_p^3(3y_0\beta_p^2u^2 + 6y_0\beta_p\gamma_p uv + 3y_0\gamma_p^2v^2 + 3y_0^2\delta_p z_3) + o(t^2)\,. \tag{3.9}$$

Die quadratische Form

$$\sum \alpha_p^3(\beta_p^2u^2 + 2\beta_p\gamma_p uv + \gamma_p^2v^2) \tag{(3.10}$$

läßt sich als Quadrat oder als Produkt zweier Linearformen z_1 und z_2 schreiben. Die erste Möglichkeit tritt ein, wenn $\gamma = 0$ ist. Dann bekommen wir nichts Neues. Im zweiten Fall dagegen bekommen wir die Normalform

$$6y_0z_1z_2 + 3y_0^2z_3 + y_1^3\,. \tag{K}$$

(K) zeigt eine gewisse Verwandtschaft mit (F), nur fehlt in (K) das Glied z_1^3. Aber wir haben in (F) nicht die Freiheit, durch Spezialisierung eines Koeffizienten ein Glied verschwinden zu lassen, und so müssen wir (K) als eigenständige Normalform mitzählen.

Für $k = 5$, $m = 2$ spalten alle Glieder den Faktor y_0 ab, und die Form wird reduzibel. Um dies einzusehen, machen wir den Ansatz

$$y_p = \alpha_p\left(y_0 + \sum_{i=1}^{3} \beta_{pi}z_i t\right) + o(t)\,. \tag{3.11}$$

Wie oben müssen $\sum\limits_p \alpha_p^3 = \sum\limits_p \alpha_p^3\beta_{pi} = 0$ sein für alle i, damit die Koeffizienten von t^0 und t^1 verschwinden. Der Koeffizient von t^2 wird dann

$$y_0Q(z_1, z_2, z_3) + y_0^2L(y_0, z_1, z_2, z_3)\,, \tag{L}$$

wo Q eine quadratische, L eine lineare Form bedeutet. Durch geeignete Wahl der β_{pi} können wir jede beliebige quadratische Form Q, durch geeignete Zusatzglieder in (3.11), die wie t^2 gegen Null gehen, können wir jede beliebige Linearform L erhalten.

Es bleibt noch die Möglichkeit $k = 5$, $m = 3$. Zunächst zeigen wir, daß der Ansatz (3.7) (mit $p = 1, \ldots, 5$) hier nicht zum Ziele führt. Es müßten nämlich außer (3.8) noch die Gleichungen

$$\sum \alpha_p^3\beta_p^2 = 0\,, \qquad \sum \alpha_p^3\beta_p\gamma_p = 0\,, \qquad \sum \alpha_p^3\gamma_p^2 = 0 \tag{3.12}$$

gelten, damit sich die Glieder mit t^2 wegheben.

Wir fassen (3.8) mit (3.12) als Gleichungssystem für $\alpha_1^3, \ldots, \alpha_5^3$ auf. Seine Matrix ist

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} 1 & \beta_1 & \gamma_1 & \beta_1^2 & \beta_1\gamma_1 & \gamma_1^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \beta_5 & \gamma_5 & \beta_5^2 & \beta_5\gamma_5 & \gamma_5^2 \end{pmatrix}.$$

(3.8) und (3.12) könnten nur lösbar sein, wenn $\operatorname{rg} \mathfrak{M} \leq 4$ wäre.

Wir fassen weiter $\varepsilon_p = 1$, β_p und γ_p für $p = 1, \ldots, 5$ als homogene Koordinaten eines Punktes P_p in einer Hilfsebene auf. Für einen Kegelschnitt durch die fünf Punkte P_p gelten die Gleichungen

$$a_{00} + 2a_{01}\beta_p + 2a_{02}\gamma_p + a_{11}\beta_p^2 + 2a_{12}\beta_p\gamma_p + a_{22}\gamma_p^2 = 0 \tag{3.13}$$

mit unbekannten a_{ik}. Die Matrix von (3.13) ist ebenfalls $\mathfrak{M}$. Im allgemeinen hat $\mathfrak{M}$ den Rang 5. Es ist nur dann rg $\mathfrak{M} \leqq 4$, und der Kegelschnitt durch die fünf Punkte P_p ist nur dann nicht eindeutig bestimmt, wenn vier Punkte, etwa $P_1, \ldots, P_4$, auf einer Geraden liegen. Sie müssen paarweise verschieden sein, da die y_p paarweise verschieden sein sollen. P_5 darf nicht auch noch auf dieser Geraden liegen, da sonst ε, β und γ linear abhängig wären. In diesem Fall hat zwar (3.8), (3.12) genau eine Lösung, aber in ihr wäre $\alpha_5^3 = 0$ entgegen der Voraussetzung, daß von den fünf Ebenen y_p keine fehlen darf. Der Ansatz (3.7) führt also hier nicht weiter.

Wir machen jetzt den Ansatz

$$y_p = \alpha_p\big(y_0 + \beta_p t z_1 + \gamma_p \varphi(t)\, z_2\big) + o(t^2)$$

mit $\left.\dfrac{\varphi(t)}{t}\right|_{t=0} = 0\,.$

Wir können dann die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{lll} \sum \alpha_p^3 = 0\,, & \sum \alpha_p^3\beta_p = 0\,, & \sum \alpha_p^3\gamma_p = 0\,, \\ \sum \alpha_p^3\beta_p^2 = 0\,, & \sum \alpha_p^3\beta_p\gamma_p = 0 & \end{array}\right\} \tag{3.15}$$

erfüllen. Dann wird aber nach dem eben Bewiesenen $\sum \alpha_p^3\gamma_p^2 \neq 0$; die Funktion $(\varphi(t))^2$ muß also die Ordnung 3 haben, wenn das Glied $3 \sum \alpha_p^3 y_0 \gamma_p^2 \varphi^2(t) z_2^2$ die Ordnung $m = 3$ haben soll. Wir setzen $\varphi(t) = t^{3/2}$, und wir bekommen die Normalform

$$z_1^3 + 3y_0z_2^2 + 6y_0z_1z_3 + 3y_0^2z_4\,. \tag{M}$$

Damit haben wir alle Möglichkeiten durchdacht. Unsere Überlegungen ergaben:

Satz. *Jede kubische Form läßt sich auf eine und im allgemeinen nur eine der Normalformen* (A) *bis* (M) *transformieren. Keine davon ist überflüssig. Die Ebenen y_p sind als Pentaederebenen dabei eindeutig bestimmt. Die Hilfsebenen z_p sind es im allgemeinen nicht.*

In jeder dieser Normalformen (A) bis (M) stehen fünf Linearformen y_p und z_q. Zwischen ihnen besteht eine Relation

$$\sum b_p y_p + \sum c_q z_q = 0\,. \tag{R}$$

§ 4. Singularitäten

Wir wollen uns nun überlegen, zu welchen Typen von Singularitäten welche Normalformen gehören.

Wir fassen die Normalformen (A) bis (M) als Gleichungen von Kubiken V, die Relation (R) als Gleichung einer Hyperebene im R_4 auf. Die räumliche Kubik F erscheint dann als Schnitt von V mit R. Wir erhalten alle räumlichen Flächen F eines bestimmten Typus, wenn wir die entsprechende Hyperfläche V mit allen Hyperebenen R schneiden.

Die Fläche F hat in einem Punkte P eine Singularität, 1. wenn V dort eine hat, 2. wenn die Hyperebene R dort V berührt. Im zweiten Fall ist der Rang des Tangentialkegels $\mathfrak{K}$ um 2 kleiner als der Rang der quadratischen Polaren von P in bezug auf V.

Für die Singularitäten benutzen wir die Bezeichnungen, die SCHLÄFLI dafür eingeführt hat. Es bedeute

C_2 ein konischer Doppelpunkt;
B_3, B_4, B_5, B_6 biplanare Doppelpunkte;
B_3: die Schnittgerade g der beiden Tangentialebenen gehört der Fläche nicht an;
B_4—B_6: g gehört der Fläche an;
B_4: keine der Tangentialebenen berührt F längs g;
B_5 (B_6): eine der Tangentialebenen berührt F längs g einfach (doppelt);
U_7—U_9 uniplare Doppelpunkte; die Tangentialebene schneidet die Fläche in 3 — 2 — 1 verschiedenen Geraden.

Wenn wir die Koordinaten eines konkreten Punktes angeben wollen, schreiben wir zunächst die Werte der y_i, dann nach einem Semikolon die Werte der z_i hin.
Wir untersuchen jetzt einige der Normalformen (A) bis (M) nacheinander auf ihre Singularitäten.

(A) $\quad y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 + y_4^3 + y_5^3$:

V hat keinen singulären Punkt. Die Tangentialhyperebene in $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)$ ist

$$y_1\eta_1^2 + y_2\eta_2^2 + y_3\eta_3^2 + y_4\eta_4^2 + y_5\eta_5^2 = 0\,.$$

Verwenden wir sie als Form R, so hat F in η einen Doppelpunkt. Den Rang der quadratischen Polaren berechnen wir als Rang der Hesseschen Matrix

$$\mathfrak{H} = \left(\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_i \partial y_k}\right)\right)_{y=\eta} = \begin{pmatrix} \eta_1 & & & & 0 \\ & \eta_2 & & & \\ & & \eta_3 & & \\ & & & \eta_4 & \\ 0 & & & & \eta_5 \end{pmatrix}.$$

Sind die η_i alle von 0 verschieden, so ist rg $\mathfrak{H} = 5$ und rg $\mathfrak{K} = 3$. Also ist $\mathfrak{K}$ ein nicht-ausgearteter Kegel, und η ist ein C_2.
Es kann nun sein, daß eine Hyperebene die Kubik V öfter, bis zu viermal berührt, z. B. die Ebene $y_1\sqrt[3]{4} + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 0$ berührt V in den Punkten

$$\begin{array}{l}(\sqrt[3]{2},\ \ 1, -1, -1, -1)\,,\\ (\sqrt[3]{2}, -1,\ \ 1, -1, -1)\,,\\ (\sqrt[3]{2}, -1, -1,\ \ 1, -1)\,,\\ (\sqrt[3]{2}, -1, -1, -1,\ \ 1)\,;\end{array}$$

F hat also vier C_2.
Verschwindet ein η_i, so hat $\mathfrak{H}(\eta)$ den Rang 4, und η ist biplanar (B_3). Auch hier ist mehrfache, bis zu dreifache Berührung möglich. So berührt $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0$ die Kubik V in drei biplanaren Doppelpunkten. Verschwinden zwei der η_i, so hat $\mathfrak{H}(\eta)$ den Rang 3, und η ist uniplar (U_7).
Eine Fläche des Typs (A) kann also mehrere gleichartige Doppelpunkte des Typs C_2, B_3, U_7 haben, aber keine B und U mit höherem Index und nicht Doppelpunkte verschiedenen Typs.

Bei (D) und (E) hat F einen uniplaren Doppelpunkt. Jede Hyperebene durch ihn schneidet in einer Fläche mit uniplanarem Doppelpunkt.
Bei (D) kann dies ein U_8, bei (E) sogar ein U_9 sein.

(F) $\quad z_1^3 + 6y_0z_1z_2 + 3y_0^2z_3 + y_1^3$:

F hat eine Doppellinie $y_0 = y_1 = z_1 = 0$. Sie ist in jedem ihrer Punkte biplanar, im Punkt $(0, 0; 0, 0, 1)$ sogar uniplanar. Die Ebene $y_0 = 0$ ist in jedem Punkt Bestandteil des Tangentialhyperkegels. Jede Hyperebene schneidet eine Fläche mit einem B_3 aus, möglicherweise noch mit einem C_2. Geht R durch $(0, 0; 0, 0, 1)$, so hat F einen U_7; ist $R = ay_1 + bz_1$, so hat F einen U_9.

(G) $\quad 3z_1^2z_2 + 3y_0z_2^2 + 6y_0z_1z_3 + 3y_0^2z_4$:

F hat wieder die Doppellinie $y_0 = z_1 = z_2 = 0$ und enthält die 2-Ebene $y_0 = z_1 = 0$. Jeder Schnitt F mit R enthält die Schnittgerade dieser Ebene mit R und berührt die Ebene $y_0 = 0$ überall. F hat also einen B_5, möglicherweise noch einen C_2. Geht R durch $(0; 0, 0, 0, 1)$, so hat F einen U_8 oder einen U_9 (wenn $R = az_1 + bz_2$).

(H) $\quad 3y_0^2z_1 + 3y_1^2z_2 + y_2^3$:

F hat wieder die Doppellinie $y_0 = y_1 = y_2 = 0$; die Fläche F hat also jedenfalls einen B_3, möglicherweise noch einen oder zwei C_2, z.B. wenn $R = -2y_1 + 3y_2 + z_2$.

(I) $\quad 3y_0z_1^2 + 3y_0^2z_2 + 3y_1^2z_3$:

F hat wieder die Doppellinie $y_0 = y_1 = z_1 = 0$ und enthält die 2-Ebene $y_0 = y_1 = 0$. Jeder Schnitt F hat einen B_4 und möglicherweise noch einen oder zwei C_2, dies z.B., wenn $R = 3y_0 + 2z_1 + z_2 + z_3$ ist.

(K) $\quad 6y_0z_1z_2 + 3y_0^2z_3 + y_1^3$:

F hat zwei Doppellinien $y_0 = y_1 = z_1 = 0$ und $y_0 = y_1 = z_2 = 0$. F ist dort in jedem Punkt biplanar. F hat also jedenfalls zwei B_3, möglicherweise noch einen C_2 oder einen dritten B_3.

(M) $\quad z_1^3 + 3y_0z_2^2 + y_0z_1z_3 + y_0^2z_4$:

F hat wieder die Doppellinie $y_0 = z_1 = z_2 = 0$. Die Hyperebene $y_0 = 0$ schneidet F in $z_1 = 0$ dreifach. Jedes F hat also einen B_6, möglicherweise auch einen C_2.
In den Fällen (F) bis (K), (M) finden wir für F eine Doppellinie vor. In einem ihrer Punkte P fallen die beiden Tangentialebenen zusammen. Geht R durch P, so bekommt dort F einen uniplanaren Doppelpunkt. Je nach der Lage von R können dann noch die Schnittlinien von F mit der Tangentialebene in P zu zweien oder zu dreien zusammenfallen.
Die Ergebnisse dieses Paragraphen seien noch einmal in einer Tabelle zusammengestellt. Kommt ein Typ einer Singularität bei jeder Fläche eines bestimmten Typs vor, so sei er unterstrichen.

(A)	C_2, $2C_2$, $3C_2$, $4C_2$,	B_3, $2B_3$, $3B_3$,	U_7;
(B), (C)	Regelflächen;		
(D)	C_2, $2C_2$, $3C_2$,	B_3, $2B_3$,	U_7, U_8;
(E)	C_2, $2C_2$,	B_3,	U_7, U_8, U_9;

(F)	$B_3, B_3, + C_2,$	$U_7, \quad U_9;$
(G)	$B_5, B_5 + C_2,$	$U_8, U_9;$
(H)	$B_3, B_3 + C_2, B_3 + 2C_2,$	$U_7, U_8;$
(I)	$B_4, B_4 + C_2, B_4 + 2C_2,$	$U_7, U_8, U_9;$
(K)	$2B_3, 2B_3, + C_2, 3B_3,$	$U_9;$
(L)	reduzibel;	
(M)	$B_6, B_6 + C_2,$	$U_9.$

LITERATUR

[1] Clebsch, A.: Über die Knotenpunkte der Hesseschen Fläche, insbesondere bei Oberflächen dritter Ordnung. J. reine angew. Math. *59* (1861), 193–228.

[2] Gordan, P.: Über das Pentaeder der Flächen dritter Ordnung. Math. Ann. *5* (1872), 341–377.

[3] Reye, T.: Geometrischer Beweis des Sylvesterschen Satzes: „Jede quaternäre cubische Form ist darstellbar als Summe von fünf Cuben linearer Formen." J. reine angew. Math. *78* (1874), 114–122.

[4] Salmon, G., und W. Fiedler: Analytische Geometrie des Raumes. II. Theil. Analytische Geometrie der Curven im Raume und der algebraischen Flächen. 2. Auflage. Verlag B. G. Teubner, Leipzig 1874.

[5] Segre, B.: The non-regular cubic surfaces. Oxford Univ. Press 1942, XIII.

[6] Sylvester, J. J.: Sketch of a memoir on elimination, transformation, and canonical forms. Cambridge and Dublin Math. J. *6* (1851), 186–200.

[7] van der Waerden, B. L.: Zur algebraischen Geometrie. VI. Algebraische Korrespondenzen und rationale Abbildungen. Math. Ann. *110* (1935), 134–160.

Manuskripteingang: 13. 4. 1972

VERFASSER:

Ott-Heinrich Keller, Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg